



*P. Brude.*

PAUL DRUDES  
PHYSIK DES AETHERS

AUF  
ELEKTROMAGNETISCHER GRUNDLAGE

ZWEITE AUFLAGE

NEU BEARBEITET VON

DR. WALTER KÖNIG,

PROFESSOR DER PHYSIK AN DER UNIVERSITÄT GIESSEN.

Mit einem Bildnis Paul Drudes und 86 Textabbildungen.



STUTTGART.  
VERLAG VON FERDINAND ENKE



538.3  
D79

Das Uebersetzungsrecht für alle Sprachen und Länder vorbehalten.

Copyright 1912 by Ferdinand Enke, Publisher, Stuttgart.

Druck der Union Deutsche Verlagsgesellschaft in Stuttgart.

## Vorwort zur ersten Auflage.

Die nachfolgende Darstellung der Eigenschaften des elektromagnetischen Feldes und ihre Heranziehung zur Erklärung optischer Erscheinungen ist aus Vorlesungen entstanden, welche ich in den Jahren 1892 und 1893 über diese Gegenstände in Göttingen gehalten habe.

Der Zweck des Vorliegenden ist, in möglichst leicht verständlicher Weise in die Maxwell'sche Theorie der Elektrizität einzuführen. Als Kernpunkt derselben möchte ich hier zwei Dinge bezeichnen:

1. Die Zurückführung aller Eigenschaften des elektromagnetischen Feldes auf Nahwirkungen.

2. Die Einheit der Eigenschaften des elektromagnetischen Feldes, zufolge deren die Wirkungen der in Isolatoren stattfindenden sogenannten Verschiebungsströme mit Notwendigkeit gefolgert werden können aus den beobachtbaren Wirkungen der in Metallen stattfindenden Leitungsströme.

Die Eigenschaften des magnetischen Feldes sind denen des elektrischen Feldes vorangestellt, und demgemäß ist auch die Elektrostatik hinter der Elektrokinetik behandelt. Es geschah dies deshalb, weil die Lehre der magnetischen Kraftlinien der Anschauung durch das Experiment besser zugänglich ist, als die der elektrischen Kraftlinien. Durch diese Einteilung des Stoffes können die ersten sechs Kapitel auch dem Elektrotechniker die theoretische Grundlage seiner Wissenschaft geben, was mir als nicht unnütz erschien, da in den technischen Büchern diese Grundlagen oft nur kurz und unvollständig behandelt sind.

Ich habe möglichst den Kontakt mit dem Experiment zu wahren gesucht. Das Buch soll und kann allerdings nicht entfernt eine vollständige Darstellung der Experimente und Meßmethoden geben, es soll nur das theoretische Verständnis derselben fördern. Diesem Zweck entsprechend ist auf die meisten Experimente nur kurz eingegangen. Eine Ausnahme bildet das IX. Kapitel über elektrische Schwingungen, welche deshalb ausführlicher (auch in experimenteller Hinsicht) behandelt wurden, weil eine zusammenhängende Darstellung dieser Erscheinungen bis jetzt noch nicht vorhanden ist, und weil sie für die ganze Theorie von besonderer Bedeutung sind. Aus diesem Grunde habe ich auch die Entwicklungen des XI. Kapitels etwas weiter ausgedehnt, als es einer ersten Einführung in das Studium jener Erscheinungen entsprechen würde.

Es bedarf noch der Rechtfertigung, daß ich es unternehme, Vor-

liegendes drucken zu lassen, obgleich zwei ausgezeichnete Werke in neuerer Zeit über nahezu dieselben Gegenstände erschienen sind, nämlich L. Boltzmann, Vorlesungen über Maxwells Theorie der Elektrizität und des Lichtes, Leipzig 1891 und 1893, und H. Poincaré, Elektrizität und Optik, autorisierte deutsche Ausgabe von Jaeger und Gumlich, Berlin 1891 und 1892.

Von dem ersten dieser Werke unterscheidet sich die von mir gegebene Darstellung insofern, als es mein Ziel war, nur die zur mathematischen Darstellung der beobachtbaren Erscheinungen notwendigen Formeln auf Grund gewisser Fundamentalversuche abzuleiten. Ich habe daher die Ableitung der Gleichungen des elektromagnetischen Feldes aus den Prinzipien der Mechanik, welche in der Darstellung des Herrn Boltzmann in den Vordergrund tritt, vermieden, denn aus den Beobachtungstatsachen allein ergibt sich weder die Notwendigkeit noch die Zweckmäßigkeit einer mechanischen Darstellung.

Diese rechtfertigt sich vielmehr vorläufig nur durch das Bedürfnis des Naturphilosophen, dieselben Grundanschauungen und Gleichungen für die Physik des Aethers wie für die Physik der Materie zu besitzen, wobei es noch als eine offene Frage zu betrachten ist, ob man zweckmäßiger die Gleichungen für die Physik des Aethers zurückführen soll auf diejenigen Gleichungsformen, welche aus den beobachtbaren Erscheinungen der Physik der Materie gewonnen werden können (Gleichungen der Mechanik), oder ob der umgekehrte Weg mit größerem Vorteil einzuschlagen ist.

In jedem Falle scheint mir für den Lernenden eine Darstellung, welche nur der durch die Mathematik zu gewinnenden Oekonomie der Beschreibung der Tatsachen dient, als ein notwendiges Antecedens vor denjenigen Darstellungen, welche nicht direkt das Bedürfnis des Experimentators, sondern hauptsächlich das des Naturphilosophen befriedigen wollen. Von diesem Standpunkte aus möchte ich daher die hier gegebene Darstellung eine Einleitung zu der Boltzmannschen nennen, indem ich hoffe, daß diese Blätter demjenigen, welcher die jetzt herrschenden Ansichten über Elektrizität, Magnetismus und Licht kennen lernen will, eine gewisse Erleichterung zum Studium des Boltzmannschen Buches oder des Originalwerkes von Maxwell selbst bieten können.

Auch Hertz hat in seinen theoretischen Arbeiten über das elektromagnetische Feld die mathematische Beschreibung der Tatsachen als alleinigen Zweck in den Vordergrund gestellt und demgemäß direkt die Grundgleichungen hingeschrieben, aus denen sich die zu beobachtenden Tatsachen widerspruchsfrei ableiten lassen. Dieser Weg ist im folgenden nicht eingeschlagen, weil er didaktisch unbefriedigend ist und wohl durch einen in dieser Hinsicht seren Weg ersetzt werden kann.

lich auf mathematischer Abstraktion derjenigen Erfahrungen beruht, welche einige Fundamentalversuche darbieten. Das typische Beispiel für den letzteren Weg, welcher also der hier gegebenen Darstellung als Vorbild gedient hat, ist die Ableitung des Newtonschen Gravitationsgesetzes aus den in der Planetenbewegung sichtbaren Erscheinungen, d. h. aus den Keplerschen Gesetzen.

Das gleiche Ziel verfolgt zum Teil das obengenannte Buch des Herrn Poincaré; mit diesem hat daher die hier folgende Darstellung manche Punkte gemeinsam, und ich habe viel nützliche Anregung aus dem Studium dieses Buches gewonnen. So habe ich zur Ableitung der Induktionsgesetze den Gedankengang des Herrn Poincaré direkt benutzt. — In vielen Punkten weichen meine Darstellung und meine Resultate von denen Poincarés ab, wie ein näherer Vergleich zeigen wird, den ich aber hier übergehen möchte. Vor allem fehlt in jenem Werke die Parallelität bei der Darstellung der Eigenschaften des magnetischen Feldes und des elektrischen Feldes und ihre konsequente Zurückführung auf Nahwirkungen. Beides wurde hier angestrebt. — Zugleich habe ich mehr als Herr Poincaré die Eigenschaften des magnetischen Feldes an das Verhalten der Kraftlinien angeknüpft, was mir deshalb geboten erschien, weil gerade für das magnetische Feld die Ersetzung des Potentialbegriffs durch das geometrische Bild des Kraftlinienverlaufes außerordentlich die Uebersicht und das Verständnis der Erscheinungen gefördert hat.

Zum Zwecke der leichteren Einführung in den Gegenstand habe ich den historischen Weg, auf welchem die Entdeckungen und Schlußfolgerungen gewonnen sind, meist nicht berücksichtigt. Dies mag auch zur Entschuldigung dienen, daß Literatur nur wenig und von dieser fast ausschließlich nur die neuere genannt ist.

Nach Abschluß des Manuskripts ist mir das wertvolle Werk von J. J. Thomson: *Recent researches in Electricity and Magnetism*, Oxford 1893, bekannt geworden. Dieses Buch verfolgt andere Zwecke, als das hier vorliegende, da es als Fortsetzung des Maxwellschen Werkes: *Treatise on Electricity and Magnetism*, geschrieben ist und an vielen Stellen eine tiefere mathematische Durchführung der Probleme gibt, als ich sie hier beabsichtigt habe. Trotzdem haben naturgemäß beide Bücher viele Berührungspunkte und, soviel ich bisher gesehen habe, Uebereinstimmungen, die mich sehr freuen können. Ich möchte deshalb nochmals erwähnen, daß meine Darstellung durch das Thomsonsche Werk in keiner Weise beeinflusst ist, und daß ich es deshalb auch nur sehr wenig zitiert habe.

Göttingen, im März 1894.

Paul Drude.

## Vorwort zur zweiten Auflage.

---

Bald nach dem tragischen Ende Paul Drudes trat der Herr Verleger mit dem Antrage an mich heran, die zweite Auflage der „Physik des Aethers“ zu bearbeiten. Als Nachfolger Drudes in der ihm besonders sympathischen Gießener Stellung habe ich die Verpflichtung empfunden, diesem Antrage Folge zu leisten, obwohl ich über die Schwierigkeiten dieses Unternehmens keinen Augenblick im unklaren war. Ich bin mir auch durchaus bewußt, diese Schwierigkeiten nicht überwunden zu haben. Sie liegen in der Natur des Buches und in dem Umstande, daß mehr als anderthalb Jahrzehnte seit dem Erscheinen der ersten Auflage verflossen sind. Bei seinem ersten Erscheinen hat das Buch eine Mission gehabt und erfüllt. Es sollte damals die angehenden Physiker in Deutschland mit der Faraday-Maxwellschen Theorie vertraut machen. Es war ganz für diesen Zweck geschrieben, flott und anschaulich, ausschließlich auf das Ziel gerichtet, ohne die Absicht, ein vollständiges Lehrbuch der Theorie der Elektrizität zu sein. Heute nach 17 Jahren ist es nicht mehr die Aufgabe eines solchen Buches, die Faraday-Maxwellsche Lehre als den neuen Standpunkt gegenüber den alten Anschauungen durchzusetzen. Diese Lehre hat seit jener Zeit eine ganze Reihe von Darstellungen erfahren — von deutschen Büchern mögen vor allem die vortrefflichen Werke von Cohn und von Abraham-Föppl genannt sein — so daß die Herausgabe einer neuen Auflage des Drudeschen Buches von diesem Gesichtspunkte aus wohl als überflüssig erscheinen könnte. Aber das Drudesche Buch ist in seiner Darstellung besonders für den Studenten geeignet gewesen und ist von den Anfängern besonders gern als Einführung in die Elektrizitätslehre benutzt worden. In dieser Form das Buch zu erhalten und weiterzuführen, war ein berechtigter Wunsch. Aber ich bin von vornherein mit dem Herrn Verleger darüber einig gewesen, daß sich dieser Wunsch nicht durch einen einfachen Wiederabdruck des alten Textes unter Zufügung von Ergänzungen ausführen ließ, sondern nur durch eine vollständige Bearbeitung, die zum Teil zu einer Umarbeitung werden mußte. Maßgebend für die Neugestaltung des Buches waren die folgenden Gesichtspunkte:

Die Maxwellsche Theorie ist heute als gesicherter Besitz anzusehen. Es erschien deswegen statthaft, diejenigen Ausführungen, die sich ausführlicher mit der Abwägung der älteren Theorien gegen die Maxwellsche beschäftigen, vor allem den ganzen § 8 des VIII. Kapitels, fortzulassen, da sie wesentlich nur noch historisches Interesse besitzen.

Ferner konnten alle Abschnitte des Buches fortbleiben, die rein optische Fragen zum Gegenstande haben, da Drude selbst diese inzwischen in seinem Lehrbuche der Optik eingehend behandelt hat. Die Darstellung der letzten Kapitel der ersten Auflage wurde daher nur insoweit und nur in der Form übernommen, wie sie für die Probleme elektrischer Wellen in Betracht kam.

Im übrigen wurde der Umfang der Darstellung, wie ihn die erste Auflage besaß, beibehalten. Eine Weiterführung auf die Probleme der Elektronenlehre wurde ausgeschlossen, weil dadurch etwas ganz Neues in das Buch hineingetragen worden wäre, und weil der zweckmäßig zu bemessende Umfang des Buches eine solche Erweiterung nur auf Kosten des alten Textes zugelassen hätte. Das Buch ist infolgedessen allerdings kein vollständiges Lehrbuch der modernen Elektrizitätslehre geworden. Aber die Beschränkung schien mir um so unbedenklicher zu sein, als schließlich doch die Maxwellsche Theorie immer die Grundlage für den Bau der Elektronenlehre abgeben muß und ihre Kenntnis für den Anfänger die Voraussetzung seines Eindringens in die neueste Elektrizitätslehre ist. Auch das Abraham-Föppl'sche Buch beschränkt sich ja in seinem ersten Bande in der gleichen Weise. Dem würde also die Physik des Aethers auch fernerhin entsprechen.

Der Wunsch aber, das Buch so zu gestalten, daß es eine richtige Grundlage für den weiteren Ausbau der Elektrizitätslehre im Sinne der Elektronentheorie abgäbe, führte in einem Punkte zu einer wesentlichen Umgestaltung des Inhaltes, insofern als es geboten erschien, die Elektrostatik in der Darstellung an die erste Stelle zu setzen. Drude hatte unter dem Einfluß der Ausbildung, welche die Lehre von den magnetischen Kraftlinien gerade vor 20 Jahren erfahren hatte, sein Werk mit dem Magnetismus begonnen und die Elektrostatik nur kurz, man kann wohl sagen, etwas stiefmütterlich behandelt. Ich habe nachträglich zu meiner großen Befriedigung erfahren, daß auch Drude mit dem Gedanken umgegangen ist, bei einer Neubearbeitung der Physik des Aethers die Elektrostatik voranzustellen. Ich darf also wohl annehmen, daß ich mit dieser Umgestaltung in seinem Sinne gehandelt habe. Die Frage hatte deswegen ihr Bedenkliches, weil diese Umstellung eine vollständige Neubearbeitung nicht bloß der Elektrostatik, sondern auch des Magnetismus zur Folge hatte. Erst mit dem Elektromagnetismus fand die neue Auflage den engeren Anschluß an den alten Text.

Hiervon abgesehen, bin ich bemüht gewesen, den alten Text so vollständig wie irgend möglich beizubehalten. Er wurde daneben vielfach ergänzt, um eine gewisse Vollständigkeit des Inhalts innerhalb der gesteckten Grenzen zu erreichen. Im besonderen habe ich mich bemüht, aus den späteren Arbeiten Drudes über elektrische Schwingungen und Wellen so viel wie möglich in das Buch aufzunehmen und in seinen Inhalt zu verarbeiten. Die zahlreichen Angaben der ersten Auflage über experimentelle Arbeiten wurden bis auf die neueste Zeit weitergeführt. Doch sei ausdrücklich bemerkt, daß das Buch in diesen Literaturnachweisen keinen Anspruch auf Vollständigkeit erheben will.

Auch die alte Form der mathematischen Darstellung wurde beibehalten und nicht durch die vektoranalytische ersetzt. Aber die Symbole wurden zum größten Teil verändert, indem für jede Größe nur ein Zeichen benutzt und die Komponenten eines Vektors stets durch Suffixe unterschieden wurden. Diese moderne Formelsprache ist so außerordentlich viel übersichtlicher, daß ich mich nicht entschließen konnte, die Bezeichnungsweise der ersten Auflage beizubehalten.

Ich kann das Buch seiner Bestimmung nicht übergeben, ohne meinen wärmsten Dank Herrn Dr. phil. W. v. Ignatowsky, Privatdozenten an der Technischen Hochschule in Charlottenburg, auszusprechen für die wertvolle Unterstützung, die er mir durch vielfältige Ratschläge bei der Bearbeitung des Werkes und durch sorgfältiges Lesen der Korrekturen hat zuteil werden lassen.

Möge die neue Auflage dazu dienen, die Arbeit, die Drude vor 18 Jahren in dieses Werk gesteckt hat, einer weiteren Generation von Physikern fruchtbringend zu erhalten.

Gießen, den 6. Juni 1912.

Der Herausgeber.

# Inhalt.

	Seite
Einleitung . . . . .	1

## Kapitel I. Elektrostatik.

1. Die beiden Arten des elektrischen Zustandes . . . . .	6
2. Uebertragung des Zustandes. Leiter und Nichtleiter . . . . .	7
3. Der Begriff der Elektrizitätsmenge . . . . .	8
4. Die ponderomotorischen Wirkungen . . . . .	11
5. Das elektrische Feld . . . . .	11
6. Die elektrische Kraft . . . . .	13
7. Kraftlinien . . . . .	14
8. Das Potential der elektrischen Kraft . . . . .	17
9. Das erste Differentialgesetz des elektrischen Feldes . . . . .	19
10. Der Stokessche Satz . . . . .	20
11. Anwendungen auf das elektrische Feld . . . . .	25
12. Die Grenzen des Feldes . . . . .	26
13. Der Kraftfluß . . . . .	26
14. Das zweite Differentialgesetz des elektrischen Feldes . . . . .	29
15. Der Gaußsche Satz . . . . .	30
16. Die Flächendichte . . . . .	33
17. Festsetzung der Einheit der Elektrizitätsmenge . . . . .	34
18. Die Dimension der Elektrizitätsmenge . . . . .	36
19. Zusammenfassung der Gleichungen für das elektrostatische Feld . . . . .	37
20. Der Greensche Satz . . . . .	39
21. Eigenschaften des Potentials. Fall einer punktförmigen Ladung . . . . .	40
22. Eindeutigkeit des Feldes bei gegebener Verteilung der Elektrizität . . . . .	43
23. Die allgemeine Form des Potentials . . . . .	43
24. Eine indirekte Bestätigung des Coulombschen Gesetzes . . . . .	47
25. Die Kapazität eines Konduktors. Fall einer Kugel . . . . .	49
26. Influenz. Kondensatoren . . . . .	51
27. Die ponderomotorischen Kräfte . . . . .	55
28. Leitende Kugel in homogenem Feld . . . . .	57
29. Potential eines elektrischen Dipols . . . . .	60
30. Die Abhängigkeit der elektrischen Kraft von der Natur des umgebenden Mediums . . . . .	61
31. Folgerungen aus dem dielektrischen Verhalten der Körper . . . . .	63
32. Die Bedingungen an der Grenzfläche von Isolatoren . . . . .	68
33. Hohlräume in festen Isolatoren . . . . .	70
34. Das Brechungsgesetz der Kraftlinien . . . . .	71
35. Die allgemeine Form des Potentials in dielektrischen Mitteln . . . . .	75
36. Elektrische Doppelschichten. Berührungselektrizität . . . . .	77



	Seite
37. Die scheinbaren Ladungen der Dielektrika . . . . .	80
38. Wahre und freie Elektrizität. Polarisation der Dielektrika . . . . .	83
39. Dielektrische Kugel in homogenem Felde . . . . .	87
40. Energie des elektrostatischen Feldes . . . . .	93
41. Der Energiewert eines nicht statischen elektrischen Feldes. Satz von Thomson . . . . .	98
42. Die potentielle Energie und die ponderomotorischen Kräfte . . . . .	101
43. Scheinbarer Druck und Zug im elektrischen Felde . . . . .	108
44. Die Einstellungen dielektrischer Körper im elektrischen Felde . . . . .	113
45. Volumkräfte . . . . .	118
46. Experimentelle Ermittlung der Dielektrizitätskonstanten . . . . .	120
47. Elektrostriktion . . . . .	121
48. Umkehrbare Temperaturänderungen durch Elektrisierung . . . . .	130
49. Dielektrische Hysteresis . . . . .	133

## Kapitel II.

**Magnetismus.**

1. Der magnetische Zustand . . . . .	135
2. Das magnetische Feld . . . . .	137
3. Die Polstärke . . . . .	138
4. Die magnetische Kraft . . . . .	140
5. Die Summe der Polstärken eines Magneten ist Null . . . . .	141
6. Das magnetische Moment eines Magneten . . . . .	142
7. Magnetische Kraftlinien . . . . .	143
8. Potential und erstes Differentialgesetz der magnetischen Kraft . . . . .	144
9. Kraftfluß und zweites Differentialgesetz der magnetischen Kraft . . . . .	145
10. Festsetzung der Einheit der Polstärke . . . . .	146
11. Darstellung der Eigenschaften eines Magnetfeldes durch Richtung und Zahl der Kraftlinien . . . . .	148
12. Die Grenzen des Feldes . . . . .	148
13. Molekulartheorie der permanenten Magnete . . . . .	150
14. Magnetisches Moment und Pole eines permanenten Magneten . . . . .	153
15. Ausführung absoluter magnetischer Messungen . . . . .	158
16. Das magnetische Verhalten der Materie . . . . .	161
17. Paramagnetische, diamagnetische und ferromagnetische Körper . . . . .	163
18. Unterscheidung von magnetischer Kraft und magnetischer Erregung . . . . .	166
19. Die Grenzbedingungen . . . . .	167
20. Das Brechungsgesetz der magnetischen Kraftlinien . . . . .	168
21. Der induzierte Magnetismus . . . . .	170
22. Kraftfluß und Induktionsfluß . . . . .	174
23. Die entmagnetisierende Wirkung der induzierten Belegung . . . . .	175
24. Kugel und Ellipsoid im homogenen Magnetfelde . . . . .	177
25. Energie des magnetischen Feldes . . . . .	179
26. Energie einer Kraftöhre. Magnetischer Widerstand . . . . .	181
27. Die potentielle Energie und die ponderomotorischen Kräfte . . . . .	186
28. Niveaugestalten von Flüssigkeiten in ungleichförmigen Magnetfeldern . . . . .	188
29. Die Methoden zur Bestimmung der Magnetisierungskonstanten . . . . .	189
30. Magnetisierungskurven ferromagnetischer Stoffe . . . . .	197
31. Die Integral- und die Differentialdefinition der Permeabilität . . . . .	199
32. Die magnetische Energie bei ferromagnetischen Körpern . . . . .	201

33. Hysteresis . . . . .	Seite 203
34. Erwärmung durch Hysteresis . . . . .	204
35. Remanenz und Koerzitivkraft . . . . .	206
36. Permanente Magnete . . . . .	207
37. Magnetostriktion . . . . .	210
38. Umkehrbare Temperaturänderung durch Magnetisierung . . . . .	215

## Kapitel III.

**Elektromagnetismus.**

1. Das magnetische Feld des elektrischen Stromes . . . . .	217
2. Charakteristische Eigenschaft dieses Feldes . . . . .	218
3. Die Wirbelräume des Magnetfeldes . . . . .	219
4. Die Stromstärke in elektromagnetischem Maße . . . . .	222
5. Das magnetische Feld eines geschlossenen linearen Stromes ist gleich dem einer magnetischen Doppelfläche . . . . .	224
6. Das Potential einer magnetischen Doppelfläche . . . . .	226
7. Das Potential eines geschlossenen linearen Stromes . . . . .	228
8. Unabhängigkeit der magnetischen Kraft eines Stromes von der Natur des umgebenden Mediums . . . . .	229
9. Die Maxwell'schen Gleichungen für die magnetische Kraft im Inneren eines stromführenden Systems . . . . .	230
10. Die positive Richtung des Stromes. — Die Ampèresche Regel . . . . .	233
11. Es gibt nur geschlossene Ströme . . . . .	234
12. Darstellung der magnetischen Kraft durch Integrale über die Strombahn. Vektorpotential . . . . .	236
13. Die magnetischen Kraftlinien eines Stromes . . . . .	241
14. Die Ströme sollen in parallelen, kreiszylinderförmigen, langen Drähten fließen . . . . .	243
15. Der allgemeinere Fall. Fortsetzung von Abschnitt 13 . . . . .	252
16. Das Biot-Savartsche Gesetz . . . . .	254
17. Magnetische Wirkung eines Kreisstromes. Tangentenbussole . . . . .	255
18. Die magnetische Feldstärke im Inneren eines Solenoids . . . . .	257
19. Die magnetometrische Methode zur experimentellen Bestimmung der Magnetisierungskonstanten . . . . .	261
20. Ampères Theorie des induzierten und permanenten Magnetismus . . . . .	263
21. Die magnetische Energie eines linearen Stromes . . . . .	264
22. Die magnetische Energie beliebig vieler linearer Ströme . . . . .	269
23. Die magnetische Energie im allgemeinsten Falle . . . . .	270
24. Die magnetische Energie einer Induktionsröhre . . . . .	274
25. Die Abhängigkeit der magnetischen Energie des Feldes von seinem magnetischen Widerstande . . . . .	276
26. Scheinbare Druck- und Zugkräfte im magnetischen Felde . . . . .	278
27. Tragkraft der Elektromagnete . . . . .	278
28. Die ponderomotorischen Wirkungen eines Magnetfeldes auf einen Stromkreis . . . . .	281
29. Ponderomotorische Wirkungen eines Magnetfeldes auf ein Stromelement . . . . .	284
30. Beziehungen zum Biot-Savartschen Gesetz . . . . .	286
31. Dauernde Rotationen von Magneten um Stromteile oder von Stromteilen um Magnete . . . . .	287
32. Die Unabhängigkeit der Wechselwirkung zwischen Strömen und Magneten von der Natur des umgebenden Mediums . . . . .	290
33. Die wechselseitige Energie von Strömen und Magneten ist Null . . . . .	291

## Kapitel IV.

## Elektrodynamik.

1. Ponderomotorische Wirkungen in einem magnetischen Felde, welches nur einen zusammenhängenden Wirbelraum besitzt . . . . .	295
2. Ponderomotorische Wirkungen in einem magnetischen Felde, welches mehrere getrennte Wirbelräume besitzt . . . . .	297
3. Die F. Neumannsche Formel für das elektrodynamische Potential . . . . .	300
4. Die Abhängigkeit der elektrodynamischen Wirkung von der Magnetisierungs-konstante der Umgebung . . . . .	303
5. Allgemeine Betrachtungen über die Energieänderungen bei Bewegung von Strömen oder Magneten gegeneinander . . . . .	306
6. Rekapitulation der Formeln für die magnetische Energie . . . . .	307

## Kapitel V.

## Elektroinduktion im Magnetfeld.

1. Anwendung des Prinzips der Erhaltung der Energie auf die pondero-motorischen Wirkungen eines Magnetfeldes . . . . .	310
2. Definition der elektromotorischen Kraft der Induktion . . . . .	312
3. Betrachtung beliebig kleiner Zustandsänderungen . . . . .	313
4. Die Erfahrungstatsachen . . . . .	313
5. Die induzierte elektromotorische Kraft bei zwei linearen Strömen . . . . .	315
6. Allgemeine Folgerungen aus den Induktionsgesetzen zweier linearer Ströme . . . . .	318
7. Ballistische Methode zur Ermittlung der Magnetisierungskonstanten und der Stärke eines Magnetfeldes . . . . .	321
8. Wirbelströme . . . . .	323
9. Webers Theorie des Diamagnetismus . . . . .	325
10. Berechnung der Selbstinduktionskoeffizienten einiger Stromsysteme . . . . .	328
11. Bemerkungen über gegenseitige Induktionskoeffizienten . . . . .	338
12. Energieverlust durch Hysteresis . . . . .	340
13. Das Nahewirkungsgesetz der elektromotorischen Kraft für ruhende Körper . . . . .	342
14. Das Nahewirkungsgesetz der elektromotorischen Kraft für bewegte Körper . . . . .	346

## Kapitel VI.

## Elektrokinematik.

1. Elektromotorische Kräfte . . . . .	351
2. Elektrizitätsmenge und Stromstärke . . . . .	353
3. Stromarbeit . . . . .	355
4. Das Ohmsche Gesetz für lineare Leiter . . . . .	356
5. Einheit des Widerstandes. Wert der spezifischen Leitfähigkeit in abso-lutem Maße . . . . .	360
6. Das Verhältnis des elektrostatischen Maßsystems zum elektromagnetischen . . . . .	362
7. Das Ohmsche Gesetz für körperliche Leiter . . . . .	368
8. Grenzbedingungen. Brechung der Stromlinien an der Grenze zweier ver-schiedener Leiter . . . . .	371
9. Verzweigte lineare Leiter . . . . .	373

10. Die Verteilung eines konstanten Stromes von bestimmter Gesamtstärke in einem körperlichen Leiter ist derartig, daß die entwickelte Joulesche Wärme ein Minimum ist . . . . .	374
11. Zeitlich veränderliche Strömung. Relaxationszeit . . . . .	376
12. Stromkreis mit Selbstinduktion. Zeitkonstante . . . . .	379
13. Wechselströme. Impedanz . . . . .	381
14. Die Verteilung eines schnell veränderlichen Stromes von bestimmter Gesamtstärke ist derartig, daß die magnetische Energie des Systems ein Minimum ist . . . . .	384
15. Verteilung eines Wechselstromes in einem körperlichen Leiter mit Berücksichtigung seines Widerstandes . . . . .	388
16. Transformator . . . . .	394
17. Kapazität im Wechselstromkreis . . . . .	399
18. Das quasistationäre Verhalten in den behandelten Wechselstromproblemen . . . . .	401
19. Messungen in der Brücke mit Gleichstrom und mit Wechselstrom . . . . .	403

## Kapitel VII.

**Das elektromagnetische Feld in Isolatoren.**

1. Elektrische Ströme in Isolatoren . . . . .	406
2. Die Abhängigkeit der Stromkomponenten eines Isolators von der elektrischen Kraft . . . . .	407
3. Versinnbildlichung der Eigenschaften des elektrischen Feldes . . . . .	414
4. Experimenteller Nachweis der magnetischen Wirkung der Verschiebungsströme . . . . .	415
5. Grundgleichungen des elektromagnetischen Feldes ruhender Isolatoren . . . . .	418
6. Erweiterung der Gleichungen auf ein leitendes Medium . . . . .	423
7. Einwirkung geschlossener Solenoide aufeinander . . . . .	425
8. Die Poyntingsche Formel für den Energiefluß im elektromagnetischen Felde . . . . .	426
9. Die Fortpflanzung ebener elektromagnetischer Wellen in einem homogenen Isolator . . . . .	433

## Kapitel VIII.

**Elektrische Schwingungen.**

1. Einleitung . . . . .	440
2. Die oszillatorische Entladung eines Kondensators . . . . .	442
3. Theorie des Thomsonschen Schwingungskreises . . . . .	447
4. Benutzung der oszillatorischen Entladung zur Bestimmung der Dielektrizitätskonstante, der Selbstinduktion und des Widerstandes . . . . .	455
5. Erregung eines Thomsonschen Schwingungskreises durch eine periodische elektromotorische Kraft. — Fall der Resonanz . . . . .	457
6. Erregung durch eine gedämpfte periodische elektromotorische Kraft . . . . .	461
7. Die elektrischen Schwingungen eines Ruhmkorffschen Apparates . . . . .	466
8. Zwei gekoppelte Schwingungskreise . . . . .	472
9. Der Koeffizient der Selbstinduktion des Schließungskreises . . . . .	484
10. Die Stromstärke ist im Querschnitt ungleichförmig verteilt . . . . .	487
11. Weitere Vervollständigung der Theorie . . . . .	491
12. Die Stromstärke variiert im Querschnitt und in der Länge . . . . .	497
13. Die Grenzbedingungen des Problems . . . . .	500
14. Die vollständige Lösung des Problems . . . . .	502
15. Das Problem der Drahtwellen unter Berücksichtigung des Widerstandes . . . . .	508

## Kapitel IX.

## Elektrische Wellen.

	Seite
1. Elektrische Schwingungen in kurzen, ungeschlossenen Leitern . . . . .	517
2. Berechnung der Periode des Hertz'schen Erregers . . . . .	520
3. Resonanzerscheinungen bei elektrischen Schwingungen . . . . .	526
4. Nebenbedingungen für die Wirksamkeit der Primärfunken . . . . .	529
5. Untersuchung der elektrischen Kraft mit Hilfe des Resonators . . . . .	531
6. Verhalten des Resonators bei beliebiger Lage . . . . .	533
7. Die elektrische und die magnetische Kraft um eine geradlinige Schwingung nach der Maxwell'schen Theorie . . . . .	534
8. Strahlung der Energie . . . . .	542
9. Die Verteilung der Kraft in der näheren Umgebung des Erregers. Graphische Darstellungen . . . . .	546
10. Stehende elektromagnetische Wellen . . . . .	554
11. Multiple Resonanz . . . . .	561
12. Strahlen elektrischer Kraft . . . . .	565
13. Demonstrationsmittel für die Schwingungen im Sekundärleiter . . . . .	570
14. Weitere Ausgestaltung der Hertz'schen Versuche . . . . .	571
15. Interferenzen von elektrischen Wellen, welche dieselbe Fortpflanzungsrichtung besitzen . . . . .	575
16. Die Fortpflanzung der elektrischen Kraft längs gerader Drähte . . . . .	578
17. Verteilung der elektrischen und magnetischen Kraft um einen geradlinigen Draht nach der Maxwell'schen Theorie . . . . .	583
18. Resonanzerscheinungen bei Drahtwellen . . . . .	590
19. Messung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Drahtwellen . . . . .	592
20. Die Kapazität eines Plattenkondensators für elektrische Schwingungen . . . . .	595
21. Der Einfluß der Brücke . . . . .	597
22. Untersuchung der Drahtwellen mit Hilfe von Resonatoren . . . . .	603
23. Untersuchung von Drahtwellen mit Hilfe ponderomotorischer Wirkungen . . . . .	607
24. Messung der Dämpfung der elektrischen Wellen . . . . .	609
25. Messung der Dielektrizitätskonstante in Flüssigkeiten und festen Körpern mit Hilfe von Drahtwellen . . . . .	613
26. Reflexion und Brechung elektrischer Wellen an der Grenze eines isotropen Dielektrikums . . . . .	623
27. Messung von Dielektrizitätskonstanten mit Hilfe freier elektrischer Wellen . . . . .	632
28. Leitende Medien. Absorption der fortschreitenden Wellen . . . . .	635
29. Reflexion und Brechung an leitenden Medien . . . . .	639
30. Senkrechte Inzidenz der einfallenden Wellen . . . . .	643
31. Beziehung zwischen Absorption und Leitfähigkeit in Halbleitern . . . . .	644
32. Messung der Absorption in Halbleitern . . . . .	648
33. Normale und anomale Absorption und Dispersion . . . . .	649
34. Beziehung zwischen Absorption und Leitfähigkeit in Metallen . . . . .	652
35. Reflexion elektrischer Wellen an Metallen bei schiefer Inzidenz . . . . .	655
36. Reflexion ebener elektrischer Wellen an einer sehr dünnen Metallschicht . . . . .	657
Namenregister . . . . .	663
Sachregister . . . . .	666

## Schlüssel der Bezeichnungen.

Ponderomotorische Kraft . . . . .	$\mathfrak{F}$
Elektrizitätsmenge . . . . .	$e$
Raumdicke der Elektrizität . . . . .	$\rho$
Flächendichte der Elektrizität . . . . .	$\eta$
Elektrische Kraft . . . . .	$\mathfrak{E}$
Elektrische Erregung . . . . .	$\mathfrak{D}$
Elektrische Polarisation . . . . .	$\mathfrak{P}$
Elektrisches Potential . . . . .	$V$
Elektrische Energie . . . . .	$W$
Dielektrizitätskonstante . . . . .	$\epsilon$
Dielektrischer Widerstand . . . . .	$\omega$
Magnetische Polstärke . . . . .	$m$
Raumdicke des Magnetismus . . . . .	$\rho_m$
Flächendichte des Magnetismus . . . . .	$\eta_m$
Magnetische Kraft . . . . .	$\mathfrak{S}$
Magnetische Induktion . . . . .	$\mathfrak{B}$
Magnetische Polarisation . . . . .	$\mathfrak{S}$
Magnetisches Potential . . . . .	$\varphi$
Magnetisches Moment eines Magneten . . . . .	$\mathfrak{M}$
Zahl der Induktionslinien . . . . .	$N$
Magnetische Energie . . . . .	$T$
Permeabilität . . . . .	$\mu$
Suszeptibilität . . . . .	$\kappa$
Magnetischer Widerstand . . . . .	$\omega_m$
Stromstärke . . . . .	$i$
Stromdichtigkeit . . . . .	$j$
Vektorpotential . . . . .	$\mathfrak{A}$
Elektromotorische Kraft . . . . .	$E$
Magnetomotorische Kraft . . . . .	$A$
Energiefluß, Strahlungsvektor . . . . .	$\mathfrak{S}$
Kapazität . . . . .	$C$
Induktionskoeffizient . . . . .	$L$
Koppelungsfaktor . . . . .	$k$
Galvanischer Widerstand . . . . .	$w$
Spezifische Leitfähigkeit . . . . .	$\sigma$
Lichtgeschwindigkeit . . . . .	$c$
Schwingungsdauer . . . . .	$T$
Zyklische Schwingungsdauer . . . . .	$\tau = \frac{T}{2\pi}$
Zyklische Schwingungszahl . . . . .	$\nu = \frac{1}{\tau}$

Wellenlänge . . . . .	$\lambda$
Dämpfungskonstante . . . . .	$\delta$
Natürliches logarithmisches Dekrement . . . . .	$\gamma$
Brechungsexponent . . . . .	$n$
Absorptionskoeffizient . . . . .	$k$

Die Komponenten eines Vektors sind durch Suffixe bezeichnet,  
z. B. die Komponenten der elektrischen Kraft:  $\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y, \mathcal{E}_z$ , der  
magnetischen Kraft:  $\mathcal{H}_x, \mathcal{H}_y, \mathcal{H}_z$  usw.

Längenelement . . . . .	$dl$
Flächenelement . . . . .	$ds$ , gelegentlich auch $dS$
Raumelement . . . . .	$dv$
Zeitelement . . . . .	$dt$

## Druckfehlerberichtigung.

S. 124, Zeile 3 von unten lies: E. Duter statt E. Decker.

„ 124, „ 19 von unten lies: E. Duter statt E. Decker.

„ 651, „ 2 von unten lies: Millikan statt Millikau.

# Einleitung.

Als Paul Drude die Vorlesungen, die er 1892 und 1893 über die Maxwellsche Theorie in Göttingen gehalten hatte, in Form eines Buches erscheinen ließ, gab er diesem Buche den Titel „Physik des Aethers“. Vielleicht entsprach der Inhalt des Buches für manchen Leser nicht ganz den Vorstellungen, die dieser Titel erwecken konnte; dafür war das Buch ein erster Versuch. Aber der Titel stellte auf alle Fälle kurz und scharf den Standpunkt fest, von dem aus im Gegensatze zu den älteren Darstellungen der Gegenstand des Buches behandelt werden sollte: die Gesamtheit der elektrischen Erscheinungen, aufgefaßt als Vorgänge, die sich im Aether abspielen oder durch den Aether vermittelt werden, die Elektrizitätslehre also die Wissenschaft von den Eigenschaften des Aethers und die Optik, die bis dahin die ausschließliche Domäne des Lichtäthers gewesen war, ein Spezialkapitel dieser Wissenschaft, ebenso wie die Akustik ein Spezialkapitel der Mechanik ist. Es war der Faraday-Maxwellsche Standpunkt, der Ende der achtziger Jahre des vorigen Jahrhunderts durch die Entdeckungen von Heinrich Hertz auch in Deutschland zu allgemeiner Anerkennung gelangt war.

Der systematischen Darstellung dieses Standpunktes, die den Inhalt des Drudeschen Buches bildet, dürfte es sich empfehlen, einige Bemerkungen über die Gründe vorzuschicken, die zu dieser modernen Auffassung geführt haben. Die Grundlage der alten Elektrizitätslehre bildeten die bekannten Coulombschen Gesetze, die Elementargesetze von Biot-Savart, von Ampère. Diese Gesetze drücken die Kräfte aus, die ein Element — Magnetpol oder kleiner elektrisch geladener Körper oder Stromelement — durch die Gegenwart eines zweiten Elementes in gewisser Entfernung erfährt, und stellen diese Kräfte dar als Funktionen einerseits der Bestimmungsstücke jener Elemente — Polstärke, Elektrizitätsmenge, Stromstärke, bei den Stromelementen außerdem Winkel der Stromelemente mit den verbindenden Graden — und anderseits der Entfernung. Diese Formeln machen die Gebiete des Magnetismus, der Elektrostatik, des Elektromagnetismus und der Elektrodynamik und wenn man noch das Induktionsgesetz, etwa in der Neumannschen Form hinzunimmt, auch das Gebiet der Induktion der mathematischen Berechnung zugänglich. Da bei dieser Formulierung der Tatsachen die Kräfte als Funktionen der Entfernung ausgedrückt



waren, hat man diese Form der elektrischen Theorien die Theorie der Fernkräfte genannt. Man kann vielleicht sagen, daß diese Bezeichnung mehr in diese Formeln hineinlegt, als von vornherein darin zu liegen braucht. Denn zunächst sind diese Formeln doch nur eine mathematische Abstraktion aus den Tatsachen; sie bestimmen die bewirkenden Kräfte, die an zwei gegebenen, in bestimmter Entfernung voneinander befindlichen Elementen angreifen. Die Frage nach dem physikalischen Zustandekommen dieser Wirkungen wird dabei überhaupt nicht aufgeworfen. Ging man über die Beschreibung der Tatsache hinaus und betrachtete jene Kraftwirkungen im Sinne der Bezeichnung „Fernkräfte“ als jenen Elementen eigentümliche Wechselwirkungen, so war das schließlich kaum mehr eine physikalische, sondern eine philosophische Spekulation.

Der erste, der sich ein Bild von dem physikalischen Vorgange jener Kraftwirkungen zu machen suchte, war Faraday. Er entwickelte die Anschauung, daß jeder elektrisch geladene Körper, jeder Magnet, jeder elektrische Strom in dem ganzen ihn umgebenden Raume eine charakteristische Veränderung hervorruft. Man nennt den so veränderten Raum das Feld des Körpers. Die bewegende Kraft, die ein anderer elektrischer Körper oder Magnetpol oder Stromträger an irgendeiner Stelle dieses Raumes erfährt, soll dann aus der unmittelbaren Wechselwirkung dieses letzteren Körpers mit dem Zustande des Raumes am Orte des Körpers selbst hervorgehen; sie wird also bei dieser Auffassung dargestellt als Funktion einerseits der Bestimmungsstücke des betreffenden, von der Kraft bewegten Elementes und anderseits der Bestimmungsstücke des Feldes am Orte des Elementes. Diese Art der Kraftwirkungen hat Drude in der ersten Auflage dieses Buches im Gegensatze zu den Fernkräften als Nahekräfte bezeichnet und die von Faraday begründete und von Maxwell mathematisch formulierte Auffassung der elektromagnetischen Erscheinungen die Theorie der Nahekräfte genannt. Aber der Begriff „Nahekraft“ ist nicht eindeutig oder mindestens nicht ohne weiteres in dem Sinne verständlich, in dem er hier gemeint ist. Es ist daher zweckmäßiger, die Maxwellsche Theorie als die Theorie der Feldwirkungen zu bezeichnen.

Der spezifisch physikalische Charakter dieser modernen Anschauung beruht aber nicht bloß darin, daß man eine Wirkung, die an irgendeiner Stelle des Raumes stattfindet, als Wirkung einer Zustandsänderung auffaßt, die an dieser Stelle des Raumes besteht; sondern das Wesentliche liegt in der Vorstellung, daß die Zustandsänderung gleichzeitig dem ganzen Raume vorhanden und in gesetzmäßiger Weise durch ihn hindurch verteilt ist. Indem man sich also die Zustandsänderung nicht bloß da, wo man ihre Wirkung wahrnimmt, sondern überall im Raume vorstellt, gibt man der Gesamtheit dieser Zustandsänderungen, die

„Felde“, eine reale physikalische Bedeutung, die ganz unabhängig davon ist, ob sich in dem Felde, das von einem elektrisierten, magnetisierten oder stromdurchflossenen Körper herrührt, noch ein anderer Körper befindet, auf den das Feld wirkt, oder nicht. Der Raum ist nach dieser Anschauung ein physikalisches Kontinuum, in dem sich jede Zustandsänderung, die an einer Stelle durch einen dort befindlichen erregenden Körper erzeugt wird, von Punkt zu Punkt, oder besser von Raumelement zu Raumelement verbreitet. Dabei hat man sich vorzustellen, daß zwischen dem Felde und dem Körper, der es erzeugt, Wechselwirkungen bestehen, dergestalt, daß der Körper ponderomotorischen Kräften unterliegt, die, indem sie ihn von allen Seiten angreifen, sich an ihm das Gleichgewicht halten. Nähert man aber dem einen Körper einen zweiten von gleicher Wirksamkeit, so überlagern sich die beiden Felder; infolgedessen ist jetzt die Verteilung des charakteristischen Zustandes in dem den Körper umgebenden Raume eine andere, ebenso entsprechend die Verteilung der rückwirkenden Kräfte, die das Feld allseitig auf die erregenden Körper ausübt; diese Kräfte halten sich daher nicht mehr das Gleichgewicht, sondern bewegen die Körper in bestimmten Richtungen. Die ponderomotorischen Kräfte, die die Körper aufeinander ausüben, entstehen also nach dieser Feldwirkungstheorie durch Vermittlung von Veränderungen, die in dem zwischen den Körpern liegenden Raume vor sich gehen. Da diese Veränderungen stetig im Raume verteilt sind, so muß ihre Anordnung von einer Gesetzmäßigkeit beherrscht sein, die den Zustand in einem bestimmten Raumelement in ausschließlicher Abhängigkeit von dem Zustand der umgebenden Raumelemente darstellt. Eine solche Gesetzmäßigkeit hat, da sie die Veränderlichkeit der Zustandsgröße für unendlich kleine Ortsveränderungen enthält, die Form einer Differentialgleichung. Der Ausdruck „Nahewirkungen“, den Drüde seinerzeit auf das anwandte, was oben als Prinzip der „Feldwirkungen“ bezeichnet ist, läßt sich mit größerem Rechte auf diese Vorstellung der Ausbreitung des Feldzustandes im Raume durch Uebertragung in einem Kontinuum von Raumelement zu Raumelement anwenden.

Um den Sinn dieser Vorstellung durch ein Beispiel aus einem anderen Gebiete zu verdeutlichen, kann man die elastischen Erscheinungen zum Vergleich heranziehen. Ein Stab werde durch Kräfte, die an seinen Enden angreifen, gedehnt. Jedes Element des Stabes erfährt dabei eine Aenderung seiner Gestalt und seines Volumens. Aber die Veränderungen eines einzelnen Elementes, etwa in der Mitte des Stabes, schreibt man nicht einer unmittelbaren Einwirkung der an den entfernten Enden des Stabes wirkenden Kräfte zu; sondern für jedes Element sind die Aenderungen, die es erfährt, ausschließlich bedingt durch die Drucke, die die umgebende Materie auf die Oberfläche des Elementes ausübt.

Bei diesem Beispiel ist die Materie das Kontinuum, das die mechanische Kraft von Raumelement zu Raumelement fortleitet. Als man eine entsprechende Vorstellung von Uebertragung durch Nahwirkungen an die elektromagnetischen Vorgänge einföhrte, schrieb man die Vermittlung ebenfalls einem den Raum kontinuierlich erfüllenden Medium zu. Aber bei allen magnetischen und elektrischen Erscheinungen, ebenso wie bei der Strahlung des Lichtes und der Wärme, können sog. ponderable Medien nicht die wesentliche Rolle der Vermittlung übernehmen, wenn sie dieselbe eventuell auch beeinflussen können; denn auch im luftleeren Raume, in welchem ponderable Materie fehlt, treten die genannten Erscheinungen auf. Schon Huygens, der Begründer der Wellentheorie des Lichtes, hat als Träger der Lichtwellen ein auch im Vakuum vorhandenes, unwägbares Medium, den Lichtäther, angesehen. Die Faraday-Maxwellsche Theorie sieht diesen Aether auch als den Vermittler der elektrischen und magnetischen Nahwirkungen an und betrachtet die Strahlung des Lichtes und der Wärme als einen elektromagnetischen Vorgang von besonderer Art. Die Lehre von der Elektrizität, dem Magnetismus, dem Licht und der strahlenden Wärme wird also gemeinsam umfaßt durch das Studium der Physik des Aethers.

Geradeso gut, wie man einem besonderen hypothetischen Medium, welches den Raum überall erfüllt, die Vermittlerrolle von Kraftwirkungen zuweist, könnte man ein solches Medium auch entbehren und dem Raum selbst diejenigen physikalischen Eigenschaften beilegen, welche den Aether zugeschrieben werden. Man hat sich bisher vor dieser Anschauung gescheut, weil man unter „Raum“ eine mathematische Abstraktion versteht, die Vorstellung der Dimensionen ohne Verknüpfung mit physikalischen Eigenschaften. Da die Einführung des neuen Begriffes „Aether“ durchaus ohne Belang ist, sofern man nur das Prinzip der Nahkräfte festhält, so soll in dieser Darstellung von der bisher üblichen Bezeichnung d. h. der Einführung des Wortes „Aether“, Gebrauch gemacht werden.

Diese der ersten Auflage (S. 9) entnommenen Darlegungen zeigen die vorsichtige Haltung, die Drude der Einführung des Aetherbegriffes gegenüber einnahm. Er hat auch in der ganzen folgenden Darstellung seines Buches jedes Eingehen auf materialisierende Vorstellungen von der Natur des Aethers, auf mechanische Bilder u. dgl., vermieden. Für ihn ist das Wort Aether nur eine Bezeichnung für den leeren Raum als ein physikalisches Kontinuum, in dem die Nahwirkungsgesetze des elektromagnetischen Feldes gelten, und in diesem Sinne dürfen wir den Gebrauch des Wortes auch in dieser neuen Auflage beibehalten.

Die Frage nach den physikalischen Eigenschaften, die man dem leeren Raume oder dem Aether im obigen Sinne zuzuschreiben hat, wird durch das Studium der elektrischen und magnetischen Erscheinungen beantwortet.

Sie sind schließlich definiert durch die Gesetze der Nahewirkung, die sich im folgenden aus den Eigenschaften der elektrischen und magnetischen Felder und ihrer gegenseitigen Verknüpfung im elektromagnetischen Felde ergeben werden. In bezug auf den oben herangezogenen Vergleich mit den elastischen Erscheinungen möge aber ausdrücklich bemerkt werden, daß dieser Vergleich nur zur Verdeutlichung des Begriffs „Nahewirkung“ dienen sollte. Er soll keineswegs besagen, daß die im Aether bestehenden Nahewirkungen den elastischen Nahekräften der Materie wesensgleich oder auch nur ähnlich seien; im Gegenteil, man kann tiefgehende Unterschiede zwischen beiden Arten von Nahekräften bei näherer Untersuchung auffinden.

Solange es sich um Erscheinungen handelt, die mit der Zeit unveränderlich sind, führen die Berechnungen auf Grund der Nahewirkungsgesetze naturgemäß zu den gleichen Resultaten, wie sie in den Fernkraftgesetzen ausgesprochen sind; denn beide sind ja nur verschiedene Formulierungen der gleichen Tatsachen. Die Nahewirkungsgesetze haben, wie oben bereits erwähnt, die Form von Differentialgleichungen; die Fernwirkungsgesetze geben die Integrale dieser Differentialgleichungen in bestimmten, bei der Beobachtung vorliegenden Fällen. Hier beruht also der Vorzug der modernen Theorie nur in dem Charakter der physikalischen Anschaulichkeit, wie er den Nahewirkungsvorstellungen zukommt, im Gegensatz zu dem mathematisch-formalen Charakter der Fernwirkungsgesetze. Die vollständige Ueberlegenheit der modernen Theorie über die alte tritt aber sofort hervor, sobald man von statischen Erscheinungen zu den zeitlich veränderlichen übergeht. Denn die Erfahrung hat unwiderleglich bewiesen, daß elektromagnetische Störungen sich mit endlicher Geschwindigkeit ausbreiten. Für die Ableitung dieser Tatsache gewährt die Fernwirkungstheorie überhaupt keine Handhabe. Die Feldwirkungstheorie dagegen umfaßt ohne weiteres in physikalisch verständlicher Form auch dieses Gebiet der Erscheinungen und trägt der erwähnten, grundlegenden Tatsache in einfachster Weise dadurch Rechnung, daß die Differentialgleichungen, die die Gesetze der Nahewirkung ausdrücken, in den allgemeinsten Fällen nicht bloß Differentialquotienten nach dem Orte, sondern auch solche nach der Zeit enthalten.

Diese Bemerkungen beleuchten noch einmal das Verhältnis der Nahewirkungen zu den Fernwirkungen. Da die letzteren als Integrale der ersteren für gewisse Fälle angesehen werden können, so muß es in vielen Fällen vorteilhaft erscheinen, die weitere Rechnung direkt an das Gesetz der scheinbaren Fernkräfte anzuknüpfen, ohne auf das Nahewirkungsgesetz, die Differentialgleichung, zurückzugehen. Nur in dieser Weise soll im folgenden bei der Berechnung spezieller Fälle die gelegentliche Benutzung von Fernkraftgesetzen verstanden werden.

Bei diesem Beispiel ist die Materie das Kontinuum, die mechanische Kraft von Raumelement zu Raumelement fortleitet. Die entsprechende Vorstellung von Uebertragung durch Nahwirkung für die elektromagnetischen Vorgänge einführt, schrieb Faraday die Vermittlung ebenfalls einem den Raum kontinuierlich erfüllenden Aether zu. Aber bei allen magnetischen und elektrischen Erscheinungen, wie bei der Strahlung des Lichtes und der Wärme, können ponderable Medien nicht die wesentliche Rolle der Vermittlung spielen, wenn sie dieselbe eventuell auch beeinflussen können; denn in den leeren Räumen, in welchem ponderable Materie fehlt, treten diese Erscheinungen auf. Schon Huygens, der Begründer der Wellentheorie des Lichtes, hat als Träger der Lichtwellen ein auch im leeren Raume vorhandenes, unwägbares Medium, den Lichtäther, angenommen. Die Faraday-Maxwellsche Theorie sieht diesen Aether als Vermittler der elektrischen und magnetischen Nahwirkungen an. Sie betrachtet die Strahlung des Lichtes und der Wärme als elektromagnetischen Vorgang von besonderer Art. Die Lehre von der Einheit der Elektrizität, dem Magnetismus, dem Licht und der strahlenden Wärme wird also gemeinsam umfaßt durch das Studium der Physik der Strahlung.

Geradeso gut, wie man einem besonderen hypothetischen Medium, welches den Raum überall erfüllt, die Vermittlerrolle von Kraft zuweiset, könnte man ein solches Medium auch entbehren und selbst diejenigen physikalischen Eigenschaften beilegen, die dem Aether zugeschrieben werden. Man hat sich bisher vor dieser Möglichkeit gescheut, weil man unter „Raum“ eine mathematische Abstraktion versteht, die Vorstellung der Dimensionen ohne Verknüpfung mit physikalischen Eigenschaften. Da die Einführung des neuen Begriffes durchaus ohne Belang ist, wofern man nur das Prinzip der Einheit festhält, so soll in dieser Darstellung von der bisher üblichen Bezeichnung d. h. der Einführung des Wortes „Aether“, Gebrauch gemacht werden.

Diese der ersten Auflage (S. 9) entnommenen Darlegungen zeigen die vorsichtige Haltung, die Drude der Einführung des Aetherbegriffes gegenüber einnahm. Er hat auch in der ganzen folgenden Darstellung seines Buches jedes Eingehen auf materialisierende Vorstellungen vermieden. Die Natur des Aethers, auf mechanische Bilder u. dgl., vermieden. Nur ist das Wort Aether nur eine Bezeichnung für den leeren Raum, ein physikalisches Kontinuum, in dem die Nahwirkungsgesetze der elektrischen und magnetischen Feldes gelten, und in diesem Sinne dürfen wir den Gebrauch des Wortes auch in dieser neuen Auflage beibehalten.

Die Frage nach den physikalischen Eigenschaften, die man dem leeren Raume oder dem Aether im obigen Sinne zuschreiben hat, wird im 1. St. um der elektrischen und magnetischen Erscheinungen willen

Sie sind schließlich definiert durch die Gesetze der Nahewirkung, die sich im folgenden aus den Eigenschaften der elektrischen und magnetischen Felder und ihrer gegenseitigen Verknüpfung im elektromagnetischen Felde ergeben werden. In bezug auf den oben herangezogenen Vergleich mit den elastischen Erscheinungen möge aber ausdrücklich bemerkt werden, daß dieser Vergleich nur zur Verdeutlichung des Begriffs „Nahewirkung“ dienen sollte. Er soll keineswegs besagen, daß die im Aether bestehenden Nahewirkungen den elastischen Nahekräften der Materie wesensgleich oder auch nur ähnlich seien; im Gegenteil, man kann tiefgehende Unterschiede zwischen beiden Arten von Nahekräften bei näherer Untersuchung auffinden.

Solange es sich um Erscheinungen handelt, die mit der Zeit unveränderlich sind, führen die Berechnungen auf Grund der Nahewirkungsgesetze naturgemäß zu den gleichen Resultaten, wie sie in den Fernkraftgesetzen ausgesprochen sind; denn beide sind ja nur verschiedene Formulierungen der gleichen Tatsachen. Die Nahewirkungsgesetze haben, wie oben bereits erwähnt, die Form von Differentialgleichungen; die Fernwirkungsgesetze geben die Integrale dieser Differentialgleichungen in bestimmten, bei der Beobachtung vorliegenden Fällen. Hier beruht also der Vorzug der modernen Theorie nur in dem Charakter der physikalischen Anschaulichkeit, wie er den Nahewirkungsvorstellungen zukommt, im Gegensatz zu dem mathematisch-formalen Charakter der Fernwirkungsgesetze. Die vollständige Ueberlegenheit der modernen Theorie über die alte tritt aber sofort hervor, sobald man von statischen Erscheinungen zu den zeitlich veränderlichen übergeht. Denn die Erfahrung hat unwiderleglich bewiesen, daß elektromagnetische Störungen sich mit endlicher Geschwindigkeit ausbreiten. Für die Ableitung dieser Tatsache gewährt die Fernwirkungstheorie überhaupt keine Handhabe. Die Feldwirkungstheorie dagegen umfaßt ohne weiteres in physikalisch verständlicher Form auch dieses Gebiet der Erscheinungen und trägt der erwähnten, grundlegenden Tatsache in einfachster Weise dadurch Rechnung, daß die Differentialgleichungen, die die Gesetze der Nahewirkung ausdrücken, in den allgemeinsten Fällen nicht bloß Differentialquotienten nach dem Orte, sondern auch solche nach der Zeit enthalten.

Diese Bemerkungen beleuchten noch einmal das Verhältnis der Nahewirkungen zu den Fernwirkungen. Da die letzteren als Integrale der ersteren für gewisse Fälle angesehen werden können, so muß es in vielen Fällen vorteilhaft erscheinen, die weitere Rechnung direkt an das Gesetz der scheinbaren Fernkräfte anzuknüpfen, ohne auf das Nahewirkungsgesetz, die Differentialgleichung, zurückzugehen. Nur in dieser Weise soll im folgenden bei der Berechnung spezieller Fälle die ge-

## Kapitel I.

# Elektrostatik.

### 1. Die beiden Arten des elektrischen Zustandes

Wenn man gewisse Körper aneinander reibt, z. B. Glas oder Ebonit mit Flanell, so kommen sie in einen eigenartigen Zustand, der dadurch charakterisiert ist, daß die Körper in die ponderomotorischen Wirkungen, bewegende Kräfte, aufeinander ausüben. Diesen Zustand nennt man den elektrischen Zustand und die sich in diesem Zustande befinden, nennt man elektrisch. In der Folge werden die ponderomotorischen Wirkungen, die alle Körper in Form der Massenanziehung aufeinander ausüben, unterscheiden sich die elektrischen Zustände zunächst dadurch, daß sie willkürlich hervorgebracht werden können; dann dadurch, daß sie nicht bloß Anziehungen, sondern auch Abstoßungen hervorzubringen vermögen. Glas und Seide miteinander gerieben, ziehen sie sich an. Zwei mit Seide geriebene Glasplatten stoßen sich ab. Demnach unterscheidet man auch zwei elektrische Zustände von ganz verschiedenem Charakter. Körper in elektrischen Zuständen, die sich anziehen, stoßen sich ab. Körper in elektrischen Zuständen, die sich abstoßen, ziehen sich an. Man pflegt abstoßende Kräfte durch positive, anziehende durch ein negatives Vorzeichen zu kennzeichnen. Diese Bezeichnungsweise hat man auf die beiden elektrischen Zustände übertragen und unterscheidet sie als positiven und negativen Zustand. Die besondere Berechtigung zu dieser Art der Bezeichnung liegt in dem Umstande, daß beide Zustände stets zu gleicher Zeit entstehen und die beiden aneinander geriebenen Körper befinden sich stets in entgegengesetzten elektrischen Zuständen — und daß sie sich bei Berührung neutralisieren oder zu Null ergänzen können. Dabei ist es willkürlich, welchen der beiden Zustände man als den positiven und welchen als den negativen bezeichnen will. Es beruht durchaus auf einer zufälligen und allgemeiner Uebereinkunft, daß das Glas, wenn es mit Seide gerieben wird, als positiv, die Seide als negativ elektrisch bezeichnet wird. Es ist zu beachten, daß die Art des elektrischen Zustandes

Material eigentümlich ist. Wird Seide mit Ebonit gerieben, so wird sie jetzt positiv und das Ebonit negativ. Die Körper ordnen sich also nicht etwa in zwei große Gruppen von positiv und negativ elektrischen Körpern, sondern in eine Reihe (Spannungsreihe), in der jeder Körper mit einem vorhergehenden gerieben negativ, mit einem folgenden gerieben positiv elektrisch wird. In dieser Reihe steht Glas am positiven, Ebonit und Harz am negativen Ende.

## 2. Uebertragung des Zustandes. Leiter und Nichtleiter.

Der elektrische Zustand, der durch Reiben auf einem Körper hervorgebracht ist, kann durch Berührung auf einen anderen Körper übertragen werden. Aber die Körper trennen sich in zwei Klassen, die sich hinsichtlich der Annahme des elektrischen Zustandes wesentlich voneinander unterscheiden: die eine Klasse von Körpern, zu welchen z. B. Glas gehört, zeigen nach der Berührung mit dem geladenen Körper — etwa dem Konduktor einer Elektrisiermaschine — um so kräftigere elektrostatische Wirkungen, je mehr Punkte ihrer Oberfläche mit dem Konduktor in Berührung gebracht sind; dagegen macht dies für die andere Klasse von Körpern, zu denen die Metalle gehören, keinen Unterschied. Nach einer einmaligen Berührung verstärkt sich ihre elektrostatische Wirkung nicht mehr. Bringt man das eine Ende eines Glasstabes in Berührung mit einem geladenen Körper, so erweist sich bei Prüfung mit einem Goldblattelëktroskop nur dieses Ende elektrisiert; das andere Ende und der übrige Glasstab dagegen bleiben unelektrisch. Berührt man dagegen den geladenen Körper mit dem einen Ende eines an einem Ebonitgriff gehaltenen Metallstabes, so erweist sich bei der Prüfung mit dem Elektroskop der ganze Metallkörper an allen Stellen elektrisch. Bei der ersten Klasse von Körpern bleibt also die elektrische Ladung auf diejenigen Teile der Körper beschränkt, welche direkt mit dem Konduktor der Elektrisiermaschine in Berührung gekommen sind; sie heißen daher Nichtleiter der Elektrizität oder Isolatoren. Bei der zweiten Klasse von Stoffen dagegen verbreitet sich der elektrische Zustand sofort über den ganzen Körper in der Weise, daß sich auf dem Körper und zwischen ihm und dem ursprünglich geladenen Körper ein bestimmter Gleichgewichtszustand herstellt, der durch wiederholte Berührungen nicht mehr verändert wird. Diese Klasse von Stoffen nennt man deswegen Leiter der Elektrizität oder Konduktoren.

Da die Berührung eines elektrisierten Körpers mit der Erde seinen elektrischen Zustand aufhebt, so muß man Konduktoren von der leitenden



## Kapitel I.

# Elektrostatik.

### 1. Die beiden Arten des elektrischen Zustandes.

Wenn man gewisse Körper aneinander reibt, z. B. Glas mit Seide oder Ebonit mit Flanell, so kommen sie in einen Zustand, der dadurch charakterisiert ist, daß die Körper in ponderomotorische Wirkungen, bewegende Kräfte, aufeinander ausüben. Diesen Zustand nennt man den elektrischen Zustand. Die Körper, die sich in diesem Zustande befinden, nennt man elektrisch. Die ponderomotorischen Wirkungen, die alle Körper in diesem Zustande ausüben, unterscheiden sich von den Wirkungen des elektrischen Zustandes zunächst dadurch, daß sie von der Masse der Körper gerufen und wieder aufgehoben werden können; daß sie von der Form der Körper dadurch, daß nicht bloß Anziehungen, sondern auch Abstoßungen vorkommen. Glas und Seide miteinander gerieben, zieht die Seide die Glasplatte an; zwei mit Seide geriebene Glasplatten stoßen sich ab. Man unterscheidet man auch zwei elektrische Zustände von einander nach ihrem Charakter. Körper in elektrischen Zustände, die sich abstoßen, stoßen sich ab, Körper in elektrischen Zustände, die sich anziehen, ziehen sich an. Man pflegt abstoßende Kräfte den positiven, anziehende durch ein negatives Vorzeichen zu kennzeichnen. Die Bezeichnungsweise hat man auf die beiden elektrischen Zustände übertragen und unterscheidet sie als positiven und negativen. Die besondere Berechtigung zu dieser Art der Bezeichnung liegt in dem Umstande, daß beide Zustände stets zu gleicher Zeit in denselben beiden aneinander geriebenen Körpern befinden sich. Die positiven und negativen elektrischen Zustände — und daß sie sich gegenseitig aufheben, neutralisieren oder zu Null ergänzen können. Man willkürlich, welchen der beiden Zustände man als den positiven, und als den negativen bezeichnen will. Es beruht durchaus auf einer willkürlichen Uebereinkunft, daß das Glas, wenn es mit Seide gerieben wird, als positiv, die Seide als negativ elektrisch bezeichnet wird. Es ist zu beachten, daß die Art des elektrischen Zustandes

Material eigentümlich ist. Wird Seide mit Ebonit gerieben, so wird sie jetzt positiv und das Ebonit negativ. Die Körper ordnen sich also nicht etwa in zwei große Gruppen von positiv und negativ elektrischen Körpern, sondern in eine Reihe (Spannungsreihe), in der jeder Körper mit einem vorhergehenden gerieben negativ, mit einem folgenden gerieben positiv elektrisch wird. In dieser Reihe steht Glas am positiven, Ebonit und Harz am negativen Ende.

## 2. Uebertragung des Zustandes. Leiter und Nichtleiter.

Der elektrische Zustand, der durch Reiben auf einem Körper hervor gebracht ist, kann durch Berührung auf einen anderen Körper übertragen werden. Aber die Körper trennen sich in zwei Klassen, die sich hinsichtlich der Annahme des elektrischen Zustandes wesentlich voneinander unterscheiden: die eine Klasse von Körpern, zu welchen z. B. Glas gehört, zeigen nach der Berührung mit dem geladenen Körper — etwa dem Konduktor einer Elektrisiermaschine — um so kräftigere elektrostatische Wirkungen, je mehr Punkte ihrer Oberfläche mit dem Konduktor in Berührung gebracht sind; dagegen macht dies für die andere Klasse von Körpern, zu denen die Metalle gehören, keinen Unterschied. Nach einer einmaligen Berührung verstärkt sich ihre elektrostatische Wirkung nicht mehr. Bringt man das eine Ende eines Glasstabes in Berührung mit einem geladenen Körper, so erweist sich bei Prüfung mit einem Goldblatteléktrioskop nur dieses Ende elektrisiert; das andere Ende und der übrige Glasstab dagegen bleiben unelektrisch. Berührt man dagegen den geladenen Körper mit dem einen Ende eines an einem Ebonitgriff gehaltenen Metallstabes, so erweist sich bei der Prüfung mit dem Elektroskop der ganze Metallkörper an allen Stellen elektrisch. Bei der ersten Klasse von Körpern bleibt also die elektrische Ladung auf diejenigen Teile der Körper beschränkt, welche direkt mit dem Konduktor der Elektrisiermaschine in Berührung gekommen sind; sie heißen daher Nichtleiter der Elektrizität oder Isolatoren. Bei der zweiten Klasse von Stoffen dagegen verbreitet sich der elektrische Zustand sofort über den ganzen Körper in der Weise, daß sich auf dem Körper und zwischen ihm und dem ursprünglich geladenen Körper ein bestimmter Gleichgewichtszustand herstellt, der durch wiederholte Berührungen nicht mehr verändert wird. Diese Klasse von Stoffen nennt man deswegen Leiter der Elektrizität oder Konduktoren.

Da die Berührung eines elektrisierten Körpers mit der Erde seinen elektrischen Zustand aufhebt, so muß man Konduktoren von der leitenden Berührung mit der Erde durch Befestigung an Isolatoren z. B. Auf-

hängung an Seidenfäden, hindern, wenn man elektrisch ihnen nachweisen will. Da der menschliche Körper selbst Leiter und Isolator zugleich ist, so kann man daher ein Metallstück dadurch isolieren, daß man es mit dem Konduktor der Elektrisiermaschine in Berührung bringt, während man es in der Hand hält. Als Isolatoren sind z. B. Seide, Glimmer, Paraffin, Schellack, Glas, Terpentin, Wasser, und allem die Gase und der luftleere Raum. Zu den Leitern gehören außer den Metallen die Kohle, Lösungen von Salzen oder Säuren, und unter gewissen Umständen, z. B. die Flammengase.

### 3. Der Begriff der Elektrizitätsmenge

Die Uebertragung des elektrischen Zustandes von einem Körper auf einen anderen läßt sich in der Weise bewerkstelligen, daß der ursprünglich geladene Körper nach der Berührung mit einem zweiten Körper, der ebenfalls geladen ist, entladen wird. Man muß zu diesem Zwecke dem zweiten Körper ein Gefäß, z. B. ein Glas, auf isolierendem Fuße ruhenden oben offenen Hohlzylinder geben. Einen Apparat dieser Art nennt man ein Faradaysches Gefäß. Man bringt den geladenen Körper an isolierender Handhabe in den Hohlzylinder hinein und dort zur Berührung mit der inneren Wand. Der elektrische Zustand des Körpers, nachdem man ihn wieder herausgezogen hat, ist derselbe wie vor der Berührung. Der elektrische Zustand ist bei dieser Art Uebertragung vollständig auf das Faradaysche Gefäß übergegangen.

Mit Hilfe dieser Vorrichtung kann man den Nachweis machen, daß dasjenige übertragbare Etwas, das den elektrischen Zustand eines Körpers ausmacht, und das man als die elektrische Ladung der Körper bezeichnet, eine bestimmte Größe ist, die bei dem Vorgange der Uebertragung unverändert bleibt. Denn wenn man den elektrischen Zustand des Körpers auf ein Faradaysches Gefäß überträgt, und wenn man andererseits dafür sorgt, daß der geladene Körper nach der Uebertragung jedem der anzustellenden Versuche in dem gleichen elektrischen Zustande befindet — etwa durch Berührung mit dem auf isolierendem Fuße ruhenden Konduktor der elektrischen Maschine —, so findet man, daß der elektrische Zustand ebenfalls mit Hilfe eines passenden Konduktors auf einen anderen Körper übertragen wird. Erfahrung, daß das Faradaysche Gefäß stets den gleichen elektrischen Zustand annimmt, gleichviel ob der geladene Körper direkt in das Gefäß hinein entladen wird, oder ob man ihn zuerst in ein anderes Faradaysches Gefäß und dieses dann in das Meßgefäß überträgt, zeigt, daß die elektrische Ladung erscheint also als eine Größe, die bei der Uebertragung vollständig und ohne Verlust auf einen anderen Körper übergeht. Und man macht die weitere Erfahrung, daß

Zustand des Meßgefäßes auch davon unabhängig ist, ob der geladene Körper direkt in das Gefäß entladen oder ob er zunächst mit anderen isolierten Konduktoren in Berührung beliebiger Art gebracht wird und dann diese Konduktoren sämtlich nacheinander in das Meßgefäß entladen werden. Dabei gibt jeder einzelne Körper eine kleinere Ladung an das Meßgefäß ab, als der ursprünglich geladene Körper bei direkter Entladung. Die Ladung erscheint also verteilt auf die einzelnen Körper. Aber die Summe aller dieser Ladungen ist gleich der ursprünglichen Ladung.

Die elektrische Ladung hat also den Charakter einer Größe, die nach Belieben geteilt und übertragen werden kann, die aber dabei ihrer Quantität nach unverändert bleibt. Diese Größe nennt man die Menge der Elektrizität, mit der der Körper geladen ist. Nimmt man bei den beschriebenen Versuchen Verluste wahr, so ist man durchaus berechtigt, sie auf Mangelhaftigkeit der Isolation zu schieben. Denn mit je besseren Isolatoren man arbeitet, um so genauer bewährt sich der Satz von der Erhaltung der Elektrizitätsmenge.

Das Faradaysche Gefäß in Verbindung mit einem Elektroskop, dessen Ausschläge auf einer Skala abgelesen werden können, kann zur Vergleichung von Elektrizitätsmengen in einem willkürlichen Maße dienen. Denn da bei der beschriebenen Art der Berührung die Ladung des eingeführten Körpers stets vollständig auf das Meßgefäß übergeht, so enthält das Faradaysche Gefäß, wenn man denselben Körper mit stets der gleichen Ladung zwei-, drei-, viermal hintereinander in das Gefäß entladet, die zwei-, drei-, vierfache Ladung. Die entsprechenden Ausschläge des Elektroskops ergeben eine Skala, die zur Beurteilung der auf dem Meßapparat vorhandenen Elektrizitätsmenge dienen kann.

Dabei ist es, um mit diesem Apparate eine Elektrizitätsmenge zu messen, nicht einmal nötig, sie auf das Gefäß zu entladen. Führt man den geladenen Körper in die Höhlung des ungeladenen Gefäßes tief hinein, ohne die Innenwand zu berühren, so zeigt das Elektroskop den gleichen Ausschlag wie nach der Berührung, der aber natürlich wieder verschwindet, wenn man den Körper mit der auf ihm verbliebenen Ladung aus dem Gefäß herauszieht. Dadurch läßt sich auch eine Ladung messen, die auf einem Isolator haftet und sich daher nicht ohne weiteres auf das Meßgefäß übertragen läßt. Diese Möglichkeit benutzt man, um den Nachweis zu führen, daß bei der Erzeugung des elektrischen Zustandes beide Elektrizitäten stets in gleicher Menge entstehen. Dazu ist zunächst festzustellen, was man unter gleichen Mengen entgegengesetzter Elektrizitäten zu verstehen hat. Wird ein Faradaysches Gefäß einmal positiv, einmal negativ geladen, so nennt man die entgegengesetzten Ladungen gleich groß, wenn sie gleiche Ausschläge des Elektroskops bewirken. Bringt man in ein positiv geladenes Gefäß

eine gleich große Menge negativer Elektrizität, so v elektrischer Zustand vollständig. Zwei entgegengesetzt mengen, die nach dem beschriebenen Verfahren als gleich worden sind, sind also auch insofern gleich groß, als sie Vereinigung vollständig neutralisieren. Umgekehrt, wo zeugung von Elektrizität innerhalb des Meßgefäßes v man etwa Glasplatte und Reibzeug an isolierten Griff des Gefäßes hineinführt, so bleibt das Gefäß dabei elektrisch. Es entstehen also bei der Erzeugung von Elektrizitäten stets in gleicher Menge.

Diese Tatsachen führen zu der Auffassung, daß au gänge der Entladung eines Körpers die elektrische La nichtet, sondern nur durch eine gleich große entgegen in ihrer Wirkung aufgehoben wird. Der neutrale Zust Zustand, in dem die Körper nicht ohne elektrische Ladu beide Elektrizitäten in gleicher Menge in vollständige halten, und der Vorgang der Elektrisierung besteht nie zeugung von Elektrizität, sondern in einer Trennung handenen entgegengesetzten Elektrizitäten. In dies scheinen die Elektrizitäten in der Tat als e gegebene unzerstörbare Größen und alle elek gänge nur als Aenderungen in der Anordu teilung der Elektrizitäten. Man kann danach Grundbegriff der ganzen Elektrizitätslehre, die Größ elektrische Ladung oder Elektrizitätsmenge oder auch Elektrizität“ bezeichnet, den Charakter einer Substan

Die Vorstellung von der substantiellen Natur der von dem Gegensatz, in dem diese Art von Substanz zu d stellungsvermögen geläufigen materiellen Substanz steht Formulierung in der alten Lehre von den imponderal Fluiden gefunden. Sie hat eine viel speziellere Ausg neuesten Phase der Entwicklung der Elektrizitätslehre, in lehre erhalten. Es ist zunächst für den Aufbau der nicht erforderlich, auf die speziellen Vorstellungen der die Natur der elektrischen Ladungen an dieser Stelle Gegenteil ist das Verständnis dieser neueren Anschauung auf Grund derjenigen Kenntnisse von den Eigenschaften Ladungen, die den Inhalt der älteren Elektrizitätslehre Hinweis auf jene neuesten Vorstellungen soll hier deswegen weil die Erfahrungstatsachen, aus denen heraus sich die entwickelt hat, immer neue Beweise für die substant elektrischen Ladungen geliefert haben.

#### 4. Die ponderomotorischen Wirkungen.

Die Elektrizität, in dem vorstehend besprochenen Sinne einer substantiellen, quantitativ meßbaren Größe, läßt sich durch keine anderen Eigenschaften charakterisieren als durch die Wirkungen, die sie ausübt, und durch die allein wir das Vorhandensein dieses Agens wahrzunehmen vermögen. Diese Wirkungen sind zunächst ponderomotorischer Art. Zwei Körper in elektrischem Zustande oder verschiedene Teile eines und desselben elektrisierten Körpers üben aufeinander bewegende Kräfte im Sinne der Mechanik aus. Diese Kräfte kommen aber an dem materiellen Körper nur insofern zur Wirkung, als diese Körper Träger elektrischer Ladungen sind. Man faßt daher besagte Kräfte auf als Kräfte, die zwischen den elektrischen Ladungen wirksam sind und die sich auf materielle Körper nur dadurch übertragen, daß die elektrischen Ladungen an den materiellen Körpern haften, d. h. durch andere Kräfte unbekannter Art — wir wollen sie als molekular-elektrische Kräfte bezeichnen — an ihnen festgehalten werden. Dabei gestaltet sich der Vorgang dieser Uebertragung der Kraftwirkungen auf die Materie verschieden, je nachdem der materielle Körper ein Nichtleiter oder ein Leiter ist. Bei dem Isolator haftet die elektrische Ladung fest am gegebenen Ort und überträgt daher die auf sie wirkende Kraft unmittelbar auf ihren Träger. In einem Leiter ist die Elektrizität frei beweglich. Sie wird sich daher unter dem Einfluß einer Kraft so lange bewegen, bis die Grenze des Leiters gegen den Isolator dieser Bewegung ein Hindernis entgegengesetzt. Hier muß sich also die elektrische Ladung auf der Grenzfläche des Leiters gegen den Isolator ansammeln und muß sich hier in bestimmter Weise verteilen. Denn eine weitere Veränderung in dieser Verteilung ist offenbar nur dann unmöglich, wenn an jeder Stelle der Oberfläche die resultierende Kraft, die aus dem Zusammenwirken der äußeren Kraft und der Wechselwirkung der auf dem Leiter lagernden Elektrizitäten hervorgeht, auf der Oberfläche des Leiters senkrecht steht. In diesem Falle befindet sich die elektrische Ladung auf dem Leiter im Gleichgewicht. Denkt man sich die auf die elektrischen Ladungen in den einzelnen Oberflächenelementen ausgeübten Normalkräfte als Kräfte am starren Körper nach den Regeln der Mechanik zu einer Resultierenden zusammengesetzt, so stellt diese die ponderomotorische Wirkung auf den geladenen Leiter vor.

#### 5. Das elektrische Feld.

Wie schon in der Einleitung (S. 4) auseinandergesetzt, denkt man sich die ponderomotorischen Wirkungen, die elektrische Ladungen aufeinander

ausüben, durch den Raum oder den Aether, vermittelte motorischen Kräfte bestehen also zunächst in einer Wechselwirkung zwischen der elektrischen Ladung und dem sie umgebenden Aether. Durch diesen hindurch breitet sich die Wirkung aus von Raumelement zu Raumelement. Man nennt die Ursache der Aether dieser spezifischen Zustandsänderung, die durch die Ladung in ihm hervorruft, unterliegt, das elektrostatische oder elektrische Feld. Wenn man sich diese Zustände als Spannungen vorstellt, wie sie in einem elastischen Medium mechanische Deformationen hervorgerufen werden, so ist das wohl geeignet ist, die kontinuierliche Ausbreitung der Wirkung zu veranschaulichen; aber man muß sich stets daran erinnern, daß diese Bilde eine reale Bedeutung nicht zukommt; denn die Wirkung in der ponderablen festen Materie dürfen wir auf den Aether übertragen. Die Gesetze, nach denen die elektrischen Kraftwirkungen im Aether ausbreiten, können nur aus der Erfahrung, durch die Untersuchung der besonderen Eigenschaften des elektrischen Mediums, gefunden werden. Man hat dazu folgenden Weg eingeschlagen:

Da bei dem Akt der Elektrizitätserregung stets gleiche Elektrizitäten in gleicher Menge entstehen, so ist da ein Raum, der sich stets zwischen zwei entgegengesetzten Körpern erstreckt. Einen Raum, für den die Summe der Elektrizitäten  $= 0$  ist, nennt man ein vollständiges Feld, wenn sich aber den einen Körper unendlich weit entfernt umgibt, so auf die nähere Umgebung des zurückgebliebenen Körpers beschränkt. In diesem Sinne kann man dann von dem Felde eines elektrisierten Körpers sprechen (unvollständiges Feld). Zwischen dem ersten elektrisierten Körper, dessen korrespondierende Ladung ebenfalls unendlich weit entfernt sein soll, in dem zweiten Körper, so geht aus der Uebereinanderlagerung der Ladungen die veränderte Zustandsverteilung im Aether hervor, als ob die ponderomotorischen Wirkungen entgegengetreten, die abstoßenden Kräfte, die die beiden Körper aufeinander ausüben, und die immer einander gleich und entgegengesetzt gleich sind. Man kann den zweiten Körper sehr klein und seine Ladung sehr groß machen. Die Veränderung, die seine Anwesenheit im Felde des ersten Körpers hervorruft, erstreckt sich allerdings auch in diesem Felde auf den ersten Körper; denn die gleiche ponderomotorische Kraft, die der zweite Körper im Felde des ersten erfährt, greift ja auch den ersten in entgegengesetzter Richtung am ersten Körper an und zeigt die Veränderung des Feldes auch in seiner Umgebung wieder an. Ist. Aber für den größeren Körper 1 ist diese Kraft

der Druckkräfte, die auf alle einzelnen Elemente der Oberfläche des geladenen Körpers wirken; ist die Resultante wegen der geringen Ladung des Körpers 2 nur klein, so werden die Veränderungen, die der Körper 2 in den einzelnen Elementen des Feldes des Körpers 1 hervorruft, erst recht geringfügig sein. Wenn man daher auch nicht die Gesamtwirkung des Körpers 2 auf den Körper 1 vernachlässigen darf, so vernachlässigt man doch die Veränderungen, die in den einzelnen Elementen des Feldes 1 durch 2 hervorgebracht werden, abgesehen von der unmittelbaren Umgebung des Körpers 2. Unter diesen Umständen kann man die Kraft, die auf den Körper 2 wirkt, als Resultat der Wechselwirkung seines Feldes mit demjenigen Teil des Feldes 1 ansehen, der den Körper 2 unmittelbar umgibt. Die Anwendung eines solchen kleinen, schwach geladenen Körpers gewährt also den Vorteil, die ponderomotorische Kraft, die dieser Körper erfährt, als Wechselwirkung der elektrischen Ladung dieses Körpers mit einer bestimmten Stelle eines gegebenen elektrischen Feldes auffassen zu dürfen. Indem man den Körper mit unveränderter Ladung an verschiedene Stellen desselben elektrischen Feldes bringt, hat man in der jedesmaligen ponderomotorischen Wirkung ein Mittel zur Charakterisierung des Kraftverlaufes eines elektrischen Feldes. Man nennt einen solchen Körper einen Prüfkörper; wir denken ihn uns zweckmäßig in der Form einer kleinen leitenden Kugel, die mit einer bestimmten Elektrizitätsmenge geladen ist, und denken diese Kugel mit einer Vorrichtung verbunden, die gestattet, die ponderomotorische Kraft, die auf die Kugel wirkt, in mechanischem Maße — in Dynen — zu messen.

## 6. Die elektrische Kraft.

Die Erfahrung lehrt, daß die ponderomotorische Kraft, die auf eine Prüfkugel an einer und derselben Stelle eines elektrischen Feldes wirkt, der Ladung der Prüfkugel proportional ist. Coulomb<sup>1)</sup> hat das zuerst nachgewiesen bei seinen

<sup>1)</sup> Coulomb, Vierte Abhandlung über die Elektrizität, 1786. Deutsche Ausgabe in Ostwalds Klassikern der exakten Naturw. Nr. 13, S. 71–73. — Es muß allerdings bemerkt werden, daß Coulomb den oben beschriebenen Versuch von einem anderen Gesichtspunkte aus anstellte. Er nahm die beiden gleich großen Kugeln, die er zur Teilung der Ladung miteinander in Berührung brachte, aus verschiedenem Material, die eine aus Holundermark, die andere aus Kupfer, und schloß aus der Halbierung der Kraft, daß sich die Ladung trotz der Verschiedenheit des Materials doch genau in zwei gleiche Teile geteilt habe. Nimmt man von anderen Erfahrungen her die Unabhängigkeit der Verteilung der Elektrizität vom Material der Leiter als gegebene Tatsache an, so kann man den Coulombschen Versuch umgekehrt so deuten, wie es im Text geschehen ist, noch zutreffender natürlich dann, wenn man den Versuch mit Kugeln aus gleichem Materiale ausführt.



Messungen mit der Drehwage. Er maß die Kraft, die eine geladene Kugel im Felde einer anderen geladenen Kugel erfährt; wurde danach die Ladung der ersten Kugel durch eine vorübergehende Berührung mit einer ungeladenen ebenen isolierten Kugel auf die Hälfte vermindert, so sank die Kraft bei unverändertem Abstand der beiden Kugeln auf die Hälfte. Wie die elektrische Ladung der Prüfkugel kann man sich in einer festgesetzten Einheit der Elektrizitätsmenge gemessen denken. Zur Definition einer bestimmten, jederzeit reproduzierbaren Einheit der Elektrizitätsmenge gelangt, wird später (siehe Abschnitt 6) erörtert werden. Es möge  $e$  die in diesen Einheiten gemessene Ladung der Prüfkugel,  $\mathfrak{F}$  die in Dynen gemessene Kraft sein, die die Prüfkugel an einer bestimmten Stelle des elektrischen Feldes erfährt. Dann ist der Proportionalitätsfaktor  $\mathfrak{F}/e$  (noch genauer  $\lim_{e \rightarrow 0} \mathfrak{F}/e$ ) eine ganz bestimmte

angebbare Größe, die diejenige Eigenschaft des elektrischen Feldes charakterisiert, von der die ponderomotorische Wirkung abhängt. Sie ist die Intensität des Feldes oder die Feldstärke, die elektrische Kraft. Sie hat an jeder Stelle des Feldes eine bestimmte Größe, sondern auch eine bestimmte Richtung, in der dem die Prüfkugel mit positiver oder mit negativer Ladung erfährt, im einen oder im entgegengesetzten Sinne zu reagieren. Man ist übereingekommen, als positive Richtung der Kraft immer die Richtung der ponderomotorischen Kraft zu bezeichnen, die das Feld auf eine positiv geladene Prüfkugel ausübt. In dieser Weise nach Größe und Richtung definierte Kraft soll im folgenden stets durch  $\mathfrak{E}$ , ihre Komponenten nach den Achsen sollen durch  $\mathfrak{E}_x$ ,  $\mathfrak{E}_y$ ,  $\mathfrak{E}_z$  bezeichnet werden. Es gilt

$$\mathfrak{E} = \frac{\mathfrak{F}}{e} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{F} = e \cdot \mathfrak{E}$$

Entsprechend dieser Festsetzung kann als Maß der Kraft an einem bestimmten Feldpunkte  $P$  diejenige ponderomotorische Kraft definiert werden, welche eine in  $P$  befindliche mit der Ladung  $e$  der Elektrizitätsmenge behaftete Prüfkugel erfahren würde.

## 7. Kraftlinien.

Kann die mit der Elektrizitätseinheit geladene Prüfkugel der ponderomotorischen Kraft ohne Hindernis folgen, falls ihre Masse oder ihre Geschwindigkeit so gering ist, daß die Trägheitskräfte nicht merklich auftreten, eine Bahn, deren

jedem Punkte mit der Richtung der elektrischen Kraft zusammenfällt. Diese Bahn wird Kraftlinie genannt. Werden zwei kleine mit gleichen aber entgegengesetzten Ladungen versehene Kügelchen durch ein isolierendes Stübchen fest miteinander verbunden und wird diese „elektrische Nadel“ frei beweglich in einem elektrischen Felde aufgehängt, so bewirken die entgegengesetzten Kräfte, die auf die entgegengesetzten Ladungen ausgeübt werden, daß sich die Nadel in die Richtung der elektrischen Kraft einstellt — vorausgesetzt, daß ihre Dimensionen klein gegen die des Feldes sind. Die Nadel kann also

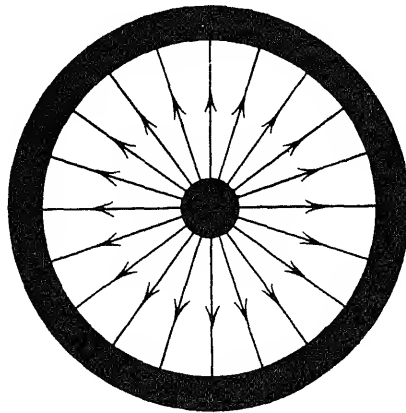


Fig 1.

dazu dienen, die Richtung der elektrischen Kraft an jeder Stelle des Feldes festzustellen.

Ein anschauliches Bild von der Anordnung der Kraftlinien eines Feldes erhält man durch folgendes Verfahren<sup>1)</sup>. Eine gut isolierende, mit Schellack überzogene Glasplatte wird mit einem Pulver aus einem schlecht leitenden oder isolierenden Material fein bestreut<sup>2)</sup>. In einem starken elektrischen Felde wird jedes Pulverteilchen, wie wir später sehen werden, zu einer kleinen elektrischen Nadel. Laufen die Kraftlinien des Feldes parallel zur Oberfläche der Platte, und hebt man durch leises Klopfen die Reibung, mit der das Pulver an der Platte haftet, momentan auf, so reihen sich die Teilchen in Richtung der Kraftlinien hintereinander zu feinen Linien infolge der Anziehung der entgegengesetzt elektrisierten Enden, welche zwei benachbarte Teilchen einander zuwenden. Dabei erzeugt man die elektrischen Felder am zweckmäßigsten in der Weise,

<sup>1)</sup> G. Mie, Zeitschr. f. d. phys. u. chem. Unt. **19**, S. 154, 1906. Das Verfahren ist zuerst in einer etwas weniger bequemen Form von M. Seddig ausgearbeitet worden; siehe Annalen der Physik **11**, S. 815, 1903.

<sup>2)</sup> G. Mie empfiehlt Pulver: C. Fieser, (Phys. Zeitschr. **9**, S. 221, 1908) Gips

daß man die Leiterformen, für die man die Felder zu ermitteln wünscht, aus Stanniol ausgeschnitten auf die Glasplatte aufklebt und diese mit einer (nicht zu stark) geladenen Leinwand bedeckt. Die Figuren 1, 2 und 3 stellen Nachzeichnungen nach

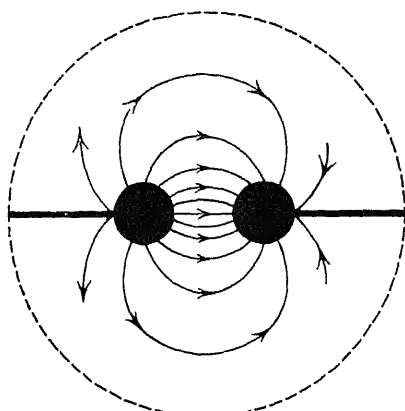


Fig. 2.

experimentell hergestellten Kraftlinienbildern dar, und zwar Fig. 1 für einen ebenen axialen Schnitt durch das Kraftfeld einer isolierten geladenen Kugel, Fig. 2 für zwei gleich stark entgegengesetzt geladene Scheiben

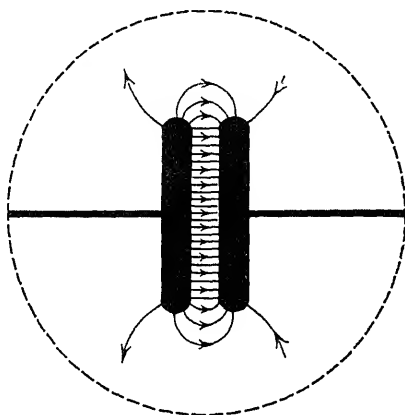


Fig. 3.

Fig. 2 für einen ebenen axialen Schnitt durch das Kraftfeld zweier gleich stark geladener Kugeln, Fig. 3 für zwei entgegengesetzt geladene parallele Streifen entsprechend dem ebenen axialen Schnitt durch das elektrische Feld eines

sators. Die Pfeile markieren den Richtungssinn der Kraftlinien entsprechend der obigen Festsetzung (§ 6), d. h. sie sind von der positiven Ladung fort und zur negativen Ladung hin gerichtet.

## 8. Das Potential der elektrischen Kraft.

Wird eine mit der Elektrizitätsmenge  $e$  geladene Prüfkugel unter dem Einfluß der ponderomotorischen Kraft im elektrischen Felde verschoben, so wird dabei eine mechanische Arbeit entweder gewonnen oder aufgewandt, je nachdem die Bewegung im Sinne oder gegen den Sinn der in die Bewegungsrichtung fallenden Kraftkomponente erfolgt. Es sei  $dl$  ein Element des Weges, den die Kugel beschreibt,  $\mathfrak{F}_l$  die in die Richtung der Bewegung fallende Kraftkomponente. Dann ist das Differential der Arbeit, die bei der Bewegung gewonnen wird:

$$dA = \mathfrak{F}_l dl$$

und die ganze Arbeit bei einem endlichen Weg zwischen zwei Punkten  $a$  und  $b$ :

$$A = \int_a^b \mathfrak{F}_l dl = e \int_a^b \mathfrak{E}_l dl. \quad (2)$$

Alle Erfahrungen, die man über das elektrische Feld gemacht hat, sprechen dafür, daß der Betrag dieser Arbeit nur von der Lage der Endpunkte  $a$  und  $b$  abhängt und unabhängig von dem Wege ist, auf dem die Ueberführung der Kugel von dem Punkte  $a$  nach dem Punkte  $b$  erfolgt. Oder mit anderen Worten: Wenn man den Prüfkörper auf einem Wege von  $a$  nach  $b$  hin- und auf einem anderen Wege von  $b$  nach  $a$  zurückführt, also eine geschlossene Linie im elektrischen Felde beschreiben läßt, so ist der Betrag der dabei gewonnenen oder geleisteten Arbeit gleich Null. In der Tat gelingt es auf keine Weise, durch noch so oft wiederholte Bewegung eines elektrisch geladenen Körpers auf einer geschlossenen Bahn in einem elektrischen Felde Arbeit zu gewinnen. Diese Möglichkeit würde vorliegen, wenn es elektrische Kraftlinien gäbe, die in sich geschlossene Kurven bildeten. Aber die Betrachtung der Kraftlinienbilder lehrt, daß solche Linien nicht vorkommen; daß vielmehr jede Kraftlinie von einer positiven Ladung ausgeht und an einer negativen Ladung endet. Das elektrische Feld ruhender Ladungen ist also in erster Linie dadurch charakterisiert, daß das Linienintegral der elektrischen Kraft genommen über eine in sich zurücklaufende Bahn stets den Wert 0 hat.

$$\oint \mathfrak{E}_l dl = 0. \quad (3)$$

Die mathematische Bedingung für dieses Verhalten der Kraft läßt sich sofort hinschreiben. Die Größe unter dem Integral muß offenbar ein vollständiges Differential, also  $\mathcal{E}_l$  die Ableitung der Funktion der Koordinaten nach  $l$  sein. Diese Funktion soll stets mit  $V$  bezeichnet werden. Es ist üblich, die Abnahme im Sinne der positiven Kraftrichtung zu rechnen, also:

$$\mathcal{E}_l = - \frac{dV}{dl}$$

zu setzen. Dann ist nach (2):

$$A = e \int_a^b \mathcal{E}_l dl = - e \int_a^b \frac{dV}{dl} dl = e (V_a - V_b).$$

Die Differenz  $V_a - V_b$  ist gleich der mechanischen Arbeit, die der positiven Elektrizitätseinheit geladene Prüfkugel bei der Bewegung von  $a$  nach  $b$  gewinnt oder verliert, je nachdem die Differenz positiv oder negativ ist; sie ist also ihrer Dimension nach nicht eine Arbeitsgröße, sondern gleich dem Verhältnis einer Arbeitsgröße zur Elektrizitätsmenge.

Die Funktion  $V$  heißt das Potential der elektrischen Kraft. Sie hat für jeden Punkt des Feldes einen bestimmten Wert und die Verteilung dieser Werte steht in einer einfachen Beziehung zu der Verteilung der elektrischen Kraft. Bewegt man die Prüfkugel längs einer Linie, die überall senkrecht zur Richtung der elektrischen Kraft verläuft, so ist die Arbeit bei dieser Verschiebung gleich Null, also das Potential ist konstant. Denkt man sich eine Fläche so durch das Feld gelegt, daß sie überall auf den Kraftlinien senkrecht steht, so hat das Potential auf dieser ganzen Fläche einen und denselben Wert. Solche Flächen heißen Äquipotential- oder Niveauflächen. Auch durch die Betrachtung dieser Niveauflächen lassen sich die Eigenschaften eines elektrischen Feldes veranschaulichen.

Geht man nämlich von einer Niveaufläche zu einer benachbarten über, für die sich das Potential von dem der ersten um den Betrag  $\delta V$  unterscheidet, so hat man zwei Flächen, die einander um den Abstand  $\delta s$  voneinander trennen — denn in einem Felde, in dem die Kraft an jeder Stelle eine bestimmte Richtung hat, können sich zwei Niveauflächen niemals schneiden. Der gegenseitige Abstand um so kleiner ist, je größer die elektrische Kraft an der betreffenden Stelle ist. Denn bezeichnen wir mit  $\mathcal{E}$  die Kraft an der betreffenden Stelle, so ist  $\delta s$  das von der zweiten abgetragene Stück der Normalen der ersten Fläche, das von der zweiten abgetragen wird, also den senkrechten Abstand zwischen beiden Flächen, so daß  $\mathcal{E} \delta s$  die Richtung der elektrischen Kraft  $\mathcal{E}$  mit der der Normalen der

fläche zusammenfällt,  $-\delta V = \mathfrak{E} \cdot \delta n$ , und da  $\delta V$  für die beiden Flächen einen konstanten Wert hat, so ist  $\delta n$  umgekehrt proportional zu  $\mathfrak{E}$ .

Denkt man sich nun von einer Niveaufläche aus alle möglichen Niveauflächen konstruiert in der Weise, daß von einer Fläche zur nächsten immer derselbe Potentialunterschied  $\delta V$  besteht, so gibt die Gesamtheit dieser Flächen ein Bild der Kraftverteilung; denn da, wo sie am engsten sich aneinander drängen, ist die Kraft am größten, wo sie am weitesten auseinanderliegen, ist sie am geringsten. Der ganze Raum des Feldes wird auf diese Weise in Schalen oder Lamellen zerlegt, die einander umschließen. Man nennt deswegen ein Feld, das sich so zerlegen läßt, also ein Feld, für das die Gleichung (3) bzw. die Gleichung (7) des nächsten Paragraphen gilt, ein lamellares Feld.

Das elektrische Potential ist eine Größe, der an jeder Stelle des Raumes nur ein Zahlenwert, aber keine Richtung zukommt, während die elektrische Kraft an jeder Stelle sowohl Zahlenwert als Richtung hat. Man nennt Größen ersterer Art Skalare, Größen letzterer Art Vektoren. Die Gesetze der Vektoren sind unübersichtlicher als die der Skalaren, da jene immer die Kenntnis von drei Größen an jeder Stelle des Raumes erfordern, wie z. B. die elektrische Kraft  $\mathfrak{E}$  erst vollständig bestimmt ist, wenn man ihre drei Komponenten  $\mathfrak{E}_x$ ,  $\mathfrak{E}_y$ ,  $\mathfrak{E}_z$  kennt. Es bedeutet daher im allgemeinen eine Vereinfachung, wenn man die Gesetze eines Vektors auf die eines Skalars zurückführen kann. Dies ist bei der elektrischen Kraft der Fall durch die Einführung des Potentials.

Die Richtung der Normalen einer Niveaufläche ist zugleich diejenige Richtung, in der das Potential seine größte Veränderlichkeit besitzt.

Man bezeichnet die Ableitung des Potentials nach dieser Richtung:  $\frac{\partial V}{\partial n}$

als den Gradienten des Potentials. Die Beziehung zwischen Kraft und Potential drückt sich dann durch den Satz aus:

Die Kraft ist gleich dem negativen Gradienten des Potentials<sup>1)</sup>.

## 9. Das erste Differentialgesetz des elektrischen Feldes.

Da nach dem obigen:

$$\mathfrak{E}_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \mathfrak{E}_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad \mathfrak{E}_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad (6)$$

ist, so ist ohne weiteres auch folgende Beziehung klar:

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial y} = \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial z} = \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x} = \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial z}. \quad (7)$$

<sup>1)</sup> I d E rme sprache der Vektoranalysis:  $\mathfrak{E} = -\text{grad. } V$ .

Sie drückt die Bedingung dafür, daß die elektrische Kraft ein Potential hat, in Form einer Differentialgleichung aus, also in einer Form, die eine gesetzmäßige Veränderung der elektrischen Kraft im Kontinuum des elektrischen Feldes beim Fortschreiten von einem Punkte zu einem benachbarten Punkte darstellt.

Um eine anschauliche Vorstellung von dieser Gesetzmäßigkeit zu bekommen, kann man sich den Satz

$$\oint \mathcal{E} dl = 0$$

für eine geschlossene Bahn angewendet denken auf ein unendlich kleines Viereck, das aus zwei Stücken von Kraftlinien  $dl$  und  $dl'$  und zwei Stücken von Aequipotentiallinien  $da$  und  $da'$  gebildet ist. Da

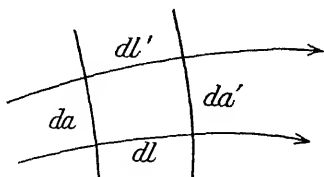


Fig. 4.

und  $da'$  die Arbeit gleich Null ist, so müssen die beiden Beträge der Arbeit längs  $dl$  und  $dl'$  einander gleich und von entgegengesetztem Zeichen sein; oder absolut genommen:

$$\mathcal{E} dl = \mathcal{E}' dl'.$$

Nimmt also von  $dl$  nach  $dl'$  hin die elektrische Kraft ab, so nimmt auch die Länge des Kraftlinienstückes zwischen den Aequipotentialflächen ab, oder nehmen, sei es durch Auseinanderrücken der Niveauflächen oder durch Krümmung der Kraftlinien, und umgekehrt. Die Kraftlinienbilder in Fig. 2 u. 3 lassen dieses Verhalten deutlich erkennen.

## 10. Der Stokessche Satz.

Es mögen zunächst einige allgemeine Betrachtungen über das in dem vorigen Abschnitt eingeführte Linienintegral entwickelt werden. Die allgemeine Bedeutung dieses Begriffes für spätere Anwendungen wird erst im Voraus klarzulegen. Das über eine geschlossene Kurve eingenommene Linienintegral läßt sich nach einem Satz von Stokes in ein Flächenintegral über eine von jener Kurve begrenzte Fläche verwandeln. Da es in diesen Betrachtungen darauf ankommt, in welchem Sinne die Raumkurve bei der Integration durchlaufen wird, so möge zunächst die Bezeichnung für den Richtungssinn derartiger Prozesse (Umläufe, Durchläufe u. dgl.) ein für allemal festgelegt werden.

Fig. 5 stelle perspektivisch das Koordinatensystem mit den Richtungen der  $+X$ -,  $+Y$ -,  $+Z$ -Achse dar. Eine Drehung um eine Achse oder ein Umlauf um eine Fläche werde einer positiven Richtung jener Achse oder einer positiven Normalen jener Fläche stets so zugeordnet, daß die Drehung oder der Umlauf für einen in der positiven Richtung stehenden Menschen von rechts nach links oder von der positiven Seite aus gesehen entgegen dem Sinne des Uhrzeigers er-

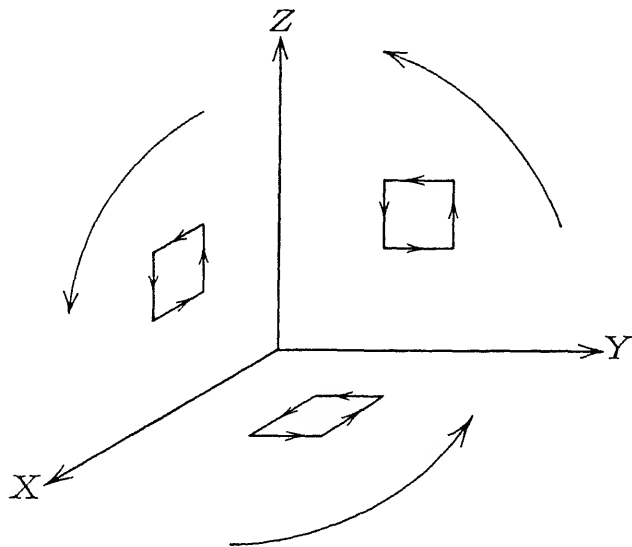


Fig. 5.

folge. Die positive Drehung um die  $+Z$ -Achse ist also diejenige, welche die  $+X$ -Achse auf dem kürzesten Wege in die  $+Y$ -Achse überführt, und entsprechend für die  $Y$ - und die  $X$ -Achse. Dieser Festsetzung entsprechend sind die positiven Drehungsrichtungen um die Koordinatenachsen und ebenso die positiven Umlaufsrichtungen um Flächenelemente in den drei Koordinatenebenen in der Figur 5 durch Pfeile angedeutet.

Es seien nun  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  drei Funktionen, welche innerhalb eines gewissen Raumes eindeutig, stetig und endlich sind. Wir wollen das Linienintegral

$$A = \int (\alpha dx + \beta dy + \gamma dz)$$

etrachten, das sich über eine geschlossene Kurve erstrecken soll.

In dem Integral bedeuten  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  die unendlich kleinen Aenderungen, welche die Koordinaten eines Punktes  $P$  der Kurve erfahren, wenn man von  $P$  aus um die kleine Strecke  $dl$  auf der Begrenzungslinie im Integrationssinne fortschreitet;  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  müssen also bei der Integration positive und negative Werte annehmen.



Wir bilden zunächst den Wert des Integrals für eines unendlich kleinen Elementes ABCD der YZ-Ebene. In diesem Falle ist  $dx$  überhaupt  $= 0$ ,  $dy$  ist längs BC und  $dz$  längs AB und CD  $= 0$ . Längs AB habe die Funktion  $\beta dy$ ; dann wird sie längs CD unter Berücksichtigung der  $z$ -Koordinate den Wert  $-\left(\beta + \frac{\partial \beta}{\partial z} dz\right) dy$  haben. Längs DA ha-

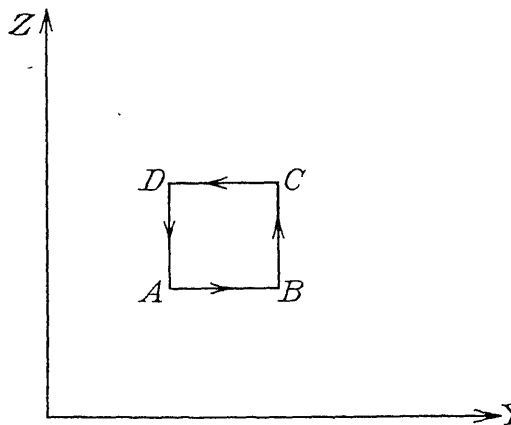


Fig. 6.

ben  $-\gamma dz$  und längs BC den Wert  $+\left(\gamma + \frac{\partial \gamma}{\partial y} dy\right) dz$ . Dieser Ausdrücke ergibt für das Linienintegral über den Rand des Elementes den Wert:

$$\left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}\right) dy dz.$$

Entsprechend erhält man für ein Element der XZ-Ebene

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x}\right) dx dz$$

und für ein Element der XY-Ebene

$$\left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}\right) dx dy.$$

Von den Flächenelementen gehen wir zu Flächen mit endlichen Dimensionen über, indem wir zunächst für ein endliches Element der Ebene das Flächenintegral

$$\int \left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}\right) dy dz$$

bilden. Man kann dabei die Fläche in lauter unendlich

$dydz$  zerlegt denken, indem man auch die krummlinige Begrenzungskurve des Flächenstücks in bekannter Weise durch eine aus den Elementen  $dy$  und  $dz$  zusammengesetzte Zickzacklinie ersetzt. Faßt man dann jedes Element des Flächenintegrals als Linienintegral über die Begrenzung des Flächenelementes auf, so sieht man (Fig. 7), daß alle Linienelemente, in denen zwei benachbarte Flächenelemente zusammenstoßen, in der Gesamtsumme zweimal mit entgegengesetztem Vorzeichen vorkommen und daher herausfallen. Es bleiben daher nur diejenigen Summanden

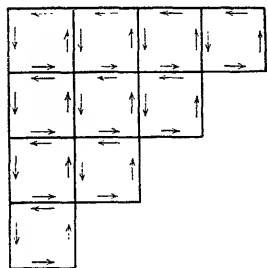


Fig. 7.

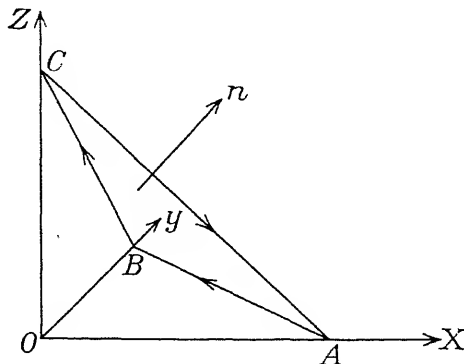


Fig. 8.

übrig, die sich auf die den äußeren Umfang des Flächenstückes bildenden und daher nur einmal vorkommenden Elemente beziehen. Daraus folgt der Satz:

$$\int (\beta dy + \gamma dz) = \int \left( \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} \right) dy dz.$$

d. h. das rechtsstehende Flächenintegral ist gleichwertig mit dem linksstehenden Linienintegral für den Umfang der betrachteten Fläche.

Um den Satz auf eine beliebig gelegene und gestaltete Fläche auszudehnen, betrachten wir zunächst statt der  $YZ$ -Ebene eine beliebig gelegene Ebene. Ihre positive Normale sei  $n$ . Wir legen den Anfangspunkt des Koordinatensystems in die Nähe dieser Ebene, so daß die Achsen in den Punkten  $A, B, C$  geschnitten werden (Fig. 8).

Es sei  $ds$  die Fläche des kleinen Dreiecks  $ABC$ . Dann sind  $ds \cos(nx)$ ,  $ds \cos(ny)$ ,  $ds \cos(nz)$  die Flächen der drei kleinen Dreiecke  $AOB$ ,  $BOC$ ,  $COA$ . Die Linienintegrale für diese letzteren kann man nach obigem in der Form schreiben:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} \right) \cos(nx) ds, \quad \left( \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) \cos(ny) ds, \\ & \left( \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) \cos(nz) ds. \end{aligned}$$

Bildet man die Summen dieser drei Linienintegrale, so die Strecken OA, OB, OC jede zweimal mit entgegenge-  
 zeichen in dieser Summe vorkommen, die Strecken gegen nur einmal. Die genannte Summe reduziert  
 Linienintegral über den Umfang des Dreiecks ABC,

$$\alpha dx + \beta dy + \gamma dz$$

genommen über die Seiten dieses Dreiecks ist gleichb  
 Ausdruck:

$$\left[ \left( \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} \right) \cos(nx) + \left( \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) \cos(ny) + \left( \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) \cos(nz) \right]$$

genommen über die Fläche des Dreiecks.

Soll endlich das Linienintegral A über eine beliebi  
 streckt werden, welche eine endliche Fläche S begrenzt  
 diese Fläche S immer in unendlich kleine Dreiecke zer  
 halten dann das Linienintegral, indem wir die Summe  
 Dreiecksbegrenzungen dieser Elemente in demselben  
 streckten Integralen bilden, da die Integrale über alle  
 Dreiecke sich aufheben und nur die Integrale über die  
 Kurve C fallenden Seiten übrigbleiben. Da aber jede  
 durch die vorhergehende Gleichung gegeben ist, so f  
 über die Begrenzung C erstreckte Integral den Ausdr

$$\begin{aligned} & \int_C (\alpha dx + \beta dy + \gamma dz) \\ &= \int_{(S)} ds \left[ \left( \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} \right) \cos(nx) + \left( \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) \cos(ny) + \left( \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) \cos(nz) \right] \end{aligned}$$

in welchem das Integral der rechten Seite über eine  
 Kurve C begrenzte Fläche S auszudehnen ist. Dies  
 der Stokessche Satz.

Damit der Satz mit dem angegebenen Vorzeich  
 wie nochmals ausdrücklich hervorgehoben werden s  
 positiven Normalen der Fläche S und der Sinn der posi  
 achsen in Beziehung zum Umlaufssinne bei der Integ  
 werden, wie es zu Beginn dieses Abschnittes angegeb

Nehmen wir für die drei Funktionen  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  die l  
 Vektors  $\mathbf{f}$  nach den Koordinatenachsen  $\mathbf{f}_x$ ,  $\mathbf{f}_y$ ,  $\mathbf{f}_z$ , so

$$A = \int_C (\mathbf{f}_x dx + \mathbf{f}_y dy + \mathbf{f}_z dz) = \int_C \mathbf{f} d\mathbf{s}$$

das Linienintegral des Vektors über die Kurve C,

bedeutet. Wir wollen ferner die in dem Flächenintegral vorkommenden Klammerausdrücke zur Abkürzung mit  $c_x$ ,  $c_y$ ,  $c_z$  bezeichnen:

$$\left. \begin{aligned} c_x &= \frac{\partial \tilde{f}_z}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{f}_y}{\partial z} \\ c_y &= \frac{\partial \tilde{f}_x}{\partial z} - \frac{\partial \tilde{f}_z}{\partial x} \\ c_z &= \frac{\partial \tilde{f}_y}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{f}_x}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Man kann sich diese Größen geometrisch versinnlichen, indem man sie als Strecken, ihren Vorzeichen entsprechend, auf den Koordinatenachsen aufträgt, und kann sie als Komponenten eines neuen Vektors  $c$  auffassen, der also durch die Gleichung

$$c^2 = c_x^2 + c_y^2 + c_z^2 \quad (11)$$

bestimmt ist. Man nennt diesen Vektor  $c$  die Rotation (Quirl, Wirbel, Curl) des Vektors  $\tilde{f}$ <sup>1)</sup>. Der Stokessche Satz sagt dann aus, daß das Linienintegral des Vektors  $\tilde{f}$  gleich dem Flächenintegral über den Wirbel des Vektors  $\tilde{f}$  ist.

## 11. Anwendungen auf das elektrische Feld.

Beim Gleichgewichte des elektrostatischen Feldes ordnet sich die elektrische Kraft, wie wir gesehen haben, so an, daß sie ein Potential hat, oder daß ihr Linienintegral für jede geschlossene Kurve im Felde gleich Null ist. Wendet man hierauf den Stokesschen Satz an, so kann man die Bedingung des Gleichgewichtes der elektrischen Kraft auch in der Weise formulieren, daß man sagt:

Im elektrostatischen Felde ist die Rotation der elektrischen Kraft gleich Null, oder das elektrostatische Feld ist wirbelfrei<sup>2)</sup>.

Daß in der Tat darin die Gleichgewichtsbedingung des Feldes ausgedrückt ist, das wird uns später bei der Betrachtung der zeitlich veränderlichen Felder gerade in dem Umstande entgegentreten, daß bei diesen Feldern die Wirbelkomponenten:

$$\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial y}$$

einen von Null verschiedenen Wert besitzen.

<sup>1)</sup> Vektoranalytisch:  $c = \text{rot } \tilde{f}$ .

<sup>2)</sup> Vektoranalytisch sind die Bedingungen (7) ausgedrückt durch die Gleichung:

## 12. Die Grenzen des Feldes.

Die Ausgangspunkte der elektrischen Kräfte, die sich im I in der beschriebenen Weise ausbreiten, sind die elektrischen Ladungen. Diese können an Isolatoren haften und in beliebiger Weise auf der Oberfläche verteilt sein, oder sie können auf isolierte metallische Leiter übertragen sein. In letzterem Falle ist die Anordnung der elektrischen Ladungen keine willkürliche mehr, sondern eine ganz bestimmte, durch die Eigenschaft des leitenden Materials bedingte. Denn, wie schon in Abschnitt 11 vorübergehend bemerkt wurde, damit die Elektrizität auf einem Leiter im Gleichgewicht sich befindet, muß die elektrische Kraft, die von der Leiteroberfläche aus in den umgebenden Raum hinausläuft, auf der Leiteroberfläche senkrecht stehen, da jede tangentielle Komponente die Bewegung der elektrischen Ladung längs der Leiteroberfläche hervorrufen würde. Die Leiteroberfläche muß also eine Fläche konstanten Potentials oder eine Niveauläche sein. Das gilt nicht bloß für geladene Metallkörper, sondern auch für solche, die in einem elektrischen Feld in den neutralen Zustand in das Feld eines geladenen Körpers eingeführt und durch Influenzwirkung geladen werden.

Aus der Eigenschaft der Leiter folgt aber weiter, daß auch im Innern eines Leiters, soll die Elektrizität im Gleichgewicht sich befinden, keine elektrische Kraft vorhanden sein kann. Danach besteht also in dem ganzen vom Metall erfüllten Raume der gleiche Wert des elektrischen Potentials, und die Oberfläche des Metalls bildet die Grenze des elektrischen Feldes, in dem die elektrischen Kraftlinien in Richtung der Normalen der Oberfläche auf ihr endigen.

Um in einem solchen Falle die Anordnung der Elektrizität auf dem Leiter und die Verteilung der Kraft im Raume berechnen zu können, genügt die bisher aufgestellte Gesetzmäßigkeit des Kraftverlaufes. Die Tatsache, daß die Kraft ein Potential hat, nicht. Es bedarf einer tieferen Gesetzmäßigkeit, die den Zusammenhang von Kraft und Potential zum Ausdruck bringt. Wir gewinnen sie, indem wir eine zweite Methode der Untersuchung eines elektrischen Feldes benutzen.

## 13. Der Kraftfluß.

Anstatt durch die ponderomotorische Wirkung auf eine Prüfladung kann man ein Feld auch untersuchen und charakterisieren durch die elektrizitätserregende (influenzierende oder induzierende) Wirkung auf eine dünne, isolierte, zu den Kraftlinien senkrecht stehende Folle. Eine solche Folle besteht aus einem Material, das die elektrischen Kraftlinien senkrecht durchläßt, und das selbst keine elektrischen Ladungen enthält.

auf der einen Seite mit positiver, auf der anderen mit gleich großer negativer Ladung. Man kann diese Ladungen nachweisen und messen, indem man statt einer zwei gleich große dünne Metallscheiben benutzt, die aufeinander gelegt und mit Hilfe isolierender Handhaben im Feld an der zu untersuchenden Stelle getrennt und darauf einzeln am Elektroskop oder im Faradayschen Gefäß (siehe S. 9) geprüft werden (Maxwellsche Doppelplatten<sup>1)</sup>, Fig. 9). Führt man diese Manipulation an derselben Stelle des elektrischen Feldes wiederholt aus, während man der Normalenrichtung der Scheiben jedesmal andere Winkel gegen die Kraftrichtung gibt, so findet man, daß die Platten nach dem Herausnehmen aus

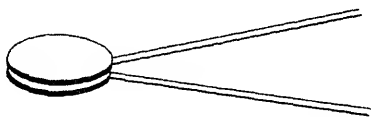


Fig. 9.

dem Felde ungeladen sind, wenn sie parallel zu den Kraftlinien lagen, und daß sie das Maximum der Ladung zeigen, wenn sie sich bei ihrer Trennung senkrecht zu den Kraftlinien des Feldes befanden. Führt man den Versuch mit Platten verschiedener Größe und an verschiedenen Stellen des Feldes aus, so findet man, daß die induzierte Elektrizitätsmenge sowohl der Größe der Platte wie der Stärke des Feldes proportional ist. Bezeichnet man die auf der Oberfläche  $ds$  einer der beiden Metallscheiben induzierte Elektrizität mit  $de_i$ , und mit  $\mathcal{E}$  die Feldstärke an der Stelle, wo die Scheibe auf den Kraftlinien senkrecht steht, so kann man also schreiben:

$$\mathcal{E} ds = h de_i, \quad (12)$$

wobei  $h$  eine Proportionalitätskonstante bedeutet, die offenbar von der Wahl der Maßeinheit für die Elektrizitätsmenge abhängig ist.

Das Produkt  $\mathcal{E} ds$  nennt man den Kraftfluß durch die Fläche  $ds$ . Bei dem beschriebenen Versuch muß die Metallscheibe senkrecht zu den Kraftlinien liegen, weil sie nur in dieser Lage den ursprünglichen Verlauf der Kraftlinien des Feldes nicht ändert. Man kann über den Begriff des Kraftflusses verallgemeinern, indem man ihn nicht auf eine wirkliche, leitende Fläche, sondern auf eine gedachte, mathematische Fläche in beliebiger Lage bezieht. Bedeutet dann  $\mathcal{E}_n$  die zum Flächenelement  $ds$  senkrechte Komponente der elektrischen Kraft, so versteht man unter dem Produkt  $\mathcal{E}_n ds$  den Kraftfluß durch das Flächenelement.

Der Kraftfluß steht in einer direkten Beziehung zu der Elektrizitätsmenge, die das elektrische Feld erzeugt. Wird ein geladener Körper von einer metallischen Hülle allseitig umgeben, so wird sich die Innenseite dieser Hülle mit der entgegengesetzten, die Außenseite mit der

gleichnamigen Influenzelektrizität bedecken. Die im Abschnitt beschriebenen Versuche mit dem Faradayschen Gefäß lehren, daß die Menge der induzierten Elektrizität jeder Art stets gleich der Induktion in der Hülle befindlichen Körpers ist. Das Feld außerhalb der Hülle ist so, als ob die Ladung des Körpers sich auf der Hülle verteilt, gleichviel ob der Körper seine Ladung wirklich durch Berührung der Hülle auf diese übertragen hat oder mit seiner Ladung im Hohlraum der Hülle sich befindet, und dieser Satz gilt, gleichviel groß die umschließende Hülle ist, und welche Stelle im Inneren der Hülle der geladene Körper einnimmt. Daraus folgt, daß der gesamte Kraftfluß durch eine einen geladenen Körper umschließende Fläche  $F$  gleich der durch jede derartige Fläche den gleichen Betrag hat. Bedeute  $e$  die gegebene Ladung,  $e_i$  die ganze auf der Außenseite der Hülle befindliche Elektrizitätsmenge, so ist  $e = e_i$  und

$$\int \mathcal{E} \, ds = h e$$

oder für eine beliebige mathematische Fläche, die den Körper umschließt:

$$\int \mathcal{E}_n \, ds = h e.$$

Die gleiche Beziehung kann man in anderer Form ausdrücken, indem man statt des ganzen geladenen Körpers nur ein Stück seiner Oberfläche in Betracht zieht. Es sei  $ds$  ein Element der Oberfläche. In allen Punkten seines Umfanges denke man sich Kraftröhren. Diese bilden zusammen eine Kraftröhre, die sich im allgemeinen mit veränderlichem Querschnitt durch das Feld hindurch erstreckt. Man schließt man mit geeigneten Doppelplatten die Größe des Kraftflusses durch den Querschnitt dieser Röhre an verschiedenen Stellen, so findet man, daß er überall konstant ist. Betrachtet man also ein Stück dieser Röhre zwischen den Querschnitten  $q_1$  und  $q_2$ , so kann man sagen, daß durch den Querschnitt  $q_1$  ein ebenso großer Kraftfluß eintritt, wie durch den Querschnitt  $q_2$  austritt; und betrachtet man die Elektrizitätsmenge, die auf der Querschnitt der Röhre verteilt ist, da, wo sie auf einen metallischen Körper trifft, so ist diese Elektrizitätsmenge derjenigen an Größe gleich, die auf der Vorzeichen entgegengesetzt, welche auf der Oberflächenseite hervorgeht der die Röhre ausgeht.

Es ist leicht ersichtlich, wie der gesamte Kraftfluß eines Körpers aus der Summation des Kraftflusses der einzelnen Kraftröhren seiner Oberflächenelemente hervorgeht.

Ein Feld, das sich in der beschriebenen Weise in Kraftröhren zerlegen läßt, bezeichnet man als ein konstantes Kraftfluß zerlegen läßt, bezeichnet man als ein förmiges oder solenoidales Feld.

## 14. Das zweite Differentialgesetz des elektrischen Feldes.

Wir bilden nunmehr den Ausdruck für den Kraftfluß, der durch die 6 Flächen eines Elementarparallelepipedons mit den Kanten  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  hindurchtritt. Die Normalen der Flächen sollen stets nach außen

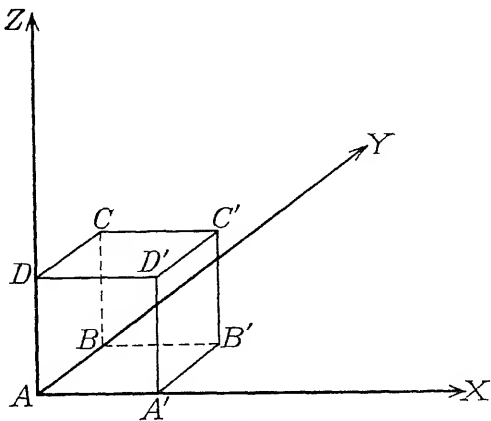


Fig. 10.

positiv gerechnet werden. Ist  $\mathfrak{E}_x$  die normale Kraftkomponente an der Fläche ABCD, so ist sie  $\mathfrak{E}_x + \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} dx$  an der Fläche A'B'C'D', und die Summe des Kraftflusses für die beiden gegenüberliegenden Flächen hat den Betrag:

$$\left( \mathfrak{E}_x + \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} dx \right) dy dz - \mathfrak{E}_x dy dz = \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} dx dy dz.$$

Entsprechend ergibt sich für die beiden Flächen senkrecht zur Y-Achse:  $\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial y} dx dy dz$ , und für die beiden Flächen senkrecht zur Z-Achse:  $\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial z} dx dy dz$ . Der gesamte Kraftfluß, der durch die 6 Flächen hindurchtritt, hat also den Betrag:

$$\left( \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

Denken wir uns im Innern des Parallelepipedons die Elektrizitätsmenge  $de$  enthalten, so werden wir nach den Ergebnissen des vorigen Abschnittes den Betrag des gesamten Kraftflusses  $= h de$  setzen können. Da  $dx dy dz$  gleich dem Volumen  $dv$  des Parallelepipedons ist, so kann



dem sie enthalten ist, als die räumliche Dichte  $\rho$  der Elektrizität bezeichnen. Dann gilt die Beziehung:

$$\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial z} = h \cdot \rho.$$

Enthält das Parallelepipeton gar keine elektrische Ladung in seinem Innern, so ist:

$$\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial z} = 0,$$

d. h. der in das Volumen eintretende Kraftfluß ist gleich dem aus demselben aus tretenden. Diese Gleichungen<sup>1)</sup> stellen uns die im vorigen Abschnitt erwähnten Gesetze in Form von Differentialgleichungen dar.

Indem man so die Elektrizitätsmenge als die Quelle des Kraftfeldes auffaßt, bezeichnet man ein Feld, für das die Gleichung (15) gilt, als ein quellenfreies Feld.

Während das erste Differentialgesetz (s. Abschnitt 9) eine Beziehung über die Aenderung der elektrischen Kraft beim Fortschreiten in der Richtung einer Niveaufläche enthält, bestimmt das zweite Differentialgesetz die Aenderung für ein Fortschreiten längs der Kraftlinie selbst.

Der gewonnene Ausdruck für den Kraftfluß durch ein Raumelement  $dv$  enthält die Größe  $dv$  als Faktor. Denken wir uns einen Raum von endlichen Abmessungen, so können wir das Integral des Kraftausdruckes über den ganzen Raum bilden. Es folgt schon aus den vorhergehenden Betrachtungen, daß dieses Raumintegral identisch mit dem Integral des Kraftflusses durch die geschlossene Oberfläche des Raumes sein muß. Wir wollen aber den Beweis dafür nicht führen unter Anwendung eines Hilfssatzes, von dem auch kein Gebrauch zu machen sein wird.

## 15. Der Gaußsche Satz.

Es bezeichne  $dv$  ein Raumelement, und  $\frac{\partial F}{\partial x}$  sei der Divergenzquotient einer Funktion  $F$ , welche innerhalb eines von einer geschlossenen

<sup>1)</sup> In der Sprache der Vektoranalysis nennt man den Ausdruck

$$\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial z}$$

die Divergenz des Vektors  $\mathcal{E}$  und bezeichnet ihn mit dem Symbol  $\text{div } \mathcal{E}$ . Die Gleichungen (14) und (15) lauten dann:

$$\text{div } \mathcal{E} = h \cdot \rho \quad \text{und} \quad \text{div } \mathcal{E} = 0,$$

wobei  $h$  einen von der Wahl der Einheit der Elektrizitätsmenge abhängigen Faktor darstellt.

Fläche  $S$  umgrenzten Raumes überall endlich, stetig und eindeutig ist. Es soll betrachtet werden das über den ganzen innerhalb  $S$  liegenden Raum zu erstreckende Integral

$$\int \frac{\partial F}{\partial x} dv = \int \frac{\partial F}{\partial x} dx dy dz.$$

Man kann die Integration partiell nach  $x$  ausführen, d. h. man kann zunächst eine Summation derjenigen Elemente  $\frac{\partial F}{\partial x} dv$  des Integrals vor-

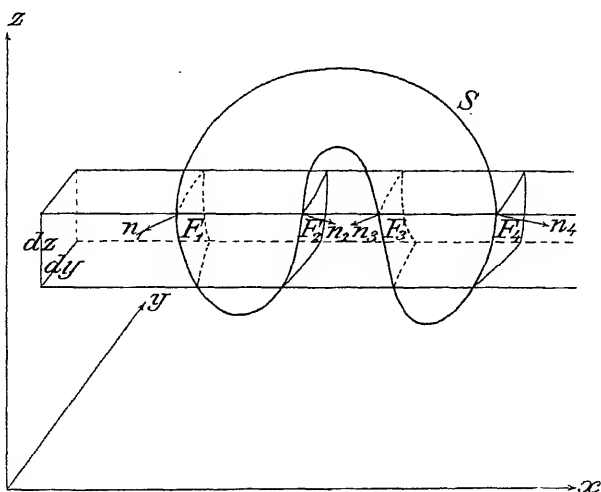


Fig. 11.

nehmen, welche auf einer beliebigen, zur  $x$ -Achse parallelen Geraden liegen. Dadurch erhält man:

$$dy dz \int \frac{\partial F}{\partial x} dx = dy dz (-F_1 + F_2 - F_3 + F_4 \text{ usw.}),$$

wobei die  $F_1, F_2$  usw. die Werte der Funktion  $F$  an denjenigen Stellen der Oberfläche von  $S$  bedeuten, an welchen sie von der zur  $x$ -Achse parallelen Geraden geschnitten wird. Der Allgemeinheit halber ist angenommen, daß diese Gerade die Fläche  $S$  mehrfach schneiden könne; jedenfalls muß die Anzahl der Schnittstellen gerade sein, weil  $S$  eine geschlossene Fläche ist. Wenn man die Gerade im Sinne der wachsenden  $x$  durchläuft, so bezeichnen  $F_1, F_3$  usw. mit ungeradem Index die Werte von  $F$  an den Eintrittstellen innerhalb des von  $S$  eingeschlossenen Raumes,  $F_2, F_4$  usw. mit geradem Index die Werte von  $F$  an den Austrittstellen (vgl. Fig. 11).

Konstruieren wir nun über der Basis des sehr kleinen Rechtecks

diese aus der Fläche  $S$  Stücke der Größe  $ds_1, ds_2$  etc. an der betrachteten Eintritt- bzw. Austrittsstellen aus, und zwar ist

$$dy \, dz = \pm ds \cdot \cos(n_x),$$

falls  $(n_x)$  den Winkel bezeichnet, welchen die Normale der an der jeweilig geschnittenen Stelle mit der  $x$ -Achse bildet. Das Vorzeichen ist so zu bestimmen, daß die rechte Seite positiv ist, d. h. die betrachteten Flächenstücke positive Größen sind. Es soll nun die positive Richtung von  $n$  nach außen weisen, d. h. aus dem eingeschlossenen Raum hinaus. Dann ergibt sich aus der Figur, daß zu setzen ist an den Eintrittsstellen:

$$dy \, dz = -ds_1 \cdot \cos(n_1 x) = -ds_3 \cdot \cos(n_3 x) \text{ usw.},$$

an den Austrittsstellen:

$$dy \, dz = +ds_2 \cdot \cos(n_2 x) = +ds_4 \cdot \cos(n_4 x) \text{ usw.}$$

Es ist daher:

$$dy \, dz \int \frac{\partial F}{\partial x} dx = F_1 \cos(n_1 x) ds_1 + F_2 \cos(n_2 x) ds_2 +$$

Vollführt man nun noch eine Integration nach  $y$  und  $z$ , so erhält man das ganze betrachtete Raumintegral zu erhalten, so heißt das, man summiert die Produkte  $F \cos(n_x) ds$  über die ganze Oberfläche von  $S$  summiert.

Es ist daher

$$\int \frac{\partial F}{\partial x} dv = \int F \cos(n_x) ds,$$

wobei auf der rechten Seite  $F$  die Werte bezeichnet, welche die Funktion auf der Fläche  $S$  annimmt. Das ursprünglich über einen dreierstreckenden Integral ist also durch diesen Hilfssatz, den man den Gaußschen Satz nennt, in ein solches verwandelt, welches über die Oberfläche des Raumes zu erstrecken ist. Aus dem Gange des Beweises sieht man, daß  $F$  innerhalb des betrachteten Raumes eindeutig, endlich und stetig sein muß, weil sonst bei der partiellen Integration nicht nur Randwerte  $F_1, F_2$  etc. von  $F$  auftreten würden, sondern auch Werte, die sich auf das Innere beziehen.

Wendet man diesen Satz auf das Raumintegral

$$\iiint \left( \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz$$

an, so erhält man dafür das Oberflächenintegral

$$\int [\mathcal{E}_x \cos(n_x) + \mathcal{E}_y \cos(n_y) + \mathcal{E}_z \cos(n_z)] ds = \int \mathcal{E}_n ds,$$

also den Kraftfluß durch die ganze Oberfläche des Raumes, und

$$\int \mathcal{E}_n ds = h \int \rho \, dv = h(e)$$

wenn (e) die algebraische Summe aller von der Oberfläche umschlossenen Elektrizitätsmengen bedeutet.

## 16. Die Flächendichte.

In den meisten Fällen des elektrostatischen Gleichgewichts ist die Elektrizität nicht im Raume, sondern auf der Oberfläche leitender Körper verteilt. Wenn auf dem Flächenelement  $ds$  die Elektrizitätsmenge  $e$  haftet, so nennt man das Verhältnis  $e/ds$  die Flächendichte der Elektrizität. Sie soll mit  $\eta$  bezeichnet werden. Also

$$e = \eta \cdot ds. \quad (18)$$

Wir denken uns auf der Umrandung des Flächenelementes  $ds$  die Kraftlinien errichtet und aus dem so gebildeten Zylinder eine unendlich dünne Scheibe herausgeschnitten durch zwei Flächen, die auf beiden Seiten von  $ds$  parallel zu diesem Flächenelement liegen. Wendet man den im vorigen Abschnitt gefundenen Satz über den Kraftfluß auf dieses Raumelement an, so ist der Kraftfluß durch die Zylinderwandungen, die ja der Kraft parallel liegen, Null, ebenso durch diejenige Fläche, die im Innern des leitenden Körpers liegt. Es bleibt nur der Kraftfluß durch die außerhalb des geladenen Körpers parallel zu  $ds$  liegende Fläche übrig, und dieser ist  $\mathcal{E}_n ds$ , wenn  $\mathcal{E}_n$  den Wert der elektrischen Kraft an der Oberfläche des Körpers bedeutet. Daraus folgt

$$\mathcal{E}_n = h \cdot \eta. \quad (19)$$

Die elektrische Kraft an der Oberfläche eines geladenen Leiters ist der Flächendichte proportional. Da sie im Innern des Leiters Null ist, so ändert sie sich beim Durchgang durch die Leiteroberfläche sprungweis um  $h\eta$ .

Wäre der Fall denkbar, daß die Elektrizität nicht auf der Oberfläche eines leitenden Körpers, sondern in derselben Weise frei im Raum auf einer Fläche angeordnet wäre, so würde der Kraftfluß durch die beiden Grundflächen des Zylinders in Betracht kommen und man hätte:

$$\mathcal{E}_{+n} + \mathcal{E}_{-n} = h \cdot \eta, \quad (20)$$

wenn  $\mathcal{E}_{+n}$  und  $\mathcal{E}_{-n}$  die elektrischen Kräfte zu beiden Seiten der Fläche, genommen jedesmal in Richtung der Normalen, bedeuten. Bezieht man aber beide Kräfte auf die gleiche Richtung, indem man die eine Normalenrichtung als die positive Richtung festsetzt, so ist auf der anderen Seite die Kraft mit entgegengesetztem Vorzeichen zu rechnen ( $\mathcal{E}_{+n} = \mathcal{E}_n^+$ ,  $\mathcal{E}_{-n} = -\mathcal{E}_n^-$ ) und man hat

$$\mathcal{E}_n^+ - \mathcal{E}_n^- = h \eta. \quad (20')$$

Die Kraft nimmt also beim Durchgang durch die Fläche im Sinne der Normalen um  $h\eta$  sprungweis zu.

Der betrachtete Fall ist physikalisch nicht zu ver-  
gegen kommt es häufig vor, daß die elektrische Ladung  
fläche eines Isolators ausgebreitet ist. Wie in diesem Falle  
zu gestalten ist, um die Eigenschaften des Isolators zu  
bringen, ist später zu besprechen (siehe S. 68).

## 17. Festsetzung der Einheit der Elektrizität

Um schließlich dem in den Formeln vorkommenden  
Faktor  $h$  einen bestimmten Wert zu erteilen, müssen wir eine  
stimmung über das Maß treffen, in dem wir die Elektrizitäts-  
drücken wollen. Da der Kraftfluß der Elektrizitätsmenge  
ausgeht, die elektrische Kraft aber der ponderomotorischen  
proportional ist, so kann man ein Maß der Elektrizitäts-  
Messung der ponderomotorischen Kraft gewinnen, wenn man  
zugrunde legt, für das sich das Integral über den Kraftfluß  
auswerten läßt. Ein solches Feld ist das Feld einer kugelförmigen  
Kugel, dessen Kraftverteilung durch das Coulombsche Gesetz  
ist. Coulomb<sup>1)</sup> maß mit der Torsionswaage die ponderomotorische  
Kraft zwischen zwei geladenen Kugeln, deren Radien klein  
ihren Abstand, und fand sie dem Quadrat des Abstandes  
proportional. Bezeichnet man also mit  $\mathfrak{F}$  die ponderomotorische  
die beiden Kugeln mit den Ladungen  $e_1$  und  $e_2$  im Abstand  $r$   
ander ausüben, so kann man schreiben:

$$\mathfrak{F} = \pm k \cdot \frac{e_1 e_2}{r^2},$$

wenn man unter  $k$  wieder eine von der Wahl der Einheit  
hängige Konstante versteht. Das elektrische Feld einer Kugel  
mit der Ladung  $e$  hat also im Abstand  $r$  die Stärke

$$\mathfrak{E} = k \cdot \frac{e}{r^2}.$$

Denkt man sich in diesem Abstand um die Kugel eine  
Kugelfläche gelegt, so ist der gesamte Kraftfluß durch

$$\int \mathfrak{E}_n ds = k \cdot \frac{e}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = 4\pi k e.$$

Dieses Integral hat aber in unserer obigen Bezeichnung  
Wert  $h \cdot e$ . Also besteht zwischen den beiden Konstanten  
stanten  $h$  und  $k$  die Beziehung

$$h = 4\pi k.$$

<sup>1)</sup> Coulomb, Mém. de l'Acad. de Paris 1785, S. 569—611.  
Üebersetzung von W. Kämpfer, Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften.

Der Festsetzung der Einheit der Elektrizitätsmenge hat man nach dem Vorgange von Gauß das Coulombsche Gesetz zugrunde gelegt. Denkt man sich nämlich die beiden Kugeln mit gleich großen Elektrizitätsmengen  $e$  geladen, so folgt aus dem Coulombschen Gesetz

$$e = \frac{r \cdot \sqrt{\tilde{\kappa}}}{\sqrt{k}}$$

und die Größe  $e$  der Ladung wird in einem ganz bestimmten Zahlenwerte ausgedrückt, wenn man  $r$  und  $\tilde{\kappa}$  in den sonst in der Physik üblichen Einheiten gemessen denkt und dem Faktor  $k$  einen ganz bestimmten Zahlenwert erteilt.

Als Einheit der Länge wird in der Physik das Zentimeter, als Einheit der Masse das Gramm, als Einheit der Zeit die Sekunde gewählt. Dieses System von Einheiten nennt man das Zentimeter-Gramm-Sekunden-System oder das cgs-System. Die Einheit der Kräfte ist in diesem System diejenige Kraft, welche der Masseneinheit  $1\text{ g}$  in der Zeiteinheit  $1\text{ sek}$  einen Geschwindigkeitszuwachs von  $1 \frac{\text{cm}}{\text{sek}}$  erteilt; diese Kräfteinheit wird  $1\text{ Dyne}$  genannt.

Drückt man  $r$  und  $\tilde{\kappa}$  in diesen Maßen aus und setzt man den Faktor  $k=1$ , so erhält man die Ladungen  $e$  in einer Einheit ausgedrückt, die man als die elektrostatische Einheit in absolutem Maße oder im cgs-System bezeichnet. Man kann ihre Definition durch folgenden Satz aussprechen:

Ein sehr kleiner Körper hat die Ladung  $1$ , wenn er auf einen zweiten sehr kleinen, mit derselben Elektrizitätsmenge geladenen Körper im Abstände von  $1\text{ cm}$  die Kraft von  $1\text{ Dyne}$  ausübt.

Aus der Festsetzung  $k=1$  folgt  $h=4\pi$ . Der gesamte Kraftfluß, der von der Ladung  $e$  ausgeht, ist also, in dieser Einheit ausgedrückt,  $=4\pi e$ . Für die Einheit des Kraftflusses hat sich — besonders in der Technik — die Bezeichnung „1 Kraftlinie“ eingebürgert. Man sagt dann, daß  $4\pi e$  Kraftlinien von der Ladung  $e$  ausgehen<sup>1)</sup>.

Das ganze aus dieser Wahl für die Einheit der Elektrizitätsmenge hervorgehende System von Einheiten der verschiedenen elektrischen Größen nennt man das absolute elektrostatische Maßsystem<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Ausführlicheres darüber siehe im 2. Kapitel, Abschnitt 11.

<sup>2)</sup> Infolge der gemachten Festsetzungen sind viele Gleichungen der Elektrizitätslehre mit dem Faktor  $4\pi$  behaftet. Um diese Unbequemlichkeit zu vermeiden, ist von Heaviside vorgeschlagen worden, nicht  $k$ , sondern  $h=1$ , also  $k=\frac{1}{4\pi}$  zu setzen. Dann ist die Elektrizitätsmenge durch dieselbe Zahl ausgedrückt wie der von ihr ausgehende Kraftfluß. Das Coulombsche Gesetz aber lautet:

$$\tilde{\kappa} = \frac{e_1 e_2}{r^2}$$

## 18. Die Dimension der Elektrizitäts-

Der numerische Wert der Elektrizitätsmenge wird, wenn wir andere Einheiten der Masse, Länge und Zeit als sie im cgs-System angenommen sind.

Nicht jede zu messende physikalische Größe ändert ihren Wert, wenn jene Einheiten anders gewählt werden. So ist der optische Brechungsindex eines Körpers vollkommen vom Maßsystem unabhängig. Diese Art von physikalischen Größen kann man dimensionslos zu nennen, oder auch dimensionslos. Wenn man dagegen von physikalischen Größen redet, denen die Elektrizitätsmenge gehört, von ihrer Dimension in den Grundeinheiten besitzen, indem man darunter die Dimensionen derselben versteht, welche in der Formel der betrachteten Größen auftreten. Es ist dies eine Verallgemeinerung der Dimension nach welchem ein Gebilde, welches durch das Produkt zweier Längen gemessen wird — also eine Fläche oder ein Volumen — der zweiten oder dritten Dimension bezeichnet wird. Die Geschwindigkeit von der ersten Dimension der Länge und der ersten Dimension der Zeit. Man kann dies formell zum Ausdruck bringen, daß man die Länge mit  $L$ , die Masse mit  $M$  bezeichnet und die Dimensionen der betrachteten Größen als Exponenten neben diese Grundeinheiten setzt.

Diese Dimensionsformeln sollen im folgenden angegeben und bezeichnet werden, daß man die betreffende physikalische Größe in Klammern setzt.

Die Dimensionsformel einer Geschwindigkeit  $v$  ist

$$[v] = LT^{-1},$$

einer Beschleunigung  $g$

$$[g] = LT^{-2},$$

einer Kraft  $\mathfrak{F}$

$$[\mathfrak{F}] = MLT^{-2}.$$

Die Ladung  $1$  ist nach dieser Festsetzung diejenige Ladung, die an einem Punkt im Abstand  $1$  cm die Kraft  $\frac{1}{4\pi}$  Dynen ausübt; daher wird ein

Einheiten durch eine um  $\sqrt{4\pi}$  mal größere Zahl ausgedrückt, als in dem absoluten Maßsystem. Von der Festsetzung  $h = 1$  wird in Büchern Gebrauch gemacht, u. a. auch in der Enzyklopädie der Wissenschaften. Wir wollen aber in diesem Buche an der Festsetzung halten, um nicht den Zusammenhang mit dem absoluten Maßsystem zu verlieren.

Aus der Formel  $e = r \cdot \sqrt{\mathfrak{E}}$  ergibt sich daher die Dimensionsformel der Elektrizitätsmenge zu

$$[e] = M^{1/2} L^{3/2} T^{-1}. \quad (23)$$

Die Dimensionsformel der Feldstärke (der elektrischen Kraft) folgt aus der Ueberlegung, daß das Produkt aus der Elektrizitätsmenge in die Feldstärke die Dimension einer Kraft  $\mathfrak{E}$  haben muß. Bezeichnet man die Feldstärke (elektrische Kraft) mit  $\mathfrak{E}$ , so ist also

$$[e] \cdot [\mathfrak{E}] = [\mathfrak{E}],$$

also

$$[\mathfrak{E}] = M^{1/2} L^{-1/2} T^{-1}. \quad (24)$$

Die Dimensionsformel des Potentials ergibt sich durch die Definition des Potentials als Linienintegrals der elektrischen Kraft. Es ist also

$$[V] = [\mathfrak{E}] [L] = M^{1/2} L^{1/2} T^{-1}.$$

Die Dimensionsformeln leisten gute Dienste, wenn man von einem System von Grundeinheiten zu einem anderen übergehen will. Wählt man z. B. das Milligramm und das Millimeter als Massen- und Längeneinheit, d. h. geht man vom cgs-System zum mm-mg-s-System über, und unterscheidet man die neuen Einheiten durch obere Striche von den alten, so ist zu setzen

$$M = 1000 M', \quad L = 10 L', \quad T = T'.$$

Setzt man diese Werte in die Dimensionsformel (23) der Elektrizitätsmenge, so folgt

$$[e] = 1000 M'^{1/2} L'^{3/2} T'^{-1}.$$

Der numerische Wert einer bestimmten Elektrizitätsmenge ist also beim Uebergang vom cgs-System zum mm-mg-s-System mit 1000 zu multiplizieren.

Außerdem sind die Dimensionsformeln noch nützlich zur Kontrolle einer längeren Rechnung, durch die irgendwelche Beziehungen zwischen verschiedenen physikalischen Größen hergestellt werden. Denn nur Größen gleicher Dimension können einander gleich sein; nie hat es z. B. einen Sinn, 1 cm gleich 1 sek zu setzen. In jeder Formel können daher durch Gleichheits-, Additions- oder Subtraktionszeichen nur Größen gleicher Dimension verbunden sein.

## 19. Zusammenfassung der Gleichungen für das elektrostatische Feld.

Unter Zugrundelegung des absoluten elektrostatischen Maßsystems können wir nunmehr die Differentialgleichungen, welche die Eigenschaften



über der elektrostatischen Erregung charakterisieren zusammenfassen<sup>1)</sup>:

Im ganzen Raume gilt:

$$\text{I.} \quad \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial y} = \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x}; \quad \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial z} = \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial y}; \quad \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x} =$$

$$\text{II.} \quad \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial z} = 4\pi\rho$$

wenn  $\rho$  die räumliche Dichte der Elektrizität an der b stelle bezeichnet.

In Leitern gilt

$$\text{III.} \quad \mathfrak{E} = 0.$$

An der Oberfläche geladener Leiter aber gilt:

$$\text{IV.} \quad \mathfrak{E}_n = 4\pi\eta,$$

wenn  $\eta$  die Flächendichte der elektrischen Ladung be I folgt, daß die elektrische Kraft ein Potential hat, so Einführung des Potentials  $V$  das System dieser C folgendermaßen schreiben:

$$\text{I'}. \quad \mathfrak{E}_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \mathfrak{E}_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad \mathfrak{E}_z =$$

$$\text{II'}. \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \Delta V = -4\pi\rho \text{ (Poissonsche)}$$

$$\text{III'}. \quad V = \text{const.}$$

$$\text{IV'}. \quad \frac{\partial V}{\partial n} = -4\pi\eta.$$

Bei den gewöhnlichen Fällen des elektrostatischen haften die Ladungen auf Leitern. Die räumliche Di zität ist in diesem Falle im ganzen Raume gleich Null ganzen Raume die Gleichung

$$\Delta V = 0 \text{ (Laplacesche G)}$$

Auf den Leitern hat  $V$  konstante Werte, und an de Leiter gilt die Gleichung:

$$\frac{\partial V}{\partial n} = -4\pi\eta.$$

Da die elektrische Kraft durch den negativen Grad

<sup>1)</sup> Vektoranalytisch lauten die Gleichungen:

tials gegeben ist, so ist die Kraftverteilung in einem elektrischen Felde bekannt, sobald die Verteilung der Potentialwerte bekannt ist. Es entsteht also die Frage, ob durch die aufgestellten Gleichungen das Potential eindeutig bestimmt ist, und wie es sich für eine gegebene Elektrizitätsverteilung berechnen läßt. Wir bedürfen für die Beantwortung dieser Fragen eines anderen Hilfssatzes.

## 20. Der Greensche Satz.

In Abschnitt 15 war für eine Funktion, die in einem von der Fläche  $S$  umschlossenen Raume überall endlich, eindeutig und stetig ist, der Satz abgeleitet [S. 32, Formel (16)]:

$$\int \frac{\partial F}{\partial x} dv = \int F \cdot \cos(nx) ds.$$

Es sollen jetzt  $U_1$  und  $U_2$  zwei Funktionen sein, die in dem betrachteten Raume endlich, eindeutig und stetig sind, ebenso die ersten Ableitungen von  $U_2$ , und es soll

$$F = U_1 \frac{\partial U_2}{\partial x}$$

gesetzt werden.

Führt man dieses Produkt in die obige Gleichung ein, bildet die entsprechenden Gleichungen für  $y$  und  $z$  und addiert alle drei Gleichungen, so erhält man:

$$\begin{aligned} \int dv \left[ \frac{\partial U_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial U_2}{\partial x} + \frac{\partial U_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial U_2}{\partial y} + \frac{\partial U_1}{\partial z} \cdot \frac{\partial U_2}{\partial z} + U_1 \Delta U_2 \right] \\ = \int U_1 \frac{\partial U_2}{\partial n} ds. \end{aligned} \quad (30)$$

Diese Gleichung wollen wir die erste Form des Greenschen Satzes nennen. Hinsichtlich des Vorzeichens möge ausdrücklich bemerkt werden, daß die von dem betrachteten Raume nach außen gezogene Normale als positive Normalenrichtung gerechnet ist.

Wenn auch die ersten Ableitungen von  $U_1$  in dem Raume endlich, eindeutig und stetig sind, so gilt ebenso:

$$\begin{aligned} \int dv \left[ \frac{\partial U_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial U_2}{\partial x} + \frac{\partial U_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial U_2}{\partial y} + \frac{\partial U_1}{\partial z} \cdot \frac{\partial U_2}{\partial z} + U_2 \Delta U_1 \right] \\ = \int U_2 \frac{\partial U_1}{\partial n} ds. \end{aligned}$$

Durch Subtraktion der beiden Gleichungen folgt des Greenschen Satzes:

$$\int dv [U_1 \Delta U_2 - U_2 \Delta U_1] = \int ds \left[ U_1 \frac{\partial U_2}{\partial n} - U_2 \frac{\partial U_1}{\partial n} \right]$$

Setzt man anderseits in der ersten Form

$$U_1 = U_2 = U,$$

so erhält man:

$$\int dv \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + U \Delta U \right] = \int ds U \frac{\partial U}{\partial n}$$

eine Gleichung, die wir die dritte Form des Greenschen Satzes nennen wollen.

Aus der letzten Gleichung läßt sich der folgende Satz ableiten. Wenn  $U$  innerhalb des betrachteten Raumes der Greenschen Bedingung genügt und an der Oberfläche des Raumes entweder  $U = 0$  ist, so ist  $U$  in dem ganzen Raume  $= 0$  oder wenigstens für die genannten Bedingungen folgt aus dem obigen Satz:

$$\int dv \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right] = 0$$

Das Verschwinden dieses Raumintegrals ist aber dann und nur dann der Fall, wenn alle seine einzelnen Elemente verschwinden, das heißt, wenn  $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial z} = 0$  werden können. Folglich ist im ganzen Raume

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial z} = 0$$

d. s.  $U$  eine Konstante, und wenn  $U$  an der Grenze des Raumes  $= 0$  ist, so ist es im ganzen Raume  $= 0$ .

## 21. Eigenschaften des Potentials. Fall einer kugelförmigen Ladung.

Wenn man die Sätze des vorstehenden Abschnittes auf das Potential  $V$  anwenden will, so muß man zunächst die Frage stellen, ob die Funktion  $V$  mit ihren ersten Ableitungen in dem in Betracht kommenden Raume überall endlich, eindeutig und stetig ist. Um eine Vorstellung von der Form dieser Funktion in den verschiedenen Sonderfälle zu bekommen, untersuchen wir den Fall einer kugelförmigen Ladung, den wir als idealen Grenzfall des von Coulomb'schen Feldes ansehen können. Ist in einem Punkte  $O$  des Raumes eine Ladung  $+e$  oder  $-e$  vorhanden, so fällt die elektrische Kraft

des Raumes in die Richtung des von oder nach  $O$  gezogenen Radius  $r$  und hat den Betrag  $e/r^2$ . Da  $e/r^2 = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{e}{r} \right)$  ist, so hat das Potential  $V$  in diesem Felde den Wert

$$V = \pm \frac{e}{r} + C, \quad (31)$$

wobei  $C$  eine unbestimmte Konstante ist. Da die Bestimmungsgleichungen für  $V$  nur Differenzen bzw. Differentialquotienten von  $V$  enthalten, so ist  $V$  in allen Fällen nur bis auf eine additive Konstante bestimmt. Die absoluten Beträge von  $V$  hängen von der Wahl des Nullpunktes der Potentialzählung ab, und dieser Nullpunkt ist willkürlich. Es ist üblich, die obige Konstante  $C = 0$  zu setzen, d. h. dem Potential, das in unendlicher Entfernung von der Ladung  $e$  besteht, den Wert 0 beizulegen<sup>1)</sup>. Hat man statt der punktförmigen Ladung eine elektrische Verteilung von endlichen Dimensionen, die ganz im Endlichen liegt, so wird deren Wirkung in einem unendlich entfernten Punkte nicht anders sein wie die einer punktförmigen Ladung, und man wird auch in diesem Falle dem Potential nach der üblichen Zählung den Wert 0 im Unendlichen beilegen.

Das Potential  $V = \frac{e}{r}$  einer punktförmigen Ladung wird im Punkt  $O$  selber, wo  $r = 0$  wird, unendlich groß. Denken wir uns diesen Punkt durch eine unendlich kleine Kugelfläche von dem umgebenden Raum ausgeschlossen, so ist  $V$  für den ganzen übrigen Raum endlich, eindeutig und stetig und genügt der Gleichung

$$\Delta V = 0.$$

Denn wenn ein beliebiger Punkt des Feldes  $P$  die Koordinaten  $x, y, z$ ,  $O$  die Koordinaten  $x_0, y_0, z_0$  hat, und  $r$  die Strecke  $PO$  bedeutet, so ist

$$r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{x - x_0}{r^3}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(x - x_0)^2}{r^5}$$

und entsprechend

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(y - y_0)^2}{r^5}$$

<sup>1)</sup> Um bei praktischen Messungen einen bestimmten Nullpunkt der Potentialzählung zu gewinnen, ist es üblich, das Potential der Erde willkürlich gleich Null

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(z-z_0)^2}{r^5}$$

woraus durch Summation der drei Gleichungen  $\Delta \frac{1}{r}$

In den praktischen Fällen der Elektrostatik hat man mit punktförmigen Ladungen zu tun, sondern mit in manchen Fällen auch mit räumlicher Verteilung. Haben wir eine flächenförmige Verteilung, so ist das Potential endlich und stetig auch beim Durchgang durch eine geladene Fläche; denn die elektrische Kraft und die Arbeit der Verschiebung einer Elektrizitätsmenge hat auch an der Fläche immer endliche Beträge. Die elektrische Kraft aber ist der Differentialquotient des Potentials erfährt beim Durchgang durch eine geladene Fläche, wie wir in Abschnitt 16 gesehen haben, eine Sprung. Haben wir also geladene Leiter, so müssen wir deren Begrenzungen des Raumes behandeln, um Diskontinuitäten der Differentialquotienten von  $V$  in dem betrachteten Raume zu vermeiden.

Anders ist es, wenn eine räumliche Verteilung der Ladung liegt. Eine solche kann man auffassen als eine Fläche, die aus unendlich vielen einander unendlich nahe benachbarten Elementen besteht, denen die Dichte  $\eta$  ihrer Belegung unendlich klein ist. Nach den aus den oben besprochenen Eigenschaften der Flächenbelegungen folgt, daß das Potential  $V$  von Raumbelegungen über den ganzen Raum hinweg stetig ist. Ferner folgt, daß auch die elektrischen Kräfte, die die Differentialquotienten des Potentials  $V$ , stetig sind, weil die Dichte  $\eta$  der Flächenbelegungen, welche die räumliche Verteilung ersetzen kann, unendlich klein ist, und daher auch die elektrischen Kräfte unendlich klein sind.

Haben wir also eine gegebene Verteilung der Elektrizität auf Leitern, anderseits im Raume, so können wir das Potential in den ersten Ableitungen im ganzen Raume außerhalb der Leiter eindeutig und stetig betrachten und können uns dies denken einerseits durch die Oberfläche der Leiter, anderseits unendlich ferne, den ganzen Raum umschließende Kugel. Das Potential genügt dann folgenden Bedingungen:

$$\left. \begin{array}{l} \text{im ganzen Raume: } \Delta V = -4\pi\rho \\ \text{an den Leiteroberflächen: } \frac{\partial V}{\partial n} = -4\pi\eta \\ \text{an der unendlich fernen Fläche: } V = 0. \end{array} \right\}$$

## 22. Eindeutigkeit des Feldes bei gegebener Verteilung der Elektrizität.

Daß das Potential durch die genannten Bedingungen bei gegebener Verteilung der Elektrizität vollständig und eindeutig bestimmt ist, kann man durch folgenden indirekten Schluß beweisen. Gesetzt, es gäbe zwei Funktionen  $V_1$  und  $V_2$ , die beide den obigen Bedingungsgleichungen genügten. Dann würde ihre Differenz  $V_1 - V_2 = V'$  folgenden Bedingungen genügen:

im ganzen Raum  $V'$  mit seinen ersten Ableitungen endlich, eindeutig und stetig und  $\Delta V' = 0$ ,

an der Leiteroberfläche  $\frac{\partial V'}{\partial n} = 0$ ,

an der unendlich fernen Fläche  $V' = 0$ .

Eine derartige Funktion aber hat, wie am Schlusse des Abschnittes 20 bewiesen wurde, im ganzen Raum den Wert 0. Also ist  $V_1 = V_2$  und es gibt nur eine Funktion, die obigen Gleichungen genügt.

## 23. Die allgemeine Form des Potentials.

Die Anwendung des Greenschen Satzes in seiner zweiten Form auf den Raum, in dem das Potential endlich, eindeutig und stetig ist, ermöglicht es, für eine gegebene Verteilung der Elektrizität im Raume und auf leitenden Körpern den Wert des Potentials in einem beliebigen Punkte P des Raumes in ganz allgemeiner Form hinzuschreiben. Wir wollen in dem Greenschen Satz (30')

$$U_1 = V, \quad U_2 = \frac{1}{r}$$

setzen, wobei  $r$  den Abstand eines beliebigen Raum- oder Flächenelementes vom Punkte P bedeuten soll. Damit diese Funktion ebenso wie  $V$  im ganzen zu betrachtenden Raume endlich sei, müssen wir uns den Punkte P durch eine unendlich kleine Kugel von diesem Raume ausgeschlossen und das Oberflächenintegral auch über die Oberfläche dieser Kugel erstreckt denken. Da

$$\Delta V = -4\pi\rho, \quad \Delta \frac{1}{r} = 0$$

ist, so wird das Raumintegral (30')

$$\int d\tau [U_1 \Delta U_2 - U_2 \Delta U_1] = 4\pi \int \frac{\rho}{r} d\tau.$$

Das Oberflächenintegral  $\int ds \left[ U_1 \frac{\partial U_2}{\partial n} - U_2 \frac{\partial U_1}{\partial n} \right]$  muß über sämt-

kleine Kugel und über die unendlich ferne Fläche erstreckt werden. Jede Fläche zerfällt es in zwei Summanden, die einzeln zu behandeln sind.

Für jede Leiteroberfläche hat  $V$  einen konstanten Wert.  $V_c \dots$  und  $\frac{\partial V}{\partial n}$  den Wert  $-4\pi\eta$ , wenn die positive Richtung Normalen vom Leiter fort in das Innere des Raumes gerechnet wird.

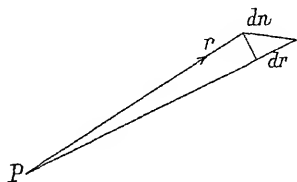


Fig. 12.

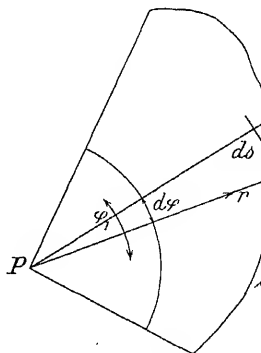


Fig. 13.

Bei der Ableitung des Greenschen Satzes war die positive Richtung nach außen gerechnet. Daher muß hier für  $\frac{\partial V}{\partial n}$  das Negative umgekehrt werden. Dann hat für eine Leiteroberfläche das Integral

$$V_a \int ds \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - 4\pi \int \eta ds.$$

Das erste dieser Integrale verschwindet, wenn P außerhalb der Fläche liegt. Um dies zu beweisen, berücksichtige man zunächst, daß

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n}$$

ist. Nun ist aber  $\frac{\partial r}{\partial n} = \cos(nr)$ , d. h. gleich dem Kosinus des Winkels  $(nr)$ , welchen die positive Richtung  $n$  mit der von P nach dem Element  $ds$  gerechneten Richtung  $r$  bildet. Dieses erkennt man bei Zugrundelegung der Definition des Differentialquotienten nach einer Richtung ohne weiteres aus einer einfachen geometrischen Konstruktion (vgl. Fig. 12).

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \cdot ds = -\frac{ds \cos(nr)}{r^2}.$$

Konstruiert man nun von der Begrenzung des Elementes  $ds$  einen Strahlenkegel, dessen Spitze in P liegt (vgl. Fig. 13), so schneidet dieser aus einer um P beschriebenen Kugelfläche ein Element  $d\Omega$  aus.

der Größe  $d\varphi$  aus, welches im Verhältniß  $1 : r^2$  kleiner ist als ein Stück, welches der betrachtete Strahlenkegel aus einer Kugelfläche vom Radius  $r$ , d. h. aus einer durch den Ort von  $ds$  gehenden Kugelfläche, deren Zentrum in  $P$  liegt, ausschneiden würde. Letzteres Stück wird aber gemessen durch die Projektion des Flächenelementes  $ds$  auf die Kugeloberfläche, d. h. durch  $ds \cdot \cos(nr)$ . Es ist daher

$$d\varphi = \pm \frac{\cos(nr)}{r^2} ds,$$

und zwar gilt das obere oder untere Zeichen, je nachdem  $\cos(nr) \gtrless 0$  ist. Man nennt  $d\varphi$  den räumlichen Winkel, unter dem  $ds$  von  $P$  aus erscheint;  $\varphi_1$  ist deshalb der räumliche Winkel, unter dem die endliche Fläche  $s$  von  $P$  aus erscheint.

Nennt man die positive Seite von  $s$  diejenige, nach welcher die positive Richtung ihrer Normalen  $n$  hinweist, so gelten in obiger Formel die  $+$  Vorzeichen für diejenigen Punkte, welche nach der negativen Seite von  $s$  zu liegen, die  $-$  Vorzeichen dagegen für die nach der positiven Seite von  $s$  zu liegenden Punkte.

Ist  $s$  eine geschlossene Fläche, und zeigt die positive Richtung von  $n$  nach außen, so ist der räumliche Winkel  $\varphi$  für alle im Inneren von  $s$  liegenden Punkte gleich  $+4\pi$ , für alle außerhalb liegenden Punkte Null, da dann zu jedem Winkelement  $d\varphi$  eines Flächenelementes  $ds$  mit positivem Vorzeichen ein gleich großes mit negativem Vorzeichen zugeordnet werden kann. Daraus folgt also, daß für einen Aufpunkt außerhalb des Leiters das Integral

$$\int ds \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r}$$

verschwindet. Für jeden Leiter reduziert sich also das ganze Oberflächenintegral auf das zweite Integral  $-4\pi \int \frac{\eta}{r} ds$ .

Für die unendlich kleine Kugel, die den Punkt  $P$  umgibt, können wir  $V$  als konstant, und zwar gleich dem Wert  $\bar{V}$  im Punkte  $P$  an-

sehen. Das Integral  $\int ds \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r}$  nimmt für diese den Punkt  $P$  umschließende Kugel, nach obigen Ausführungen, den Wert  $4\pi$  an. Der erste Teil des Integrals hat also den Wert  $4\pi \bar{V}$ . Der zweite Teil aber verschwindet; er läßt sich nämlich, wenn  $r_0$  den Radius der Kugel bedeutet, in der Form schreiben:

$$\frac{1}{r_0} \int ds \frac{\partial V}{\partial n}.$$



Da die Kugel unendlich klein ist, so kann man für je gegenüberliegende Elemente der Kugelfläche die Werte gleich groß, aber von entgegengesetztem Vorzeichen werden sich die Werte für je zwei gegenüberliegende Elemente und infolgedessen muß das ganze Integral verschwinden.

Das Integral endlich über die unendlich ferne Kugel verschwinden, vorausgesetzt daß die elektrischen Ladungen im Endlichen liegen. Denn in diesem Falle ist  $V$  von der Ordnung  $\frac{1}{r}$ ,  $\frac{\partial V}{\partial n}$  von der Größenordnung  $\frac{1}{r^2}$ , daher jedes

Integral von der Größenordnung  $\frac{1}{r^3}$  unendlich klein, endlich ferne Fläche nur von der Größenordnung  $r^2$  unendlich.

Folglich ergibt der Greensche Satz das Resultat:

$$4\pi \int \frac{\rho}{r} dv = -4\pi \int \frac{\eta}{r} ds + 4\pi \bar{V}$$

oder

$$\bar{V} = \int \frac{\rho}{r} dv + \int \frac{\eta}{r} ds.$$

Da in Abschnitt 22 nachgewiesen worden ist, daß nur Differentialgleichungen des Potentials möglich ist, so ist der gestellte Ausdruck das einzige Integral dieser Gleichungen. Dieses Ausdrucks gestattet eine sehr einfache Deutung, wie  $\eta ds$  sind Elektrizitätsmengen, die eine im Raum auf der anderen auf dem Flächenelement  $ds$ . Bezeichnen wir die Teile der ganzen vorhandenen Ladung mit  $de$ , so kann

potential offenbar als  $\int \frac{de}{r}$  schreiben, genommen über

Ladungen. Nun ist, wie in Abschnitt 21 gezeigt wurde, die punktförmige Ladung  $= e/r$ . Folglich erscheint die gegebene Verteilung einfach als die Summe der einzelnen Elemente der elektrischen Ladungen erzeugen, oder es erscheint als Potential von Massen, die nach dem Coulombschen Gesetze wirken. Also sagen, daß die Verteilung der Kraft im elektrischen Feld ist, als ob diese Kräfte Fernkräfte wären, die von jeder elektrischen Ladung nach dem Coulombschen Gesetze erzeugt werden. Diese Darlegungen zeigen uns also vom modernen Standpunkte auf der Grundlage, auf der sich die ältere Elektrostatik aufbaute.

Bei den gewöhnlichen Problemen der Elektrostatik handelt es sich nicht um räumlich verteilte Ladungen, sondern nur um die Oberflächenladungen leitender Körper. Aber die Aufgabe geht dabei nicht dahin, aus einer vorgeschriebenen Verteilung der Elektrizität das Potential nach obiger Formel zu berechnen, sondern es soll vielmehr die Verteilung selbst und mit ihr der Kräfteverlauf im Felde erst gefunden werden aus der Bedingung, daß entweder die Gesamtladung oder das Potential für jeden einzelnen leitenden Körper vorgeschrieben ist. Auch in diesem Falle läßt sich durch eine Schlußweise von der gleichen Art, wie sie oben in Abschnitt 22 benutzt wurde, der Nachweis führen, daß das Problem eindeutig bestimmt ist, daß also bei gegebenen Ladungen oder vorgeschriebenen Potentialen nur eine Art der Verteilung auf den Leitern möglich ist, bei der die Elektrizität sich im Gleichgewicht befindet. Aber dieses elektrostatische Problem ist nur in wenigen Sonderfällen gelöst worden.

## 24. Eine indirekte Bestätigung des Coulombschen Gesetzes.

Es ist aus dem Vorhergehenden ersichtlich, in welchem Sinne das Coulombsche Gesetz (21) grundlegend für die Entwicklung der Elektrostatik gewesen ist. Sein Beweis durch die Coulombsche Drehwaage ist aber nicht sehr streng. Es ist nämlich von vornherein klar, daß die Einwirkung zweier ausgedehnter elektrisierter Körper nicht nur von ihrer Entfernung, sondern auch von ihrer relativen Lage abhängen wird, und daß das einfache Gesetz (21) nur einen Grenzfall darstellt, wenn nämlich die Dimensionen der Körper hinreichend klein im Vergleich zu ihrer gegenseitigen Entfernung sind. Von vornherein weiß man nun bei dem Versuche nicht, ob tatsächlich die elektrisierten Körper klein genug gewählt sind, um diesen Grenzfall als verwirklicht ansehen zu können. Sodann aber macht der fortdauernde Verlust der elektrischen Ladung der Körper, welcher auch in trockener Luft stets stattfindet, die Versuche verwickelt und ungenau, und schließlich haben die Wände des Kastens, in welchem der Apparat zum Schutz gegen Luftströmungen stehen muß, ebenfalls einen zum Teil schwer in Rechnung zu ziehenden Einfluß auf die zwischen den elektrisierten Körpern beobachteten Kräfte, da sie ebenfalls unter ihrem Einfluß elektrisch erregt werden.

Es ist daher sehr gut, daß man für das grundlegende Coulombsche Gesetz noch einen anderen, sichereren experimentellen Beweis besitzt, der allerdings mehr indirekt vorgeht. Er beruht auf der zuerst von Cavendish bewiesenen Tatsache, daß im Gleichgewichtszustande das Innere eines geladenen Konduktors stets unelektrisch ist. Mit Hilfe empfindlicher

Prüfkugel A, wenn man sie mit der Innenwand eines  
 Konduktors B in Berührung bringt, vollkommen un-  
 also an der Innenwand keine Ladungen, also im ganz  
 elektrisches Feld vorhanden ist. Die Wirkung der  
 Oberflächenschicht von B muß also auf jeden der in  
 B die Resultante Null ergeben. Daraus läßt sich  
 des Coulombschen Gesetzes durch folgende Ueberle-

Nehmen wir an, es sei B eine Kugel, so m-  
 rücksichten ihre Ladung auf der Oberfläche gleich-  
 Konstruieren wir daher einen Kegel von der kle-

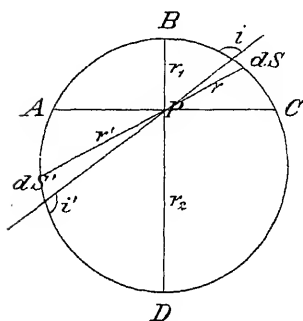


Fig. 14.

dessen Spitze in einem  
 Punkte P der Kugel liegt  
 Kugeloberfläche die bei  
 $dS$  und  $dS'$  (vgl. Fig. 14)  
 ist die Wirkung, welche  
 P gedachte elektrische L-  
 $dS'$  erfährt, wegen der g-  
 trisierung der Kugel off-  
 $dS'$  proportional. P erf-  
 die Wirkung:

$$K = dS \varphi(r) =$$

falls  $i$  den Winkel zwischen der Achse des Eleme-  
 Normale auf  $dS$  bedeutet. Von  $dS'$  erfährt dagegen  
 entgegengesetzte Kraft  $K'$ , welche den Wert hat

$$K' = dS' \varphi(r') = \frac{r'^2 d\omega}{\cos i'} \varphi(r'),$$

wobei  $r'$  und  $i'$  analoge Bedeutungen haben, wie v-  
 nun bei der Kugel  $i = i'$  ist, so heben sich die Wirk-  
 $dS'$  gegenseitig auf, falls

$$r^2 \varphi(r) = r'^2 \varphi(r'),$$

d. h. wenn

$$\varphi(r) = \frac{\text{Konst.}}{r^2}$$

ist. Das in dieser Formel ausgesprochene Gesetz ft-  
 wirklich, daß eine oberflächlich geladene Kugel in  
 elektrostatisches Feld erzeugt, das Gesetz ist also  
 dishschen Experimente verträglich.

Es erübrigt noch, zu zeigen, daß das Gesetz mi-  
 dem Experimente folgt. In der Tat, ist  $r^2 \varphi(r)$  nich-  
 hängige Konstante, es können stat. i. G. 23

Variable  $r$  angegeben werden, zwischen denen  $r^2\varphi(r)$  nur abnimmt oder nur zunimmt. Wir betrachten nun eine Kugel vom Durchmesser  $r_1 - r_2$  und nehmen an, daß der Punkt  $P$  auf der Entfernung  $r_1$  von der Peripherie läge (vgl. Fig. 14). Wir wollen durch eine durch  $P$  gehende Ebene  $AC$ , welche senkrecht auf dem durch  $P$  gehenden Radiusvektor  $BPD$  der Kugel steht, die Oberfläche der letzteren in zwei Kalotten  $ABC$  und  $ADC$  teilen. Ein beliebiges Element  $dS$  der ersteren Kalotte befindet sich dann stets in einem kleineren Abstände  $r$  von  $P$ , als das auf der Sehne  $PdS$  ebenfalls gelegene Element  $dS'$  der Kalotte  $ADC$ . Da nun die Entfernungen  $r$  und  $r'$  der Elemente  $dS$  und  $dS'$  von  $P$  innerhalb der Werte  $r_1$  und  $r_2$  eingeschlossen sind, so ist die Wirkung beider Elemente auf  $P$ , welche proportional zu  $r^2\varphi(r) - r'^2\varphi(r')$  ist, jedenfalls nicht Null, sondern hat entweder einen positiven oder negativen Wert, je nachdem  $r^2\varphi(r)$  im Intervall  $r_1$  bis  $r_2$  mit wachsendem  $r$  beständig ab- oder zunimmt. Gleiches gilt für jedes Elementarpaar  $dS$  und  $dS'$ , welche auf einer durch  $P$  gehenden Sehne liegen. Daher kann die Wirkung der ganzen Kalotte  $ABC$  nicht von der Wirkung der Kalotte  $ADC$  neutralisiert werden, d. h. es müßte irgendeine elektrostatische Wirkung in  $P$  übrig bleiben, falls  $r^2\varphi(r)$  nicht eine von  $r$  unabhängige Konstante wäre. Da dieses aber dem Experimente von Cavendish widerspricht, so folgt mit Notwendigkeit aus ihm das Coulombsche Gesetz.

## 25. Die Kapazität eines Konduktors. Fall einer Kugel.

Es sei ein einziger Leiter gegeben, geladen mit der Elektrizitätsmenge  $e$ . Es gelten dann die Gleichungen:

$$e = \int \eta \, ds, \quad V = \int \frac{\eta}{r} \, ds,$$

wenn  $V$  das Potential in einem beliebigen Punkte des Raumes bedeutet. Eine der Flächen konstanten Potentials ist die Oberfläche des Leiters, auf dem das Potential den Wert  $V_0$  haben soll. Denkt man sich eine andere Ladung desselben Körpers, bei der  $\eta$  an allen Stellen  $n$ -mal größer ist als bei der ersten Ladung, so ist auch die Gesamtladung  $e$  und das Potential  $V$   $n$ -mal größer als im ersten Falle; also hat  $V$  auch auf dem Leiter wiederum einen konstanten,  $n$ -mal größeren Wert. Den Bedingungen des elektrostatischen Gleichgewichts ist offenbar auch mit dieser elektrischen Verteilung genügt, und da zu jeder Gesamtladung beim Gleichgewicht stets nur eine Art der Verteilung möglich ist, so muß die angegebene Verteilung bei der  $n$ -fachen Ladung wirklich ein-

Elektrizitätsmenge und das auf ihm dadurch hervorgebrachte Potential stets in gleichem Verhältnisse wachsen. Das Verhältniß beider ist also eine von der Ladung unabhängige, nur von Gestalt und Größe des Leiters abhängige Konstante. Man nennt sie die Kapazität des Konduktors und setzt also

$$e = C \cdot V_0.$$

Die Kapazität eines Konduktors wird also durch die Elektrizitätsmenge gemessen, durch die der Konduktor das Potential 1 geladen wird.

Sind mehrere Konduktoren im Raume vorhanden, so ist das Potential des einzelnen Konduktors nicht bloß von der auf ihm vorhandenen Elektrizitätsmenge, sondern auch von den Potentialen der übrigen Konduktoren ab. Dieser letztere Einfluß fällt fort und das Potential des einzelnen Leiters ist seiner Elektrizitätsmenge wieder proportional, wenn man dafür sorgt, daß die anderen Konduktoren das Potential Null haben. Man definiert also in diesem Falle die Kapazität in derselben Weise, wie oben, nur unter Hinzufügung der Bedingung, daß die übrigen Konduktoren durch Verbindung mit der Erde auf dem Potential Null gehalten werden. Es möge übrigens ausdrücklich bemerkt werden, daß die Kapazität in diesem Falle eine andere ist, als wenn der Konduktor sich allein im Raume befindet.

Da dem Potential nach der allgemeinen Form, die es hat, die Dimension des Verhältnisses einer Elektrizitätsmenge zu einem Potential kommt, so folgt aus der Definition der Kapazität unmittelbar, daß die Dimension einer Länge haben muß. Es ist also

$$[C] = L.$$

Das einfachste Beispiel gewährt ein kugelförmiger Konduktor. Der Radius sei  $R$ . Da die Niveaulinien im Felde einer punktförmigen Ladung  $e$  entsprechend dem Potentiale  $V = \frac{e}{r}$ , Kugelflächen sind, so kann man sich die Kugel vom Radius  $R$  als leitende Grenze des Potentials vorstellen und hat nur die Frage zu beantworten, welche Ladung auf der Kugel verteilt sein muß, damit das Potential außerhalb dieser Kugel den Ausdruck  $e/r$  gegeben sei. Da nun an der Oberfläche der Kugel  $\frac{\partial V}{\partial n} = -\frac{e}{R^2}$  ist und andererseits  $\frac{\partial V}{\partial n} = -4\pi\eta$  sein muß, so ist im vorliegenden Falle  $\eta = \frac{e}{4\pi R^2}$ . Daraus ergibt sich aber

auf der Kugel gleichförmig verteilte Ladung  $\int \eta \, ds = e$ , d. h. die Ladung  $e$  erzeugt in dem umgebenden Raum ein Potential  $e/r$ .

einigte Gesamtladung  $e$  in den gleichen Punkten des Raumes erzeugen würde. Es ist also allgemein das Potential im Felde einer mit der Elektrizitätsmenge  $e$  geladenen Kugel

$$V = \frac{e}{r}$$

und das Potential der Kugel selbst

$$V_0 = \frac{e}{R}.$$

Daraus folgt, daß die Kapazität der Kugel gleich ihrem Radius ist:

$$C = R. \quad (37)$$

Diese Ableitung gilt unter der Voraussetzung, daß alle übrigen Konduktoren unendlich entfernt von der Kugel sind.

Im elektrostatischen Maßsystem ist die Einheit der Kapazität diejenige von 1 cm. Diese Einheitsgröße hat also eine Kugel von 1 cm Radius. Diese Einheit ist sehr klein. Bei den praktischen Messungen bedient man sich eines anderen Maßsystems, das wir später kennen lernen werden; in diesem ist die Einheit der Kapazität  $9 \times 10^5$  cm und wird 1 Mikrofaraad genannt. Diese Kapazität würde also eine Kugel von 9 km Radius haben.

## 26. Influenz. Kondensatoren.

Die Kapazität eines Konduktors A kann man dadurch sehr vergrößern, daß man in seine Nähe zur Erde abgeleitete Metallmassen B bringt. Denn infolge der Influenzwirkung von A auf B bedeckt sich B mit Elektrizität von entgegengesetztem Vorzeichen. Die Kraftlinien, die vom Leiter A ohne die Gegenwart von B ins Unendliche verliefen, enden jetzt — zum Teil oder alle, je nach den Umständen — auf dem Leiter B. Der Potentialabfall von  $V$  bis 0, der sich ohne B auf dem Wege bis zur unendlichen Entfernung vollzog, muß sich jetzt auf dem viel kürzeren Wege von A bis B vollziehen; d. h. der Potentialgradient ist erheblich gesteigert. Dem Potentialgradienten an der Oberfläche von A ist aber die Dichtigkeit der Elektrizität auf der Fläche proportional. Soll also das Potential von A bei Gegenwart von B dasselbe sein wie ohne B, so muß entsprechend dem gesteigerten Potentialgradienten auch die Dichtigkeit vermehrt werden; d. h. der Körper braucht, um auf dasselbe Potential geladen zu werden, eine größere Elektrizitätsmenge als bei Abwesenheit von B, oder seine Kapazität ist gesteigert.

Am einfachsten erkennt man diese Wirkung naher abgeleiteter Körper auf die Kapazität eines Konduktors, wenn man sich eine geladene

umgeben denkt. Es sei  $R_1$  der Radius der inneren,  $R_2$  Kugel. Ist wieder  $e$  die Ladung der inneren Kugel, so zweite Kugel nicht da wäre, das Potential im Außen vorigen Abschnitt den Wert  $e/r$  haben. Im vorliegenden aber nicht erst in der Unendlichkeit, sondern schon gleich Null sein. Dieser Bedingung und zugleich der Gleichung zwischen den beiden Kugeln genügt der Ausdruck

$$V = \frac{e}{r} - \frac{e}{R_2}.$$

Dann ist aber das Potential der ersten Kugel nicht mehr

$$V_0 = \frac{e}{R_1} - \frac{e}{R_2} = e \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}.$$

Also ist jetzt die Kapazität der inneren Kugel nicht mehr, sondern

$$C = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

Bezeichnet man den Abstand der beiden Kugelflächen und nimmt ihn klein gegen den mittleren Radius  $R$  der Kugeln, so kann man also sagen, daß die Kapazität der inneren Kugel ohne die Anwesenheit der äußeren Kugel im Verhältnis  $\frac{R_2 - R_1}{R_1}$  vergrößert worden ist. Nimmt man z. B.  $d = 1$  mm, so würde schon bei 3 m Radius eine Kapazität von 1 Mikrofarad erreicht werden. Eine einzelne Kugel diese Kapazität erst bei einem Radius von 3 m hätte.

Wir wollen ferner den Fall betrachten, daß die Elektroden A und B zwei gleich große ebene Platten sind, die in dem konstanten Abstand  $d$  voneinander befinden. Ist  $d$  sehr klein im Vergleich zu den Dimensionen der Platten, so können sie als unendlich groß gegen  $d$  angesehen werden können. Symmetrierücksichten das Potential  $V$  zwischen beiden Platten nur in der zu beiden Platten senkrechten Richtung variieren. Da die Platten zur  $z$ -Achse, so wird also  $V$  von  $x$  und  $y$  unabhängig.  $\Delta V = 0$  geht daher über in

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0, \text{ d. h. } V = a z + b.$$

Der Koeffizient  $b$  muß nun verschwinden, wenn man den Nullpunkt der  $z$ -Achse in die zur Erde abgeleitete Platte B verlegt, so daß sein Wert für  $z = 0$ . Ferner ist an der Platte A

$$-\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial z} = a = 4\pi \frac{e}{d}.$$

wenn  $\eta$  die Ladungsdichte,  $e$  die Gesamtladung,  $S$  die Größe der Platte  $A$  bedeutet. Aus (39) und (40) folgt daher, wenn man den Wert des Potentials auf der Platte  $A$  (für  $z = d$ )  $V_0$  nennt:

$$V_0 = 4\pi \frac{e}{S} d = \frac{4\pi d}{S} \cdot e. \quad (41)$$

Also hat die Kapazität des Kondensators den Wert:

$$C = \frac{S}{4\pi d}, \quad (42)$$

wobei  $S$  die dem Konduktor  $B$  zugewandte Oberfläche von  $A$  bedeutet.

Sind beide Platten niedrige Zylinder von kreisförmiger Grundfläche, deren Radius  $R$  ist, so wird  $S = \pi R^2$ , d. h.

$$C = \frac{R^2}{4d}.$$

Beträgt der Abstand 1 mm, so folgt hiernach, daß, falls die Kapazität 1 Mikrofarad betragen soll,

$$9 \cdot 10^5 = \frac{R^2}{0,4},$$

d. h.  $R = 600 \text{ cm} = 6 \text{ m}$  sein muß.

Apparate der beschriebenen Art nennt man Verdichtungsapparate für Elektrizität oder Kondensatoren (Kugelkondensator, Plattenkondensator), weil sie vermöge ihrer gesteigerten Kapazität die Eigenschaft haben, bei Ladung auf ein bestimmtes Potential eine wesentlich größere Elektrizitätsmenge aufzunehmen, als ein einzelner Konduktor bei Ladung auf das gleiche Potential aufnehmen würde.

Ein elektrisches Feld, wie es zwischen den beiden Platten eines Plattenkondensators besteht, in dem die elektrische Kraft überall gleich groß und gleich gerichtet ist, nennt man ein homogenes Feld. Den Kraftlinienverlauf im Querschnitt eines solchen Kondensators veranschaulicht Fig. 3 (Abschnitt 7). Aber diese Figur läßt zugleich erkennen, daß das Feld die Eigenschaft eines homogenen Feldes nur in den inneren Teilen des Kondensators hat, nicht aber am Rande. Die genaue Berechnung der Kapazität eines Plattenkondensators verlangt die Berücksichtigung dieser Abweichung; außerdem ist bei der obigen Ableitung die auf der Rückseite der Platte sitzende Elektrizitätsmenge vernachlässigt. Die genaue Berechnung führt zu einem etwas größeren Werte der Kapazität; sie wird durch eine kompliziertere Formel dargestellt, von der der oben angegebene Wert nur das erste Glied darstellt<sup>1)</sup>. Bei

<sup>1)</sup> Siehe darüber G. Kirchhoff, Monatsber. der Akad. d. Wiss. zu Berlin vom 15. März 1877; ges. Abhandl. (Leipzig, J. A. Barth, 1882) S. 101 ff.; Vorlesungen über Elektr. u. Magn. (Leipzig, B. G. Teubner, 1893) 8. Vorlesung S. 90 ff. Angaben über



der praktischen Anwendung kann man die Randkorrektion dadurch vermeiden, daß man die Kondensatorplatte aus zwei Teilen, aus einer zentralen Kreisscheibe und einem durch einen sehr schmalen Zwischenraum davon getrennten Ring, bestehen läßt (Schutzringkondensator nach W. Thomson). Werden Ring und Scheibe auf gleiches Potential geladen, so ist für den Bereich der inneren Scheibe das Feld durch die Annäherung als homogen anzusehen und dementsprechend ist die Elektricität der inneren Scheibe allein sehr nahe durch die obige Formel (43) gestellt<sup>1)</sup>.

Aus dem Satze über den Kraftfluß folgt unmittelbar, daß die Platte B des Kondensators, deren Potential Null ist, durch Influenz eine elektrische Ladung  $-e$  erhalten hat. Wir können nun die Resultate der Untersuchungen leicht auf den Fall ausdehnen, daß die Platte B nicht geerdet, sondern abgeleitet ist, sondern das Potential  $V_2$  besitzt, indem wir über den ursprünglichen Ladungsvorgang überlagert denken eine Ladung auf der Platte B mit der Elektrizitätsmenge  $e'$ , während dabei die Platte A zur Erde abgeleitet ist. Auf dieser wird dann durch Influenz die Ladung  $e$  und die Elektrizitätsmenge

$$-e' = -\frac{S}{4\pi d} V_2 = -C V_2$$

erzeugt. Durch Ueberlagerung beider Fälle erhält man dann die Gesamtladung auf B und die Elektrizitätsmenge

$$e - e' = C (V_1 - V_2),$$

auf B eine gleich große Gesamtladung von anderem Vorzeichen.

Bezeichnen wir jetzt mit  $e$  die Gesamtladung auf A, so gilt

$$e = C (V_1 - V_2), \quad C = S : 4\pi d.$$

Diese Formeln gelten immer unter der Voraussetzung, daß die Ladungen der beiden Kondensatorplatten entgegengesetzt gleich sind.

Schaltet man mehrere Kondensatoren parallel zueinander, so werden alle dieselbe Potentialdifferenz ihrer Belegungen besitzen, so folgt, daß die Kapazität des ganzen Systems gleich der Summe der Kapazitäten der einzelnen Kondensatoren ist.

Bei Parallelschaltung addieren sich also die Kapazitäten.

Schaltet man dagegen mehrere Kondensatoren in Reihe zueinander (Kaskadenbatterie), so enthalten sie alle die gleiche Ladung. Die Potentialdifferenz zwischen Anfang und Ende dieser Reihe ist die Summe der Potentialdifferenzen in den einzelnen Kondensatoren. Es folgt aus (43), daß der reziproke Wert der Kapazität des ganzen

<sup>1)</sup> Die genauere Theorie des Schutzringkondensators ist ebenfalls

gleich ist der Summe der reziproken Werte der Kapazitäten der einzelnen Kondensatoren.

Bei Reihenschaltung addieren sich also die reziproken Werte der Kapazitäten.

## 27. Die ponderomotorischen Kräfte.

In Abschnitt 6 (S. 14) hatten wir die Intensität des elektrischen Feldes definiert als das Verhältnis der ponderomotorischen Kraft, die das Feld auf eine kleine mit der Elektrizitätsmenge  $e$  geladene Kugel ausübt, zu der Ladung  $e$  dieser Kugel. Umgekehrt finden wir aus der gegebenen Intensität eines Feldes  $\mathfrak{E}$  die ponderomotorische Kraft, die auf eine kleine Kugel mit der Ladung  $e$  wirkt, als das Produkt  $\mathfrak{F} = \mathfrak{E} \cdot e$ . Dabei entsteht diese ponderomotorische Wirkung durch die Uebereinanderlagerung der beiden Felder, einerseits des gegebenen Feldes und andererseits desjenigen Feldes, das die Ladung auf der Prüfkugel erzeugt.

Wir wollen nach den gleichen Grundsätzen die ponderomotorische Wirkung berechnen, die auf eine flächenartige Verteilung von Elektrizität ausgeübt wird. Es sei auf einer Ebene positive Elektrizität von der Dichte  $\eta$  gleichmäßig verteilt. Dann wird auf beiden Seiten der Ebene ein elektrisches Feld von der Stärke  $\mathfrak{E}'$  bestehen, dessen Kraftlinien in Richtung der Normalen von der Ebene fort verlaufen. Lagert sich über dieses Feld ein zweites homogenes Feld von der Stärke  $\mathfrak{E}_0$ , dessen Kraftlinien ebenfalls auf der Ebene senkrecht stehen, so wird auf der einen Seite der Ebene die Stärke des Gesamtfeldes  $\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}_0 + \mathfrak{E}'$ , auf der anderen Seite  $\mathfrak{E}_2 = \mathfrak{E}_0 - \mathfrak{E}'$  sein. Dabei ist die Differenz  $\mathfrak{E}_1 - \mathfrak{E}_2$ , d. h. der Sprung, den die Feldstärke beim Durchgang durch die Ebene erfährt, nach Abschnitt 16 (und Berücksichtigung der Festsetzung  $h = 4\pi$  nach Abschnitt 17) gleich  $4\pi\eta$ . Die ponderomotorische Kraft aber, die die auf dem Flächenelement  $ds$  sitzende Elektrizitätsmenge  $\eta ds$  im Feld von der Stärke  $\mathfrak{E}_0$  erfährt, ist

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_0 \eta ds &= \frac{1}{4\pi} (\mathfrak{E}_1 - \mathfrak{E}_2) \cdot \frac{\mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2}{2} ds \\ &= \frac{1}{8\pi} (\mathfrak{E}_1^2 - \mathfrak{E}_2^2) ds.\end{aligned}\quad (44)$$

Dabei waren  $\mathfrak{E}_0$  und  $\eta$  beliebig angenommen. Es werde nun  $\eta$  so groß gewählt, daß  $\mathfrak{E}' = \mathfrak{E}_0$ , also  $\mathfrak{E}_2 = 0$  ist. Dann besteht nur auf der einen Seite der geladenen Fläche ein elektrisches Feld von der Stärke  $\mathfrak{E}_1 = 4\pi\eta$ , und die Ladung auf der Fläche wird in dieses Feld hineingezogen mit einer Kraft, die für jedes Flächenelement  $ds$

$$= \frac{1}{8\pi} \mathfrak{E}_1^2 ds \text{ oder } = 2\pi\eta^2 ds$$

also für die Flächeneinheit

$$= \frac{1}{8\pi} \mathfrak{E}_1^2 \quad \text{oder} \quad = 2\pi \eta^2$$

ist. Der betrachtete Fall ist derjenige eines geladenen Leiters, von der Oberfläche des Leiters aus, auf der sich die Ladungsdichte  $\eta$  verteilt, ist nach dem Inneren des Leiters das elektrische Feld 0, nach außen hin hat es den Wert  $\mathfrak{E}_n = 4\pi\eta$ . Das Feld der Oberfläche wird also von dem anliegenden elektrischen Feld hinein gerichteten Normalen der Fläche eine Kraft  $p$  der Größe des Flächenelementes proportional ist. Nach dem hydrostatischen Druck bezeichnet man die auf eine Fläche ausgeübte Zugwirkung als den elektrostatischen Druck  $p$ , zeichnen ihn mit  $p$ . Es gilt also die Gleichung:

$$p = \frac{1}{8\pi} \mathfrak{E}^2 = 2\pi \eta^2.$$

Diese Betrachtung lehrt uns also die ponderomotorischen Kräfte kennen, die die Ladung auf einem Leiter seitens des elektrischen Feldes erfährt. Die ponderomotorische Wirkung auf den Leiter erfährt man dann, indem man die auf die Flächenelemente wirkenden Kräfte nach den Regeln der Mechanik für die Zusammensetzung an einem starren Körper zu einer resultierenden Kraft und dem Kräftepaar zusammensetzt. Man würde also für die resultierende Kraft Ausdrücke von der Form:

$$X = \int p \cdot \cos(nX) \, ds$$

und für die Komponenten des Drehungsmomentes Ausdrücke

$$L = \int p [y \cdot \cos(nz) - z \cdot \cos(ny)] \, ds$$

für die X-Achse und entsprechend für die anderen Achsen haben. Diese Auffassung von dem Zustandekommen der ponderomotorischen Wirkungen haben wir schon in Abschnitt 1 gefunden, finden nun hier in dem Ausdruck für den elektrostatischen Druck die Grundlage für die wirkliche Durchführung dieser Rechnung.

Ist nur ein einzelner Konduktor im unendlichen Raume vorhanden, also ein Konduktor, dessen Feld durch die Anwesenheit eines anderen geladenen oder ungeladenen Leiters nicht beeinflußt ist, so haben die resultierende Kraft und das resultierende Drehmoment den Wert Null, wie man leicht ohne weiteres sieht, es aber auch durch eine umständliche Rechnung, die wir nicht durchführen wollen, an den obigen Integralen nachweisen kann. Für die resultierende Kraft und das resultierende Drehmoment

im ganzen aufheben, so sind sie doch als Zugkräfte wirksam und bedingen eine Verminderung des Druckes, unter dem der Konduktor steht. Man kann diese Tatsache leicht nachweisen, wenn man als Konduktor eine Seifenblase nimmt und den in ihr herrschenden Ueberdruck durch ein Manometer mißt; elektrisiert man die Blase, so tritt eine Verminderung dieses Ueberdruckes ein. K. Waitz<sup>1)</sup> hat die Messung dieses Ueberdruckes zur Bestimmung von Potentialen in absolutem Maße benutzt. Denn wenn  $R$  den Radius der Kugel,  $V$  ihr Potential bedeutet, so ist an der Oberfläche der Kugel  $\mathcal{E} = \frac{V}{R}$ , daher  $p = \frac{1}{8\pi} \frac{V^2}{R^2}$  oder

$$V = R \cdot \sqrt{8\pi p}. \quad (48)$$

Mißt man  $R$  in Zentimeter,  $p$  in Dynen/Quadratzentimeter, so ist  $V$  in absolutem elektrostatischem Maße gegeben. Gebräuchlicher für diesen Zweck ist das absolute Elektrometer von W. Thomson<sup>2)</sup>. Es besteht aus einem horizontal angeordneten Schutzringkondensator, dessen zentrale Scheibe am Arm einer Wage befestigt ist. Nach den Formeln (41) für den Plattenkondensator ist das Potential der einen Platte, wenn die andere zur Erde abgeleitet ist,  $V_0 = 4\pi \gamma d$ . Die Kraft auf die Flächeneinheit ist  $p = 2\pi \gamma^2 = \frac{1}{8\pi} \frac{V_0^2}{d^2}$ , folglich die Zugkraft für die ganze Platte von der Größe  $S$ :

$$\mathfrak{F} = 2\pi \gamma^2 S = \frac{1}{8\pi} \frac{V_0^2}{d^2} S.$$

Mißt man die Größe dieser Kraft durch Ausgleichung mit Gewichten und berechnet sie in Dynen, so findet man  $V_0$  in absolutem Maße nach der Formel

$$V_0 = d \sqrt{\frac{8\pi \mathfrak{F}}{S}} \quad (49)$$

oder, wenn  $S = \pi R^2$  gesetzt wird,

$$V_0 = \frac{d}{R} \sqrt{8\pi \mathfrak{F}}. \quad (49')$$

## 28. Leitende Kugel in homogenem Feld.

Es möge endlich noch ein besonderer Fall durchgerechnet werden, der in doppelter Hinsicht von Interesse ist. Eine leitende Kugel vom Radius  $R$  befinde sich in einem homogenen elektrischen Felde von der Stärke  $\mathcal{E}_0$ . Die Kugel sei zunächst ungeladen. Durch die Influenzwirkung des Feldes bedeckt sie sich auf der den Kraftlinien zugewandten Seite

<sup>1)</sup> K. Waitz, Wiedemanns Annalen 37, S. 330, 1889.

<sup>2)</sup> Sir W. Thomson. Papers on Electrostatics and Magnetism (London, Mac-

mit negativer, auf der abgewandten Seite mit positiver. Nach welchem Gesetz findet diese Verteilung der Elektrizität statt?

Der Mittelpunkt der Kugel werde als Nullpunkt der  $x$ -Achse gewählt; die Richtung der Kraftlinien des ursprünglichen Feldes die Richtung der positiven  $x$ -Achse. Das Potential des ursprünglichen Feldes ist dann durch die Bedingung gegeben:

$$\mathcal{E}_0 = - \frac{\partial V_0}{\partial x},$$

also

$$V_0 = - \mathcal{E}_0 x + A.$$

Da es in diesem Falle keinen Sinn hat, das Potential in der Unendlichkeit gleich Null zu setzen, so möge die Konstante  $A$  unbestimmt bleiben; sie bedeutet offenbar das Potential in der Ebene  $x = 0$ .

Zu diesem Potential gesellt sich das Potential der durch Influenz erregten elektrischen Belegung. Ohne den Vorfaktor  $\mathcal{E}_0$  zu berücksichtigen, kann man das Problem systematisch lösen, indem man die Lösung direkt hinschreibt und sich durch Einsetzen in die Gleichung (28) von ihrer Richtigkeit überzeugen kann. Der Gleichung (28) genügt nicht bloß die Funktion  $B/r$ , wo  $B$  eine Konstante ist, sondern auch jede Ableitung dieser Funktion, z. B.  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{B}{r} \right)$ . Bilden wir

$$\begin{aligned} V &= - \mathcal{E}_0 x + A + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{B}{r} \right) \\ &= - \left( \mathcal{E}_0 + \frac{B}{r^3} \right) x + A, \end{aligned}$$

so genügt dieser Ausdruck der Gleichung  $\Delta V = 0$  im ganzen Raum. Man geht in unendlich großer Entfernung in den Ausdruck  $V_0$  des ursprünglichen Feldes über und läßt sich der Grenzbedingung  $V = \text{const.}$  auf der Oberfläche der leitenden Kugel dadurch anpassen, daß man setzt

$$B = - \mathcal{E}_0 R^3.$$

Dann ist  $V = A$  für  $r = R$ . Der Ausdruck

$$V = - \mathcal{E}_0 \left( 1 - \frac{R^3}{r^3} \right) x + A$$

genügt also für  $r \geq R$  den Bedingungen der Aufgabe und ist die einzige Lösung der Aufgabe, die das gesuchte Potential und die zugehörige Elektrizitätsverteilung auf der Kugel erhält man, wenn man den Ausdruck  $\frac{\partial V}{\partial r}$  für  $r = R$  bildet. Nach Abschnitt 19, Gleichung (28) ist dann

$$\sigma = \frac{3}{4\pi} \mathcal{E}_0 \frac{x}{R^2} \quad \text{und} \quad \mathcal{E} = 3 \mathcal{E}_0 \frac{x}{R^2}$$

Bezeichnet man mit  $\vartheta$  den Winkel, den der nach dem Flächenelement  $ds$  der Kugel gezogene Radius  $R$  mit der X-Achse bildet, so ist  $x/R = \cos \vartheta$  und die Dichte im Element  $ds$  proportional mit  $\cos \vartheta$ . Sie ist also gleich Null in dem Kreis, in dem die Kugel von der YZ-Ebene geschnitten wird, und am größten für  $\vartheta = 0$ , da wo die Kugel von der X-Achse getroffen wird, und zwar ist hier die Feldstärke an der Kugeloberfläche dreimal größer, als sie ohne die Kugel an dieser Stelle sein würde. Den ganzen Kraftfluß, der auf der einen Hälfte in die Kugel ein- und auf der anderen Hälfte aus ihr austritt, findet man aus  $\int \mathcal{E}_n ds$  genommen über eine Hälfte der Kugel zu  $3\pi R^2 \mathcal{E}_0$ , während ohne die Anwesenheit der Kugel durch den Querschnitt des von ihr eingenommenen Raumes nur der Kraftfluß  $\pi R^2 \mathcal{E}_0$  hindurchgehen würde.

Fragt man nach der Kraft, die das Feld auf die Kugel ausübt, so folgt aus Symmetriegründen, daß sie nur in Richtung der X-Achse liegen kann. Man hat also das Integral [vgl. Formel (46)]

$$X = 2\pi \int \eta^2 \cos \vartheta \, ds = \frac{9}{8\pi} \mathcal{E}_0^2 \int \cos^3 \vartheta \, ds$$

zu bilden. Der Wert ist natürlich Null, da die Druckkräfte an gegenüberliegenden Stellen der Kugelfläche gleich und entgegengesetzt sind. Anders, wenn die Kugel mit der Elektrizitätsmenge  $e$  geladen ist. Dann ist

$$\eta = \frac{e}{4\pi R^2} + \frac{3}{4\pi} \mathcal{E}_0 \cos \vartheta.$$

Dieser Ausdruck, in die obige Formel eingesetzt, ergibt:

$$X = \frac{1}{8\pi} \frac{e^2}{R^4} \int \cos \vartheta \, ds + \frac{3}{4\pi} \frac{e \mathcal{E}_0}{R^2} \int \cos^2 \vartheta \, ds + \frac{9}{8\pi} \mathcal{E}_0^2 \int \cos^3 \vartheta \, ds.$$

Von den drei Integralen ist das erste und das letzte Null. Das mittlere hat den Wert  $\frac{4\pi R^2}{3}$ . Also ergibt sich

$$X = e \cdot \mathcal{E}_0.$$

Dieses Resultat wäre auch ohne Rechnung hinzuschreiben gewesen; denn der vorliegende Fall ist ja derjenige Versuch, durch den der Begriff der Feldstärke  $\mathcal{E}$  überhaupt definiert ist (s. Abschnitt 6). Wir haben aber die Rechnung durchgeführt, um zu zeigen, daß auch die erweiterten Beziehungen zwischen ponderomotorischer Kraft und Elektrizitätsmenge, wie sie in der Formel für den elektrostatischen Druck enthalten sind, mit dieser ursprünglichen Definition in Einklang stehen.

Von der Art der Verteilung der Elektrizität auf der Kugeloberfläche kann man sich noch in einer Weise eine Vorstellung machen. Wenn

positiver und mit negativer Elektrizität erfüllt denkt, so kommen neutral. Denkt man sich aber diese beiden kugelförmigen Elektrizitätsmassen um eine unendlich kleine Strecke da der X-Achse gegeneinander verschoben, so tritt auf der einen Seite eine Schicht von positiver Elektrizität aus der neutralen Kugel auf, auf der anderen Seite eine gleiche Schicht von negativer. Die Dicke dieser Schicht in Richtung des Radius ist  $da \cos \vartheta$ , und wenn  $\rho$  die Dichte der Elektrizitäten in der Kugel ist, so würde diese Schicht auf der Flächeneinheit die Elektrizitätsmenge  $\rho da \cos \vartheta$  enthalten. Diese Verteilung aber entspricht der oben gegebenen

$$\rho da = \frac{3}{4\pi} \mathfrak{E}_0 \cos \vartheta \text{ setzt.}$$

## 29. Potential eines elektrischen Dipols.

Das Potential einer mit Elektrizität von der Raumdichte  $\rho$  erfüllten Kugel für einen äußeren Punkt erhält man, wenn man sich die Vollkugel in lauter ineinander steckende Kugelschalen der Dicke  $dr$  zerlegt denkt. Für jede ist das äußere Potential nach § 27 so, als ob die ganze in dieser Schale vorhandene Ladung im Mittelpunkte der Kugel vereinigt wäre. Folglich ist auch das Potential der Vollkugel für einen äußeren Punkt so, als ob die ganze in der Kugel enthaltene Elektrizitätsmenge im Mittelpunkt vereinigt wäre.

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho \frac{1}{r}.$$

Für die beiden um  $da$  gegeneinander verschobenen Kugeln ist daher das Potential auch gleich dem Potential zweier entgegengesetzter gleich großer punktförmiger Ladungen sein, die sich im Abstande  $da$  voneinander befinden.

Man bezeichnet ein solches Gebilde als einen elektrischen Dipol, und die Größe  $eda$  als das Moment des Dipols. Wir wollen die allgemeine Form für das Potential eines solchen Dipols aufstellen unter der Voraussetzung, daß die beiden Ladungen  $\pm e$  um eine unendlich kleine Strecke  $dl$  gegeneinander verschoben sind. Nennen wir  $x, y, z$  die Koordinaten des Aufpunktes, d. h. des Punktes, für den das Potential gesucht wird,  $a_1, b_1, c_1$  die Koordinaten des Punktes  $+e$ ,  $a_2, b_2, c_2$  diejenigen des Punktes  $-e$ ,  $r_1$  und  $r_2$  die Abstände  $r_1$  und  $r_2$  des Aufpunktes vom Orte der beiden Ladungen, so geben durch:

$$r_1^2 = (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (z - c_1)^2$$

$$\text{und } r_2^2 = (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 + (z - c_2)^2$$

Da  $+e$  gegen  $-e$  um eine sehr kleine Strecke  $dl$  verschoben ist, so kann man setzen:

$$a_1 = a_2 + da, \quad b_1 = b_2 + db, \quad c_1 = c_2 + dc, \quad (56)$$

wenn  $da$ ,  $db$ ,  $dc$  die Projektionen von  $dl$  auf die Koordinatenachsen sind. Vernachlässigt man wegen ihrer Kleinheit die höheren Potenzen dieser Größen, so läßt sich nach dem Taylorschen Lehrsatz in bekannter Weise schreiben:

$$r_1 = r_2 + \frac{\partial r_2}{\partial a_2} da + \frac{\partial r_2}{\partial b_2} db + \frac{\partial r_2}{\partial c_2} dc. \quad (57)$$

Nun ist das Potential des Dipols nach (31):

$$V = \frac{e}{r_1} - \frac{e}{r_2} = e \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}. \quad (58)$$

Verstehen wir unter  $a$ ,  $b$ ,  $c$  die Koordinaten des in seiner Ausdehnung unendlich klein gedachten Dipols, und unter  $r$  den Abstand des Dipols vom Aufpunkte, d. h.

$$r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2, \quad (59)$$

so läßt sich der Ausdruck (58) für  $V$  in der Form schreiben:

$$V = -\frac{e}{r^2} \frac{\partial r}{\partial a} da - \frac{e}{r^2} \frac{\partial r}{\partial b} db - \frac{e}{r^2} \frac{\partial r}{\partial c} dc$$

oder

$$V = -e da \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a} + e db \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b} + e dc \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c}, \quad (60)$$

wofür man auch, da  $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}$  ist, schreiben kann:

$$V = -e da \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} - e db \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - e dc \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}, \quad (60')$$

Die Größen  $e da$ ,  $e db$ ,  $e dc$  sind die Komponenten des elektrischen Momentes  $e dl$  des Dipols.

### 30. Die Abhängigkeit der elektrischen Kraft von der Natur des umgebenden Mediums.

Bei allen bisherigen Ausführungen haben wir stillschweigend die Annahme gemacht, daß die elektrischen Vorgänge zwischen den geladenen Leitern sich in Luft oder noch viel iger im vollkommen leeren Raume



oder festen Isolator erfüllt denken, und können die Frage aufstellen, wie sich dann die elektrostatischen Erscheinungen abspielen. Alle Erfahrungen sprechen dafür, daß sich die Wirkungen elektrischer Ladungen durch einen materiellen Isolator hindurch nach denselben Gesetzen ausbreiten, wie im leeren Raum. Faraday hat die Ursache wegen dieser Eigenschaft, die elektrischen Wirkungen hindurchzulassen oder zu übermitteln, als Dielektrika bezeichnet. Im besonderen zeigt sich bei Versuchen zur Messung von Elektrizitätsmengen durch die Influenz im Faradayschen Gefäß (Abschnitt 3), daß die auf dem Gefäß durch Influenz erzeugte Ladung stets gleich der eingeführten Ladung ist, unabhängig davon, ob der Hohlraum des Gefäßes ein leerer Raum oder mit Luft oder einem anderen Dielektrikum, etwa einem flüssigen, erfüllt ist. Dagegen zeigt sich ein spezifischer Einfluß des Dielektrikums in der quantitativen Beziehung zwischen den Elektrizitätsmengen und den von ihnen ausgeübten ponderomotorischen Kräften, bzw. den durch sie geleiteten Feldstärken und Potentialwerten.

Diesen Einfluß des umgebenden Isolators nimmt man am besten wahr, wenn man die Luft in dem Zwischenraum zwischen den Platten eines Kondensators durch einen festen oder flüssigen Isolator ersetzt. Ist die geladene Platte mit einem Elektrometer verbunden, das zur Erde abgeleitet, so beobachtet man ein Sinken des Potentials, wenn die Luft durch einen anderen Isolator ersetzt wird. Um das Potential wieder herzustellen, muß man der Platte neue Ladung zuführen. Der Einfluß des Isolators macht sich also bemerkbar in Gestalt einer Vergrößerung der Kapazität. Faraday<sup>1)</sup> hat zuerst nachgewiesen, daß dieser Einfluß eine für jeden Isolator charakteristische GröÙe ist. Er zeigte, daß das Verhältniß der Kapazität eines Kondensators, wenn er sich in dem Isolator befindet, zu der Kapazität desselben Kondensators in Luft eine von Gestalt und Dimensionen des Kondensators unabhängige, für den Isolator charakteristische Konstante ist. Man nennt diese Konstante heute die Dielektrizitätskonstante des Isolators. Wir bezeichnen sie im folgenden mit dem Buchstaben  $\epsilon$ . Sie ist nach obigem definiert durch

$$\epsilon = \frac{C_{\text{Isolator}}}{C_{\text{Luft}}}$$

genauer aber und richtiger durch das Verhältniß

$$\epsilon = \frac{C_{\text{Isolator}}}{C_{\text{Vakuum}}}$$

Denn schon die Anwesenheit der Luft im Kondensator bewirkt eine wenn auch sehr geringe Erhöhung der Kapazität gegenüber dem Vakuum.

<sup>1)</sup> M Faraday, Experimental Researches in Electricity, XI. Ser.

den die Kapazität des Kondensators im Vakuum haben würde. Die Ermittlung von  $\epsilon$  durch Vergleich der Kapazität im Isolator und im Vakuum würde aber, wegen der jedesmaligen Herstellung des letzteren, umständlich und schwierig sein. Hat man dagegen einmal mit möglicher Genauigkeit die Dielektrizitätskonstante der Luft

$$\epsilon_L = \frac{C_{\text{Luft}}}{C_{\text{Vakuum}}}$$

bestimmt, so genügt es, das Verhältnis für einen Isolator gegen Luft zu ermitteln. Denn man kann alsdann die gewonnene Zahl durch Multiplikation mit  $\epsilon_L$  auf den leeren Raum reduzieren.

Die folgende Tabelle enthält die Werte von  $\epsilon$  für einige Isolatoren.

	$\epsilon$
Luft . . . . .	1,00059
Schweflige Säure . . . . .	1,0095
Terpentinöl . . . . .	2,2
Ebonit . . . . .	2,1 bis 3,1
Glas . . . . .	3,2 bis 7,4
Methylalkohol . . . . .	33
Wasser . . . . .	81

### 31. Folgerungen aus dem dielektrischen Verhalten der Körper.

Der Deutung, die man den beschriebenen Versuchen gibt, liegt die gleiche Vorstellung von der Natur der elektrischen Ladung zugrunde, die wir im Abschnitt 3 allen früheren Erörterungen elektrostatischer Erscheinungen vorangeschickt haben, die Vorstellung, daß die Elektrizität den Charakter einer unzerstörbaren Substanz habe, die Ladung eines isolierten Körpers also eine unveränderliche Größe sei. Denken wir uns in der Umgebung eines isolierten geladenen Leiters oder zwischen den Platten eines Kondensators den leeren Raum mit einem materiellen Isolator ausgefüllt, oder bei den gebräuchlichen Versuchen die Luft durch ein anderes Dielektrikum ersetzt, so nehmen wir an, daß die Elektrizitätsmenge auf dem isolierten Körper dabei unverändert bleibt.

Diese elektrischen Ladungen erzeugen in einem materiellen Dielektrikum ein elektrisches Feld von ganz gleichen Eigenschaften, wie im leeren Raume. Wir können es uns ausgemessen denken entweder durch die ponderomotorischen Kräfte auf einen riefkugel, oder durch die

dabei eine Schwierigkeit, sobald der Isolator fest ist, also die dieser Prüfungskörper nicht gestattet. Wie man diese Schwierigkeit umgehen kann, soll an einer späteren Stelle (Abschnitt 33) werden. Die folgenden Betrachtungen gelten also ohne weiteres für flüssige Dielektrika, und wir können sie vorläufig nur durch einen logischen Schluß auf feste Dielektrika ausdehnen.

Aus den Kondensatorversuchen folgt zunächst, daß die elektrische Energiemenge in dem materiellen Dielektrikum ein so großes elektrisches Feld erzeugt, als im leeren Raume; denn das Potential des Leiters selbst ist ja im Verhältnis  $1/\epsilon$  erniedrigt und entsprechend sind es die Ableitungen des Potentials an allen Stellen des Raumes, welche die elektrischen Kräfte. Aus den Influenzversuchen dagegen folgt, daß die Influenzwirkung im Dielektrikum die gleiche ist, wie im leeren Raume. Wegen dieser Verschiedenheit ist es zweckmäßig, in der Theorie der Dielektrika zwischen der durch die ponderomotorische Wirkung gemessenen elektrischen Kraft und der Influenzwirkung gemessenen elektrischen Erregung zu unterscheiden. Während man für die erstere das Symbol  $\mathcal{E}$  beibehalten kann, so bezeichnen wir die letztere mit dem Buchstaben  $\mathfrak{D}$ .

Diesen neuen Vektor können wir uns durch Versuche mit Faradayschen Doppelplatte nach Art der in Abschnitt 13 beschriebenen denken, nur mit dem Unterschiede, daß diese Versuche nicht im leeren Raume, sondern in einem beliebigen Dielektrikum ausgeführt werden. Die Richtung des Vektors  $\mathfrak{D}$  ist die Richtung der Normalen der Doppelplatte in derjenigen Lage, in der die Influenzwirkung am größten ist, und zwar der nach außen gerichteten Normalen derjenigen Doppelplatte, auf der sich die positive Influenzladung befindet. Die Größe des Vektors aber würde durch eine der Gleichung entsprechende Gleichung gegeben sein, in der nur  $\mathcal{E}$  durch  $\mathfrak{D}$  ist, also:

$$\mathfrak{D} \, ds = h' \, d e_i \text{ oder } \mathfrak{D} = h' \frac{d e_i}{ds}$$

Die Versuche mit dem Faradayschen Gefäß zeigen, daß unabhängig von der Natur des Dielektrikums die von einer gegebenen Ladung auf einer sie vollkommen umschließenden Fläche influenzierte Ladung absoluten Betrage nach gleich  $e$  ist; daraus folgt, entsprechend

$$\oint \mathfrak{D}_n \, ds = h' e$$

entsprechend (14)

$$\frac{\partial \mathfrak{D}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{D}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{D}_z}{\partial z} = h' \rho$$

und entsprechend (19)

$$\mathfrak{D}_n = h' \eta \quad (65)$$

In diesen Gleichungen können wir uns die Elektrizitätsmenge  $e$ , bzw. die elektrischen Dichtigkeiten  $\rho$  und  $\eta$ , in irgendeinem, etwa im absoluten elektrostatischen Maßsystem (siehe Abschnitt 17) gegeben denken;  $h'$  ist ein beliebig zu wählender Proportionalitätsfaktor, durch den das Maß des Vektors  $\mathfrak{D}$  mit dem Maß der Elektrizitätsmenge verknüpft wird <sup>1)</sup>. In vielen modernen Darstellungen findet man den Faktor  $h' = 1$  gesetzt <sup>2)</sup>. Bezeichnet man, entsprechend dem in Abschnitt 13 gebildeten Begriff des Kraftflusses, das Integral der Gleichung (63) als den gesamten von der Elektrizitätsmenge  $e$  ausgehenden Erregungsfluß, so sagt die Festsetzung  $h' = 1$  aus, daß der gesamte Erregungsfluß gleich der Elektrizitätsmenge ist, von der er ausgeht. Behält man für  $e$  das elektrostatische Maßsystem bei, so ist im leeren Raume:

$$\int \mathfrak{D}_n \, ds = \frac{1}{4\pi} \int \mathfrak{E}_n \, ds \quad \text{oder} \quad \mathfrak{D} = \frac{1}{4\pi} \mathfrak{E}$$

und in einem materiellen isotropen Dielektrikum, in dem  $\mathfrak{E}$  im Verhältnis  $1/\epsilon$  verkleinert ist, muß

$$\int \mathfrak{D}_n \, ds = \frac{1}{4\pi} \int \epsilon \mathfrak{E}_n \, ds \quad \text{oder} \quad \mathfrak{D} = \frac{\epsilon}{4\pi} \mathfrak{E}$$

sein. Wir wollen uns in der folgenden Darstellung nicht der Festsetzung  $h' = 1$  bedienen, sondern wollen

$$h' = h \quad (66)$$

.h. bei Anwendung des elektrostatischen Maßsystems

$$h' = 4\pi \quad (66')$$

setzen. Dadurch wird das Maß des Vektors  $\mathfrak{D}$  so gewählt, daß im leeren Raume  $\mathfrak{D}$  mit  $\mathfrak{E}$  identisch und im materiellen Dielektrikum

$$\mathfrak{D} = \epsilon \mathfrak{E} \quad (67)$$

wird <sup>3)</sup>. Der ganze von der Elektrizitätsmenge  $e$  ausgehende Erregungsfluß ist dann gleich dem  $4\pi$ -fachen von  $e$ :

<sup>1)</sup> Die in den Gleichungen (12), (13), (14), (19) vorkommende Konstante  $h$  ist, wie aus (22) hervorgeht, von der Wahl der Elektrizitätseinheit abhängig; denn sie verknüpft mit der Elektrizitätsmenge  $e$  den Vektor  $\mathfrak{E}$ , der seinerseits wieder durch die Gleichung (1) mit der Elektrizitätsmenge verknüpft ist. In den obigen Gleichungen dagegen dient  $h'$  zur Definition der Größenbeziehung eines neuen Vektors zu der Elektrizitätsmenge.

<sup>2)</sup> So bei Heaviside, in der Math. Enzyklopädie u. a. a. O.

<sup>3)</sup> Diese Festsetzung läßt die folgenden Gleichungen in Uebereinstimmung mit den Gleichungen der ersten Auflage dieses Buches. Dort ist das Symbol  $\mathfrak{D}$  zwar

$$\int \mathfrak{D}_n ds = 4\pi e$$

und es gelten des weiteren die Grundgleichungen:

$$\frac{\partial \mathfrak{D}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{D}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{D}_z}{\partial z} = 4\pi \rho$$

und für die Oberfläche geladener Leiter:

$$\mathfrak{D}_n = 4\pi \eta$$

Die durch (67) ausgedrückte Beziehung zwischen  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{E}$  ist für ein isotropes Dielektrikum. In ihm fällt die Richtung von  $\mathfrak{D}$  mit der Richtung von  $\mathfrak{E}$  zusammen. In anisotropen Mitteln ist das im allgemeinen nicht der Fall, und die Beziehung zwischen  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{E}$  hat in ihnen die Form einer einfachen Proportionalität. Man genügt der Bedingung, wenn man in diesem Falle jede der Komponenten  $\mathfrak{D}_x$ ,  $\mathfrak{D}_y$ ,  $\mathfrak{D}_z$  eine lineare Funktion der drei Kraftkomponenten  $\mathfrak{E}_x$ ,  $\mathfrak{E}_y$ ,  $\mathfrak{E}_z$  ansetzt.

Da der Erregungsfluß ganz unabhängig von der Natur des Mediums ist, so kommt es für die Gültigkeit der Gleichungen (63) nicht darauf an, daß der Raum nur mit einem isotropen Medium gefüllt sei. Die Gleichungen gelten auch dann noch, wenn der Raum mit einem inhomogenen Dielektrikum erfüllt ist, in dem die Größe  $\epsilon$  eine Funktion der Koordinaten ist. Ist das Dielektrikum homogen, so ist  $\epsilon$  eine Konstante, die vor das Integral- bzw. das Differentialzeichen gesetzt werden kann. In diesem Falle lassen sich die Gleichungen (64') ersetzen durch die folgenden:

$$\int \mathfrak{E}_n ds = \frac{4\pi e}{\epsilon}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial z} = \frac{4\pi \rho}{\epsilon}$$

Für die früher für den leeren Raum behandelten Sommerfeld'schen Formeln gibt sich bei Voraussetzung eines materiellen Dielektrikums

—  $\epsilon X$ ,  $\epsilon Y$ ,  $\epsilon Z$  — vor, die, in unserer Schreibweise durch  $\epsilon \mathfrak{E}_x$ ,  $\epsilon \mathfrak{E}_y$ ,  $\epsilon \mathfrak{E}_z$  einfach durch  $\mathfrak{D}_x$ ,  $\mathfrak{D}_y$ ,  $\mathfrak{D}_z$  ersetzt werden können. Außerdem stellt die Gleichung  $h' = 4\pi$  die vollständige Parallele zwischen den Größen  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{E}$  des elektrischen Feldes mit den Größen  $\mathfrak{H}$  und  $\mathfrak{H}'$  des magnetischen Feldes her. — Man kann auch, wie E. Cohn in seinem Buch „Das elektromagnetische Feld“ tut, die Entwicklung der elektromagnetischen Theorie von der speziellen Wahl eines Maßsystems unabhängigen, ganz allgemeinen Formeln ableiten, indem man für jedes isotrope Medium  $\mathfrak{D} = \epsilon \mathfrak{E}$ , entsprechend für den leeren Raum  $\mathfrak{D} = \epsilon_0 \mathfrak{E}$  setzt und die Proportionalitätskonstante  $\epsilon$  allgemeine Proportionalitätskonstante,  $\epsilon_0$  also als Dielektrizitätskonstante des leeren Raumes oder als absolute Dielektrizitätskonstante bezeichnet. Die Dielektrizitätskonstante im gewöhnlichen, physikalischen Maßsystem, die in der Gleichung (61), ist dann  $\epsilon/\epsilon_0$ . Durch die konventionellen Festsetzungen im CGS-System wird der Wert  $\epsilon_0$  der Wert  $\frac{1}{4\pi}$  zugeteilt.

Das Feld einer punktförmigen Ladung  $e$  hat im Dielektrikum die Stärke  $\frac{e}{\epsilon r^2}$  und das Coulombsche Gesetz nimmt die Form an:

$$\mathfrak{F} = \frac{e_1 e_2}{\epsilon r^2}. \quad (68)$$

Bei unveränderter Ladung ist die ponderomotorische Kraft zwischen den beiden Kugeln im Dielektrikum kleiner als im leeren Raum. Aus dieser Tatsache folgt für die Festsetzung der Einheit der Elektrizitätsmenge die Notwendigkeit, die in Abschnitt 17 gegebene Definition dieser Einheit ausdrücklich durch den Zusatz zu ergänzen, daß ihr die im leeren Raum oder freien Aether ausgeübten ponderomotorischen Wirkungen der Ladungen zugrunde liegen.

Für den elektrostatischen Druck an der Oberfläche eines Leiters [s. (45)] ergibt sich aus der Tatsache, daß dem gleichen  $\eta$  ein im Verhältnis  $1/\epsilon$  kleineres  $\mathfrak{E}$  entspricht, der allgemeine Ausdruck

$$p = \frac{2\pi \eta^2}{\epsilon} = \frac{\epsilon}{8\pi} \mathfrak{E}_n^2. \quad (69)$$

Für einen Plattenkondensator, dessen Zwischenraum ganz von dem Dielektrikum erfüllt ist, haben Potential und Feldstärke zwischen den Platten [s. Abschnitt 26, (39) und (40)] jetzt die Werte

$$V = \frac{4\pi e}{\epsilon S} z \quad \text{und} \quad \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{4\pi e}{\epsilon S}, \quad (70)$$

das Potential der geladenen Platte ist statt (41)

$$V_0 = \frac{4\pi d}{\epsilon S} e \quad (70')$$

und die Kapazität statt (42)

$$C = \epsilon \frac{S}{4\pi d}. \quad (71)$$

Die Zugkraft auf die Mittelplatte eines Schutzringkondensators (s. Abschnitt 26, S. 54) beträgt im Dielektrikum

$$\mathfrak{F} = \frac{2\pi \eta^2}{\epsilon} S = \frac{2\pi e^2}{\epsilon S}, \quad (72)$$

wenn  $e = \eta S$  die Gesamtladung der Platte bezeichnet. Bei gleicher Ladung der Platte ist also die Kraft im Dielektrikum um  $\epsilon$  kleiner als im leeren Raum. Man kann sich aber auch die Platte, durch Verbindung mit einer Elektrizitätsquelle von konstanter Spannung, in beiden Fällen auf das gleiche Potential  $V_0$  geladen denken. Dann gilt  $\mathfrak{E}_n = \frac{4\pi \eta}{\epsilon} = \frac{V_0}{d}$

$$\mathfrak{F} = \frac{\epsilon}{8\pi} (V_0/d)^2 S \quad (72')$$

Bei konstant gehaltenem Potential ist also die bewegte Dielektrikum  $\epsilon$  mal größer als im leeren Raum (vgl. die S. 57).

## 32. Die Bedingungen an der Grenzfläche von I

Die im vorigen Abschnitt eingeführte Unterscheidung zwischen elektrischer Erregung und elektrischer Kraft im Dielektrikum ist wichtig, solange es sich um ein homogenes, isotropes, den Raum erfüllendes Dielektrikum handelt. Ihre Bedeutung tritt erst in den Vordergrund, sobald das Dielektrikum nicht mehr homogen oder isotrop ist oder nicht mehr den ganzen Raum erfüllt. Wir beschränken uns auf homogene, isotrope Mittel, machen aber die Annahme, daß zwei Dielektrika mit den Konstanten  $\epsilon_1$  und  $\epsilon_2$  gegeben sind, die in einer zunächst als eben vorausgesetzten Trennungsfläche gegeneinander stoßen. Innerhalb jedes Mediums gelten die im vorigen Abschnitt aufgestellten Gleichungen und fällt die Richtung von  $\mathcal{E}$  mit der Richtung von  $\mathcal{D}$  zusammen. Es fragt sich nun, welche Bedingungen für den Durchgang des elektrischen Feldes aus dem einen Mittel in das andere sein müssen.

a) Die Normalkomponenten. Wir setzen zuerst ein Medium voraus, dessen Kraftlinien auf der Trennungsfläche der Dielektrika senkrecht stehen. Diesen Fall kann man sich verwirklichen, indem man den Zwischenraum zwischen den Platten eines Kondensators mit Isolatoren ausfüllt, die in einer den Kondensatorplatten parallelen Ebene aneinander grenzen. Da die von der Ladung der Kondensatorplatten ausgehende Erregung unabhängig vom Dielektrikum ist, so ist der Durchgang durch die Trennungsfläche der Dielektrika unverändert. Also wird

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2 \\ \epsilon_1 \mathcal{E}_1 = \epsilon_2 \mathcal{E}_2 \end{array} \right\} \text{oder}$$

sein. Dabei ist Voraussetzung, daß nicht etwa auf der Trennungsfläche der Isolatoren elektrische Ladungen sitzen, von denen eine neue Erregung ausgehen könnte. Die Notwendigkeit dieser Bedingung ergibt sich sofort, wenn wir die obige Beziehung direkt und allgemein auf den Satz über den Erregungsfluß

$$\int \mathcal{D}_n \, ds = 4\pi \eta$$

ableiten.

Wir wollen nämlich als Fläche  $S$  die Oberfläche eines

ebene beider Medien so konstruiert ist, daß die Basis im ersten derselben, die Endfläche im zweiten liegt, und dessen Höhe unendlich klein gegen die kleine Fläche  $dS$  ist. Bei Ausrechnung des Integrals haben wir dann nur die Basis und Endfläche des Zylinders zu berücksichtigen, so daß man erhält

$$(\mathfrak{D}_n)_1 + (\mathfrak{D}_n)_2 = 4\pi\eta.$$

Die Indices deuten die Zugehörigkeit zu den beiden Medien an. Nun bedeutet aber in  $(\mathfrak{D}_n)_1$   $n$  diejenige Richtung der auf  $dS$  errichteten Normalen, welche vom Medium 2 zum Medium 1 weist, in  $(\mathfrak{D}_n)_2$  ist es dagegen umgekehrt. Rechnet man die positive Richtung der Normalen konsequent nur in einem Sinne, z. B. in das Medium 1 hinein, so erhält man daher

$$(\mathfrak{D}_n)_1 - (\mathfrak{D}_n)_2 = 4\pi\eta.$$

Ist nun  $\eta = 0$ , d. h. keine Ladung auf der Grenzfläche der beiden Isolatoren vorhanden, so ist

$$\text{oder} \quad \left. \begin{aligned} (\mathfrak{D}_n)_1 &= (\mathfrak{D}_n)_2 \\ \varepsilon_1(\mathfrak{E}_n)_1 &= \varepsilon_2(\mathfrak{E}_n)_2 \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

Beim Uebergang von einem Medium zu einem anderen ändert sich also die nach der Normalen ihrer Grenzfläche genommene Komponente der elektrischen Kraft unstetig, der Erregungsfluß bleibt stetig.

b) Die Tangentialkomponenten. Wir denken uns wieder einen Plattenkondensator, dessen Platten vertikal stehen mögen; die untere Hälfte des Zwischenraumes sei von dem Medium 1, die obere von dem Medium 2 erfüllt, so daß die Grenzfläche senkrecht auf den Platten des Kondensators steht. Wird eine Platte geladen, die andere zur Erde abgeleitet, so entsteht ein homogenes Feld in beiden Medien, mit gleicher Feldstärke in beiden Medien; denn das Potential der geladenen Platte muß ja in ihrer ganzen Ausdehnung das gleiche sein. Bezeichnen wir es mit  $V_0$  und den Plattenabstand mit  $d$ , so ist  $V_0/d$  die Feldstärke  $\mathfrak{E}$  sowohl im ersten wie im zweiten Medium. Es gilt also in diesem Falle, in dem die elektrische Kraft tangential zur Grenzfläche der beiden Medien liegt, die Bedingung

$$\text{also} \quad \left. \begin{aligned} (\mathfrak{E}_t)_1 &= (\mathfrak{E}_t)_2 \\ \frac{(\mathfrak{D}_t)_1}{\varepsilon_1} &= \frac{(\mathfrak{D}_t)_2}{\varepsilon_2} \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

Die letztere Gleichung besagt, daß sich die elektrische Ladung auf den Platten in den beiden Medien mit verschiedener Dichtigkeit anhäuft;



$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

Die hier aus dem Spezialfall abgeleitete Grenzbedingung ist allgemein aus dem Satz über das Linienintegral der elektrischen Feldstärke zu gewinnen. Denn der in Abschnitt 8 aufgestellten Behauptung, daß das Linienintegral  $\int \mathfrak{E} \, dl$  genommen über eine geschlossene Kurve Null sei, müssen wir Gültigkeit zuschreiben nicht bloß für eine innerhalb eines homogenen Dielektrikums verlaufene Kurve vollständig innerhalb eines homogenen Dielektrikums, sondern auch dann, wenn das Dielektrikum längs der Kurve variiert. Denn alle Erfahrungen sprechen dafür, daß aus dem Hohlraum einer elektrischen Ladung auf einer geschlossenen Kurve in einem homogenen Dielektrikum keine statischen Felde niemals Arbeit gewonnen werden kann. Wenn dabei verschiedene Dielektrika durchquert werden, so muß die Summe von einem Punkte A der Grenzfläche zweier Dielektrika nach einem benachbarten Punkte B längs der Grenzfläche aber innerhalb des ersten Dielektrikums und von B nach A längs derselben Linie aber innerhalb des zweiten Dielektrikums zurück, so muß die Summe der beiden Produkte  $\mathfrak{E} \, dl$  gleich Null sein, und da die Wegstrecken gleich und entgegengerichtet sind, so müssen die Kraftkomponenten längs der Grenzfläche in den beiden Medien gleich sein; also

$$(\mathfrak{E}_t)_1 = (\mathfrak{E}_t)_2.$$

Beim Durchgang durch die Grenzfläche ändern sich die elektrischen Feldkomponenten mit verschiedenen Dielektrizitätskonstanten in demselben Verhältnis, jede Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke.

Da die elektrische Kraft gleich dem negativen Potentialgefälle ist, so kann man diese Grenzbedingung auch so aussprechen: Das Potentialgefälle in beiden Medien ist gleich. Da diese Bedingung sich nur auf die Ableitungen des Potentials bezieht, so schließt sie offenbar die Möglichkeit nicht aus, daß das Potential selbst sich zu beiden Seiten der Grenzfläche um einen konstanten Betrag unterscheiden, das Potential also beim Durchgang durch die Grenzfläche sich sprunghaft ändert.

### 33. Hohlräume in festen Isolatoren

Die im vorigen Abschnitt erhaltenen Ergebnisse sind nunmehr zu benutzen, um sofort die Schwierigkeit zu lösen, die im Abschnitt 31 für die Anwendung der elektrischen Grundbegriffe auf Isolatoren dadurch entsteht, daß die Ausmessung des elektrischen Feldes innerhalb fester Isolatoren nicht möglich erscheint. Man kann sie sich nur aus dem

die man sich die Prüfungskugel oder die Faradaysche Doppelplatte eingeführt denkt: diese Höhlungen sollen luftleer sein.

Wir nehmen zunächst eine Höhlung an, die in einem sehr schmalen Schlitz senkrecht zu den Kraftlinien des Feldes besteht. In diesem Falle geht der Erregungsfluß, wie er im Dielektrikum längs der Kraftlinien besteht, nach Abschnitt 32a, unverändert durch den Schlitzraum hindurch. In diesem Raume könnte man sich also die elektrische Erregung  $\mathfrak{D}$ , die an dieser Stelle des Feldes besteht, durch die Faradaysche Doppelplatte gemessen denken. Man könnte aber auch die Feldstärke in diesem Raum aus der ponderomotorischen Wirkung auf eine Prüfungskugel messen. Da im leeren Raume  $\mathfrak{D} = \mathfrak{E}$  ist, so würde die in dem schlitzförmigen Vakuum gemessene Feldstärke  $\mathfrak{E}$  gleich der Größe  $\mathfrak{D}$  im Isolator sein.

Wir nehmen als zweiten Fall eine langgestreckte zylindrische Höhlung an, deren Achse in Richtung der Kraftlinien an der zu untersuchenden Stelle des Feldes liegt. Ist der Querschnitt dieser Röhre sehr klein gegen ihre Länge, so kann man die Wirkung, die die Endquerschnitte auf den Kraftlinienverlauf im mittleren Teil der Röhre ausüben, vernachlässigen. Die Grenzfläche des Zylinders läuft dann parallel zu den Kraftlinien des Feldes im Isolator und im Vakuum der Röhre, und nach Abschnitt 32b muß daher die Feldstärke in der Röhre gleich der Feldstärke im umgebenden Dielektrikum sein. Mißt man also die Feldstärke im mittleren Teil einer solchen Röhre, so mißt man damit unmittelbar den Wert von  $\mathfrak{E}$  für den Isolator an der betreffenden Stelle.

Um also die Begriffe der elektrischen Erregung und der elektrischen Kraft auf feste Isolatoren ausdehnen zu können, muß man sich die betreffenden Messungen in Hohlräumen ausgeführt denken. Mißt man die ponderomotorische Wirkung auf eine Prüfungskugel in einem Hohlraum von der Form einer ganz flachen, zu den Kraftlinien senkrecht angeordneten Scheibe, so erhält man daraus den Wert von  $\mathfrak{D}$  im Isolator. Mißt man sie in einem Hohlraum von der Form eines langgestreckten, den Kraftlinien parallelen Zylinders, so erhält man den Wert von  $\mathfrak{E}$  in dem Isolator.

### 34. Das Brechungsgesetz der Kraftlinien.

Die Kraftlinien eines elektrischen Feldes verlaufen innerhalb eines homogenen Dielektrikums im allgemeinen ohne plötzliche Richtungsänderungen, ohne Knicke.

Nur an der Grenzfläche  $F$  zwischen zwei verschiedenen Medien muß ein Knick der Kraftlinien eintreten, sie müssen



linien und die Uebereinstimmung der Ergebnisse dieser Methode mit denen anderer Methoden kann als Beweis für die Richtigkeit des Brechungsgesetzes angesehen werden. Wenn nämlich ein Prisma eines Dielektrikums  $D$  in ein gleichförmiges elektrisches Feld, welches zwischen zwei geladenen, parallelen Platten  $A$ ,  $B$  besteht, derart gebracht wird, daß die eine Seite des Prismas  $D$  der einen Platte  $A$  parallel ist, so werden die Kraftlinien des Feldes durch das Prisma nach dem Brechungsgesetz gebrochen. Das elektrische Feld wird daher zwischen der Platte  $B$  und dem Prisma  $D$  jedenfalls ungleichförmig, d. h. die elektrischen Kraftlinien können nicht mehr äquidistante gerade Linien sein; denn sie müssen auf  $B$ , wie auf jeden Konduktor, senkrecht auftreffen, während in der Nähe des Prismas die Richtung der Kraftlinien infolge der Brechung durch das Prisma jedenfalls eine andere sein muß. Der Kraftlinienverlauf wird ungefähr der in Fig. 16 angedeutete sein. Wenn aber die

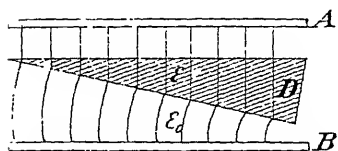


Fig. 16.

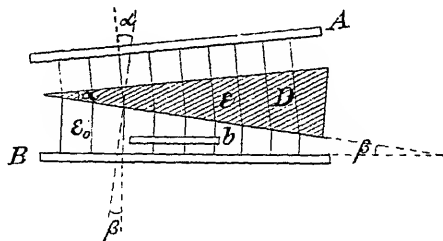


Fig. 17.

Platte  $B$  gegen ihre ursprüngliche Lage so gedreht wird, daß sie senkrecht liegt zu derjenigen Richtung, welche den von  $A$  ausgehenden Kraftlinien infolge der Brechung durch das Prisma zugewiesen wird, so können diese Kraftlinien nach der Brechung ihre Richtung im Zwischenraume zwischen  $B$  und  $D$  völlig beibehalten, da sie dann senkrecht auf  $B$  auftreffen. In diesem Falle ist daher auch in diesem Zwischenraum das elektrische Feld gleichförmig.

Auf diesem Satze beruht die Methode von Pérot<sup>1)</sup>. Zur Prüfung, ob das Feld zwischen  $D$  und  $B$  gleichförmig ist, dient eine isolierte, verschiebbare kleine Metallplatte  $b$ , welche immer parallel zu  $B$  liegt. Die Kapazität des ganzen Systems ist offenbar von der spezielleren Lage der Platte  $b$  unabhängig, wenn das elektrische Feld zwischen  $D$  und  $B$  gleichförmig ist; im anderen Falle muß das Potential auf  $B$  sich ändern, wenn  $b$  verschoben wird. Es wird nun bei irgendeiner Lage der Platte  $b$  zunächst das Potential auf  $B$  gleich Null gemacht, indem  $B$  mit der Erde leitend verbunden wird. Sodann wird die Erdverbindung aufgehoben und die Platte  $b$  parallel mit  $B$  irgendwie verschoben. Im allgemeinen

ist dann das Potential von B nicht mehr Null, was an einem mit B verbundenen Elektroskop erkannt werden kann.

Nur falls die Platte B einen bestimmten Winkel gegen die gewandten Seite des Prismas D einschließt, bleibt das Potential dauernd gleich Null bei beliebiger Parallelverschiebung der Platte. Aus der Fig. 17 und dem Brechungsgesetz hervorgeht, ist dann

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0},$$

falls  $\alpha$  der brechende Winkel des Prismas,  $\epsilon$  seine Dielektrizitätskonstante,  $\epsilon_0$  die des Zwischenraumes zwischen D und B ist.

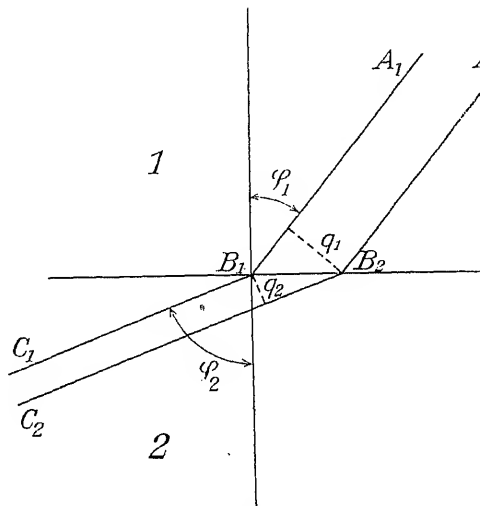


Fig. 18.

gibt sich daher  $\epsilon$  aus obiger Gleichung, falls man  $\alpha$  und  $\beta$  aus der Fig. 18 bestimmt und  $\epsilon_0 = 1$  zu setzen ist.

Das Brechungsgesetz für die Kraftlinien hat gewissermaßen mit dem Snelliusschen Brechungsgesetz für Lichtstrahlen analoges. An Stelle von  $\sin$  tritt  $\operatorname{tg}$ . Wegen dieses letzteren Unterschiedes treten Erscheinungen der Totalreflexion bei Kraftlinien nie vor. Aber besteht der Gegensatz, daß beim Uebergang von einem leeren Raum in ein materielles Mittel die Lichtgeschwindigkeit abnimmt, die Dielektrizitätskonstante aber zunimmt. Die Lichtstrahlen werden in diesem Falle nach dem Einfallslot hin, die Kraftlinien dagegen vom Einfallslot fort gebrochen. Mit dieser Brechung von Kraftlinien ist eine Konzentrierung des Erregungsflusses verbunden. Die Linien  $A_1 B_1 C_1$  und  $A_2 B_2 C_2$  die Schnitte der Krafttröhren mit einer Krafttröhre bedeuten  $q_1$  und  $q_2$  die Querschnitte.

in den beiden Medien (es ist wieder  $\varepsilon_2 = 3\varepsilon_1$  angenommen).  $\mathfrak{D}_1$  die Erregung längs  $A_1 B_1$  und  $A_2 B_2$ ,  $\mathfrak{D}_2$  die Erregung längs  $B_1 C_1$  und  $B_2 C_2$ , so muß der Erregungsfluß innerhalb der ganzen gebrochenen Röhre überall gleich groß sein; also

$$\mathfrak{D}_1 q_1 = \mathfrak{D}_2 q_2. \quad (77)$$

Bedeutet  $q$  die Fläche des gemeinsamen schiefen Schnittes durch die beiden Röhren, dessen Projektion in der Zeichnungsebene  $B_1 B_2$  ist, so ist

$$q_1 = q \cdot \cos \varphi_1 \quad \text{und} \quad q_2 = q \cdot \cos \varphi_2,$$

also

$$\mathfrak{D}_1 \cos \varphi_1 = \mathfrak{D}_2 \cos \varphi_2,$$

entsprechend der Bedingung, daß die Normalkomponenten der Erregung an der Grenzfläche gleich sein müssen. Es ist also:

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{D}_1} &= \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_2} = \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_2}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_1}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1^2} \operatorname{tg}^2 \varphi_1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_1}} \\ &= \sqrt{1 + \frac{\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2}{\varepsilon_1^2} \sin^2 \varphi_1}. \end{aligned} \quad (78)$$

Für  $\varphi_1 = 0$  ist  $\mathfrak{D}_2 = \mathfrak{D}_1$ . Mit wachsendem  $\varphi_1$  wird  $\mathfrak{D}_2$  immer größer, bis es für  $\varphi_1 = 90^\circ$  gleich  $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \mathfrak{D}_1$  ist, entsprechend der in Abschnitt 32 aufgestellten Bedingung für die Tangentialkomponente.

### 35. Die allgemeine Form des Potentials in dielektrischen Mitteln.

Die in Abschnitt 23 aufgestellte allgemeine Form des Potentials erfährt natürlich auch eine Abänderung, wenn das elektrische Feld nicht mehr leer, sondern von dielektrischer Materie erfüllt ist. Hat man es nur mit einem einzigen, unendlich ausgedehnten Dielektrikum zu tun, so bleibt die mathematische Schlußweise wie oben bestehen; nur müssen die elektrischen Dichtigkeiten  $\rho$  und  $\eta$  durch  $\frac{\rho}{\varepsilon}$  und  $\frac{\eta}{\varepsilon}$  ersetzt werden, so daß die Potentialgleichung (34) die Form annimmt:

$$\bar{V} = \int \frac{\rho}{\varepsilon r} dv + \int \frac{\eta}{\varepsilon \rho} ds.$$

Sind aber mehrere Dielektrika vorhanden, die in Flächen aneinander grenzen, so ist die Bedingung, daß  $V$  mit seinen ersten Ableitungen im

ist dann das Potential von B nicht mehr Null, was an dem Ausschlag eines mit B verbundenen Elektroskops erkannt werden kann.

Nur falls die Platte B einen bestimmten Winkel  $\beta$  mit der ihr zugewandten Seite des Prismas D einschließt, bleibt das Potential auf B dauernd gleich Null bei beliebiger Parallelverschiebung von b. Wie aus der Fig. 17 und dem Brechungsgesetz hervorgeht, ist dies der Fall, wenn

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0},$$

falls  $\alpha$  der brechende Winkel des Prismas,  $\varepsilon$  seine Dielektrizitätskonstante,  $\varepsilon_0$  die des Zwischenraumes zwischen D und B (Luft) ist. Es er-

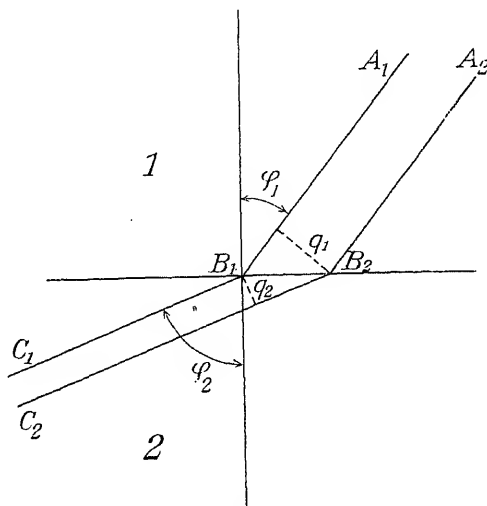


Fig. 18.

gibt sich daher  $\varepsilon$  aus obiger Gleichung, falls man  $\alpha$  und  $\beta$  mißt, da  $\varepsilon_0 = 1$  zu setzen ist.

Das Brechungsgesetz für die Kraftlinien hat gewisse Aehnlichkeit mit dem Snelliusschen Brechungsgesetz für Lichtstrahlen, nur daß  $\operatorname{tg}$  an Stelle von  $\sin$  tritt. Wegen dieses letzteren Unterschiedes können Erscheinungen der Totalreflexion bei Kraftlinien nie vorkommen. Außerdem aber besteht der Gegensatz, daß beim Uebergang aus dem leeren Raum in ein materielles Mittel die Lichtgeschwindigkeit abnimmt, die Dielektrizitätskonstante aber zunimmt. Die Lichtstrahlen werden daher in diesem Falle nach dem Einfallslote hin, die Kraftlinien dagegen vom Einfallslote fort gebrochen. Mit dieser Brechung vom Einfallslote fort ist eine Konzentrierung des Erregungsflusses verbunden. Wenn in Fig. 18 die Linien  $A_1 B_1 C_1$  und  $A_2 B_2 C_2$  die Schnitte der Zeichnungsebene mit einer Kraftröhre bedeuten,  $q_1$  und  $q_2$  die Querschnitte dieser Röhre

in den beiden Medien (es ist wieder  $\varepsilon_2 = 3\varepsilon_1$  angenommen),  $\mathfrak{D}_1$  die Erregung längs  $A_1 B_1$  und  $A_2 B_2$ ,  $\mathfrak{D}_2$  die Erregung längs  $B_1 C_1$  und  $B_2 C_2$ , so muß der Erregungsfluß innerhalb der ganzen gebrochenen Röhre überall gleich groß sein; also

$$\mathfrak{D}_1 q_1 = \mathfrak{D}_2 q_2. \quad (77)$$

Bedeutet  $q$  die Fläche des gemeinsamen schiefen Schnittes durch die beiden Röhren, dessen Projektion in der Zeichnungsebene  $B_1 B_2$  ist, so ist

$$q_1 = q \cdot \cos \varphi_1 \quad \text{und} \quad q_2 = q \cdot \cos \varphi_2,$$

also

$$\mathfrak{D}_1 \cos \varphi_1 = \mathfrak{D}_2 \cos \varphi_2,$$

entsprechend der Bedingung, daß die Normalkomponenten der Erregung an der Grenzfläche gleich sein müssen. Es ist also:

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{D}_1} &= \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_2} = \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_2}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_1}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1^2} \operatorname{tg}^2 \varphi_1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_1}} \\ &= \sqrt{1 + \frac{\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2}{\varepsilon_1^2} \sin^2 \varphi_1}. \end{aligned} \quad (78)$$

Für  $\varphi_1 = 0$  ist  $\mathfrak{D}_2 = \mathfrak{D}_1$ . Mit wachsendem  $\varphi_1$  wird  $\mathfrak{D}_2$  immer größer, bis es für  $\varphi_1 = 90^\circ$  gleich  $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \cdot \mathfrak{D}_1$  ist, entsprechend der in Abschnitt 32 aufgestellten Bedingung für die Tangentialkomponente.

### 35. Die allgemeine Form des Potentials in dielektrischen Mitteln.

Die in Abschnitt 23 aufgestellte allgemeine Form des Potentials erfährt natürlich auch eine Abänderung, wenn das elektrische Feld nicht mehr leer, sondern von dielektrischer Materie erfüllt ist. Hat man es nur mit einem einzigen, unendlich ausgedehnten Dielektrikum zu tun, so bleibt die mathematische Schlußweise wie oben bestehen; nur müssen die elektrischen Dichtigkeiten  $\rho$  und  $\eta$  durch  $\frac{\rho}{\varepsilon}$  und  $\frac{\eta}{\varepsilon}$  ersetzt werden, so daß die Potentialgleichung (34) die Form annimmt:

$$V = \int \frac{\rho}{\varepsilon r} \, dv + \int \frac{\eta}{\varepsilon \rho} \, ds.$$

Sind aber mehrere Dielektrika vorhanden, die in Flächen aneinander grenzen, so ist die Bedingung, daß  $V$  mit seinen ersten Ableitungen im ganzen Raume stetig sei, nicht mehr erfüllt; denn an den Grenzen der



Dielektrika ändert sich ja die Normalkomponente  $\partial V / \partial n$  und vielleicht auch  $V$  selbst sprunghweise. Diesem Umstande muß bei der Integration Rechnung getragen werden, indem die Integration zunächst im Raume 1 bis zur Grenzfläche des Dielektrikums ausgeführt und dann von der anderen Seite dieser Fläche aus mit dem sprunghaft veränderten Werte der Funktion durch den Raum 2 hindurch weitergeführt wird. Zu den bei der Anwendung des Greenschen Satzes in Abschnitt 23 berechneten Oberflächenintegralen gesellen sich daher jetzt noch weitere Integrale von der Form

$$\int ds \left[ V_1 \left( \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right)_1 - \frac{1}{r} \left( \frac{\partial V}{\partial n} \right)_1 + V_2 \left( \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right)_2 - \frac{1}{r} \left( \frac{\partial V}{\partial n} \right)_2 \right]$$

genommen über alle Grenzflächen, in denen Dielektrika aneinander stoßen. Dabei sind entsprechend unseren Festsetzungen bei der Ableitung des Greenschen Satzes (s. Abschnitt 20) die positiven Normalenrichtungen jedesmal die nach außen, d. h. in das andere Medium hineinweisenden Normalen, also für die Integration auf der Seite des Mediums 1 die nach 2 weisenden Normalen und umgekehrt. Beziehen wir statt dessen beide Operationen auf dieselbe Normalenrichtung der Fläche und zwar auf die in das erste Medium hinein weisende, so sind die Vorzeichen für  $\left( \frac{\partial}{\partial n} \right)_1$  umzukehren. Das Integral läßt sich dann als Summe folgender zwei Integrale schreiben:

$$- \int ds (V_1 - V_2) \left( \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right)_1 + \int \frac{ds}{r} \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial n} \right)_1 - \left( \frac{\partial V}{\partial n} \right)_2 \right]$$

Berücksichtigen wir, daß diese Integrale auf der rechten Seite der Gleichung (33) hinzuzufügen sind, so ergibt sich nach Umstellung der Glieder und Division durch  $4\pi$  für das Potential der allgemeine Ausdruck:

$$\begin{aligned} \bar{V} = & \int \frac{\rho}{\epsilon r} dv + \int \frac{\eta}{\epsilon r} ds + \frac{1}{4\pi} \int ds (V_1 - V_2) \left( \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right)_1 \\ & - \frac{1}{4\pi} \int \frac{ds}{r} \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial n} \right)_1 - \left( \frac{\partial V}{\partial n} \right)_2 \right] \end{aligned} \quad (79)$$

Dabei erstreckt sich das zweite Integral über alle Leiteroberflächen, das dritte und vierte über alle Grenzflächen von Isolatoren, und es ist im ersten und zweiten Integrale für  $\epsilon$  stets der Wert zu setzen, der dem Medium an der betreffenden Stelle zukommt.

Die neu hinzugekommenen Integrale, die den Einfluß des Dielektri-

kums ausdrücken, haben eine solche Form, daß man sie als Potentiale elektrischer Belegungen besonderer Art auf der Grenzfläche der Isolatoren auffassen kann. Wir behandeln beide Integrale gesondert.

### 36. Elektrische Doppelschichten. Berührungselektrizität.

Wir erinnern uns daran, daß wir in Abschnitt 29 für das Potential eines elektrischen Dipols einen Ausdruck [Formel (60)] abgeleitet hatten, der, wenn die Ladung  $+e$  in der Richtung der positiven X-Achse um  $da$  gegen

$-e$  verschoben ist, den Wert  $e da \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r}$  hat. Denken wir uns auf dem

Element  $ds$  der Grenzfläche der Isolatoren, für die unsere Integrale gelten, Elektrizitäten der Dichte  $\eta$  und zwar positive und negative, die positiven aber in Richtung der positiven Normalen gegen die negativen um die Strecke  $dn$  verschoben, so stellt das Element ebenfalls einen elektrischen Dipol dar, dessen Potential

$$\eta ds dn \cdot \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r}$$

sein würde. Setzen wir das Produkt

$$\eta dn = \nu \quad (80)$$

und bilden das Integral

$$\int \nu ds \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r},$$

so erweitert diese Integration das Bild des Dipols zu dem Bild einer Fläche mit doppelter elektrischer Belegung, einer positiven Belegung auf seiten der positiven Normalenrichtung und einer negativen auf seiten der negativen Normalenrichtung, beide Belegungen getrennt durch einen sehr kleinen Abstand. Eine derartige Flächenbelegung nennt man eine elektrische Doppelschicht. Dichte der Belegung und Abstand der beiden Belegungen sind aber nicht einzeln für sich bestimmt, sondern nur ihr Produkt  $\nu$  hat einen bestimmten Wert und charakterisiert die Doppelschicht. Man nennt  $\nu$  das Moment der Doppelfläche.

Von den beiden zu behandelnden Integralen hat das erste die Form des obigen Integrals einer elektrischen Doppelschicht. Ihr Moment würde sein:

$$\nu = \frac{1}{4\pi} (V_1 - V_2).$$

Die positive Belegung liegt stets auf der Seite des Mediums, dem der

größere Wert von  $V$  zukommt, die negative auf der Seite des Mediums mit dem kleineren Werte von  $V$ .

Dem Potentialsprung, den wir an der Grenzfläche der Dielektrika angenommen haben, kann man also die Deutung geben, daß sich an der Berührungsfläche der beiden Medien eine elektrische Doppelschicht ausbildet. Diese Auffassung gilt übrigens für jede Fläche, an der ein Potentialsprung stattfindet, nicht bloß für dielektrische Medien.

Es ist schon oben bei der Besprechung der Stetigkeit der Tangentialkomponente der elektrischen Kraft an der Grenze zweier Isolatoren (s. Abschnitt 32) darauf hingewiesen worden, daß die Potentialdifferenz, wenn sie überhaupt vorhanden ist, jedenfalls längs der Grenze zweier gegebener Medien eine konstante Größe sein muß. Also ist  $v$  konstant und das Integral kann geschrieben werden:

$$v \int ds \left( \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right)$$

Wir wollen nun die Annahme machen, daß die Grenzfläche eine geschlossene Fläche sei, d. h. daß das Medium 2 ein endliches Stück eines Dielektrikums sei, eingebettet in das unendlich ausgedehnte Dielektrikum 1. Es gelten dann für das Integral die gleichen Betrachtungen, die wir auf S. 44 für ein Integral der gleichen Art bereits angestellt haben. Liegt der Aufpunkt  $P$ , für den das Potential  $\bar{V}$  gesucht wird, außerhalb des Mediums 2, so verschwindet das Integral. Der Potentialsprung an der Grenze spielt also für einen Punkt außerhalb des Mediums 2 keine Rolle. Liegt der Aufpunkt  $P$  im Inneren des Mediums 2, so hat das Integral in Berücksichtigung der Festsetzung über die positive Normalenrichtung den Wert  $-4\pi$ .

Danach ist das gesuchte Integral in diesem Falle:

$$v \int ds \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = -4\pi v = -(V_1 - V_2).$$

Für jeden Punkt im Inneren des Mediums 2 ist also der Potentialwert, der sich aus den übrigen Gliedern der allgemeinen Formel für  $\bar{V}$  berechnet, noch um den konstanten Potentialsprung  $(V_1 - V_2)$  zu verkleinern, der beim Durchgang durch die Grenzfläche eintritt.

Die Vorstellung von einer konstanten Potentialdifferenz an der Berührungsfläche zweier Medien entspricht den Erfahrungen, die man unter dem Namen der Berührungselektrizität zusammenzufassen pflegt. Wenn es sich im vorhergehenden speziell um die Berührung zweier Isolatoren handelt, so sind es also zunächst die gegenseitigen Elektri-

sierungen von Isolatoren, die Erscheinungen der Reibungselektrizität, die hierfür in Frage kommen. Werden Glas und Seide aneinander gerieben, also in innige Berührung gebracht und getrennt, so sind ihre Oberflächen entgegengesetzt geladen mit Elektrizität von hoher Spannung. Diese Spannungsdifferenz ist aber natürlich nicht gleich dem Potentialsprung ( $V_1 - V_2$ ) zu setzen. Denn wie die Spannungsdifferenz zwischen den Platten eines Kondensators bei gegebener Ladung um so kleiner ist, je näher die Platten aneinander liegen, so nimmt auch die Spannungsdifferenz jener Ladungen in dem Maße ab, als man die Oberflächen näher aneinander bringt, und sie wird daher im ursprünglichen Zustande der innigen Berührung im allgemeinen nur einen geringfügigen Betrag ausmachen. Aber sie muß vorhanden sein, wenn wir anders die Tatsache der elektrischen Ladung nach der Trennung verstehen wollen. Diese Tatsache spricht aber nicht bloß für das Vorhandensein des Potentialsprunges, sondern auch dafür, daß der elektrischen Doppelschicht, die uns oben als mathematische Umdeutung des Potentialsprunges entgegentrat, physikalische Realität zukommt. Die Elektrisierung durch Reibung erscheint gewissermaßen als ein Auseinanderreißen der Doppelschicht.

Die Potentialdifferenz, um die es sich hier handelt, ist unabhängig von der sonstigen im Felde herrschenden elektrischen Erregung. Sie muß für je zwei Medien einen bestimmten konstanten Betrag haben, der von der Beschaffenheit dieser Medien abhängt. Wie sie mit anderen Eigenschaften der Medien in Beziehung steht, darüber liegen nur wenige Erfahrungen vor. Nach Cohn<sup>1)</sup> soll ein Zusammenhang mit der Dielektrizitätskonstante, nach Heschus<sup>2)</sup> mit der Härte bestehen, indem von den beiden Stoffen immer derjenige mit der größeren Dielektrizitätskonstante, bzw. der größeren Härte positiv elektrisch wird. Es fehlt an Unterlagen, um die Theorie weiter zu entwickeln. Auch die Frage, durch was für Kräfte diese Potentialdifferenzen zustande kommen, soll hier nicht behandelt werden. Ihre Lösung kann nur mit Hilfe spezieller molekularelektrischer Vorstellungen versucht werden, und diese liegen außerhalb der Darstellung, die uns hier beschäftigt.

Wir wollen also einfach die Existenz dieser Potentialsprünge als gegeben annehmen. Dabei müssen wir aber gleich noch bemerken, daß derartige Potentialsprünge nicht bloß zwischen zwei Isolatoren, sondern ebensogut zwischen Isolator und Leiter und zwischen zwei Leitern im allgemeinen anzunehmen sind, und daß dieser Umstand in unserer Gleichung für das Potential  $V$  entsprechende Berücksichtigung finden muß. Es mußte also z. B. bei dem Uebergang des Aufpunktes  $P$  aus

<sup>1)</sup> A. Cohn, Wied. Ann. **64**, S. 217; **66**, S. 1191, 1898.

<sup>2)</sup> N. Heschus, J. d. russ. phys. chem. Ges. **33**, S. 1, 1901.

dem Isolator auf den Leiter im allgemeinen ein Potentialsprung stattfinden, so daß der Niveaufläche, in der das Dielektrikum endet, ein etwas anderer Wert des Potentials zukäme als dem Leiter selbst. Und ebenso sind im allgemeinen zwei Leiter aus verschiedenem Material, die sich berühren, nicht auf gleichem, sondern auf etwas verschiedenem Potential. Wir kommen auf diese Tatsachen bei der Behandlung der elektrischen Ströme zurück, bei denen sie eine wichtigere Rolle spielen. Doch dürfen sie bei feineren elektrostatischen Untersuchungen ebenfalls nicht vernachlässigt werden<sup>1)</sup>.

### 37. Die scheinbaren Ladungen der Dielektrika.

Das zweite der zu behandelnden Integrale lautet:

$$- \frac{1}{4\pi} \int \frac{ds}{r} \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial n} \right)_1 - \left( \frac{\partial V}{\partial n} \right)_2 \right]$$

Nach der Grenzbedingung für die Normalkomponenten der elektrischen Kraft (74) ist aber:

$$\left( \frac{\partial V}{\partial n} \right)_2 : \left( \frac{\partial V}{\partial n} \right)_1 = \epsilon_1 : \epsilon_2,$$

wodurch das Integral in die Form übergeht:

$$- \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{4\pi\epsilon_2} \int \frac{ds}{r} \left( \frac{\partial V}{\partial n} \right)_1.$$

An der Oberfläche eines Leiters im Vakuum besteht die Gleichung:

$$\frac{\partial V}{\partial n} = -4\pi\eta.$$

Setzen wir entsprechend für die Grenzfläche der Dielektrika:

$$\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2} \left( \frac{\partial V}{\partial n} \right)_1 = -4\pi\eta_i, \quad (81)$$

so nimmt das Integral die Form an:

$$+ \int \frac{\eta_i}{r} ds,$$

d. h. die Form des Potentials einer elektrischen Flächenbelegung von der Dichte  $\eta_i$ . Das letzte Integral unserer Formel für  $\bar{V}$  stellt also den Einfluß, den die Grenzfläche der Dielektrika auf den Verlauf der Kraft-

<sup>1)</sup> Vgl. als Beispiel die elektrometrischen Untersuchungen von W. Hallwachs. Wied. Ann. 29, S. 1, 1886.

linien und der Potentialflächen im Felde ausübt, so dar, als ob dieser Einfluß von einer elektrischen Flächenbelegung auf der Grenzfläche herrührte. Diese Flächenbelegung ist bedingt durch das elektrische Feld, in dem sich die Grenzfläche befindet, im Gegensatz zu der Doppelbelegung, von der der vorige Abschnitt handelte, die nicht vom elektrischen Felde, sondern nur von der Natur der beiden Körper abhing. Die Flächendichte  $\eta_i$  ist proportional der Normalkomponente der Feldstärke an der Grenzfläche und verschwindet mit dieser; sie ist in dieser Beziehung von der gleichen Art, wie die auf Leitern durch Influenzwirkung hervorgerufenen Ladungen, und man nennt sie deswegen die Influenzelektrizität der Isolatoren. Aber sie unterscheidet sich von der Influenzelektrizität auf Leitern prinzipiell durch folgendes. Auf den Leitern bewirkt die Influenz eine vollständige räumliche Trennung der beiden Elektrizitäten derart, daß es möglich ist, in bekannter Weise, durch vorübergehende Ableitung oder durch Trennung des influenzierten Leiters in zwei Teile, dauernde Ladungen zu erhalten, die nach Entfernung des einwirkenden Feldes bestehen bleiben. Das ist bei Isolatoren nicht der Fall. Oder anders ausgedrückt: Denken wir uns ein Oberflächenelement eines Leiters von einer geschlossenen Fläche umgeben, so ist der durch diese Fläche hindurchgehende Erregungsfluß stets  $= 4\pi e$ , wenn  $e$  die auf dem Element sitzende Ladung bedeutet, gleichviel ob dem Leiter von vornherein eine Ladung zuerteilt ist oder ob sie nur durch Influenz auf ihm erzeugt ist. Gehört das Oberflächenelement aber der Grenzfläche zweier Dielektrika an, die von vornherein ladungsfrei, aber der Wirkung eines elektrischen Feldes ausgesetzt sein soll, so ist der Erregungsfluß durch die das Element umschließende Fläche stets gleich Null. Aus diesem Grunde bezeichnet man diese Ladungen als scheinbare Ladungen im Gegensatz zu den wahren Ladungen, deren Raum und Flächendichten durch  $\rho$  und  $\eta$  im vorhergehenden bezeichnet worden sind. Das Vorzeichen der scheinbaren Ladungen hängt nicht bloß von der Krafrichtung an der Grenzfläche, sondern auch von den Dielektrizitätskonstanten der beiden sich berührenden Medien ab. Denn es ist

$$\eta_i = - \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{4\pi\epsilon_2} \left( \frac{\partial V}{\partial n} \right)_1 = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{4\pi\epsilon_2} \mathfrak{E}_n = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{4\pi\epsilon_1\epsilon_2} \mathfrak{D}_n. \quad (82)$$

Ist  $\epsilon_2 > \epsilon_1$ , so ist  $\eta_i$  negativ, wenn die elektrische Kraft vom ersten nach dem zweiten Medium hinein gerichtet ist. Da wo die Kraft vom Medium mit der kleineren Dielektrizitätskonstante in das Medium mit dem größeren  $\epsilon$  hinein gerichtet ist, hat die scheinbare Ladung negatives Vorzeichen; da wo die Kraft aus dem Medium mit größerem  $\epsilon$  heraustritt, hat sie positives Zeichen.

Wir nehmen als einfaches Beispiel einen Plattenkondensator, dessen

Zwischenraum, entsprechend der Figur 19, zum Teil durch ein Dielektrikum mit der Konstante  $\epsilon_1$ , zum Teil durch eine dielektrische Platte mit der Konstante  $\epsilon_2$  ausgefüllt sei. Wie in Abschnitt 26 (S. 51), werde B zur Erde abgeleitet, A positiv geladen mit der wahren Dichte  $\eta$ . Das Potential von A sei  $V_0$ ; in den Grenzebenen  $z_1$  und  $z_1 + d'$  habe das Potential die Werte  $V_{2,1}$  und  $V_{1,2}$ . Dann ist zwischen A und der oberen Grenzfläche von z und ebenso zwischen der unteren Grenzfläche von z und B das Potentialgefälle konstant:

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 4\pi \frac{\eta}{\epsilon_1}.$$

Auf der oberen Grenzfläche hat die scheinbare Ladung negatives Vorzeichen, wenn  $\epsilon_2 > \epsilon_1$ , und die Dichte

$$\eta_{ii} = -\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{4\pi \epsilon_2} \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)_1 = -\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 \epsilon_1} \eta.$$

Auf der unteren Fläche ist die scheinbare Ladung entgegengesetzt von gleicher Dichte. Innerhalb des zweiten Mediums ist das Potentialgefälle ebenfalls konstant, aber kleiner, wenn  $\epsilon_2 > \epsilon_1$  ist; denn nach der Grenzbedingung für die Normalkomponente [Formel (74) auf S. 68] ist:

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 4\pi \frac{\eta}{\epsilon_2}.$$

Man kann dafür aber auch schreiben:

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 4\pi \left( \frac{\eta}{\epsilon_1} + \eta_{ii} \right),$$

d. h. man kann den Vorgang auch so auffassen, als ob der ganze Zwischenraum von dem Medium 1 erfüllt wäre, in diesem aber in den Ebenen  $z_1 + d'$  und  $z_1$  wahre Flächenladungen von dem Vorzeichen und der Dichte der scheinbaren Ladungen eingefügt wären. Man schreibt dann die Verminderung der Feldstärke im Medium 2 einer entelektrisierenden Wirkung der scheinbaren Ladungen zu.

Es ergeben sich dann die Gleichungen:

$$V_0 - V_{1,2} = 4\pi \frac{\eta}{\epsilon_1} (d - z_1 - d')$$

$$V_{1,2} - V_{2,1} = 4\pi \frac{\eta}{\epsilon_2} d'$$

$$V_{2,1} - 0 = 4\pi \frac{\eta}{\epsilon_1} z_1$$

und durch Summation:

$$V_0 = 4\pi \eta \left( \frac{d - d'}{\epsilon_1} + \frac{d'}{\epsilon_2} \right). \quad (83)$$





die Dichte  $\frac{\eta}{\varepsilon}$  vorhanden wäre. Man bezeichnet diese wirksame Ladung als die „freie Elektrizität“ im Gegensatz zu der „wahren Elektrizität“, deren Dichte durch  $\eta$  gegeben ist. Die wahre Ladungsdichte erscheint also vermindert um den Betrag  $\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \eta$ . Diese Verminderung können wir uns hervorgebracht denken durch eine gleiché Menge entgegengesetzter Elektrizität, die als Influenzelektrizität auf der Grenzfläche des Dielektrikums gegen den Leiter auftritt. Diese Vorstellung zerlegt also die wahre Elektrizität in zwei Bestandteile ( $\eta = \eta_f + \eta_i$ ); der eine Teil ( $\eta_f = \frac{\eta}{\varepsilon}$ ) bleibt als freie Elektrizität wirksam, der andere Teil ( $\eta_i = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \eta$ ) wird durch die Influenzelektrizität des Dielektrikums gebunden. Führt man statt  $\eta$  den Erregungsfluß ein:  $4\pi \eta = \mathfrak{D}_n$ , wobei  $\mathfrak{D}_n$  die in das Dielektrikum hinein gerichtete Normalkomponente der Erregung bedeutet, so ist die influenzierte Ladungsdichte des Dielektrikums

$$\eta_i = - \frac{\varepsilon - 1}{4\pi \varepsilon} \mathfrak{D}_n, \quad (86)$$

hat also denselben Betrag, wie nach (82) die scheinbare Ladung des Dielektrikums da, wo es an den leeren Raum grenzt, unter dem Erregungsfluß  $\mathfrak{D}_n$  haben würde. Ebenso wie wir hier die freie Ladung als Differenz der wahren Ladung des Leiters und der influenzierten Ladung des Dielektrikums auffassen, können wir auch die scheinbaren Ladungen an der Grenzfläche zweier Dielektrika, die wir im vorigen Abschnitt berechnet hatten, als algebraische Summe der beiden entgegengesetzten Ladungen ansehen, die in dem obigen Betrage (86) als Influenzelektrizitäten des einen und des anderen Dielektrikums auf beiden Seiten der Grenzfläche auftreten; denn in der Tat ist

$$\begin{aligned} \eta_{i1} + \eta_{i2} &= - \frac{\varepsilon_1 - 1}{4\pi \varepsilon_1} \mathfrak{D}_{n1} - \frac{\varepsilon_2 - 1}{4\pi \varepsilon_2} \mathfrak{D}_{n2} \\ &= - \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{4\pi \varepsilon_1 \varepsilon_2} \mathfrak{D}_{n1}. \end{aligned} \quad (87)$$

Durch diese Zerlegung der an der Grenzfläche auftretenden Wirkungen wird jedem Dielektrikum ein nur von seiner Natur abhängiger Anteil zugewiesen, der an der Grenzfläche eines Dielektrikums gegen den leeren Raum für sich allein, an allen anderen Grenzflächen als Differenz gegen den entgegengesetzten Anteil des anderen Mediums zur Geltung

kommt. Es ist dabei zu beachten, daß Leiter sich auch hierbei wieder so verhalten wie Dielektrika mit unendlich großen Dielektrizitätskonstanten.

Diese an der Grenzfläche des Dielektrikums auftretende Wirkung kann man aber als Äußerungen eines durch das ganze Innere des Dielektrikums hindurch sich erstreckenden Zustandes ansehen. Denken wir uns durch ein Dielektrikum, das sich in einem elektrischen Felde befindet, irgendwo einen Schnitt hindurchgelegt, etwa einen von Materie freien schlitzförmigen Hohlraum im Sinne des Abschnittes 33, so werden an seinen beiden Seiten entgegengesetzte Influenzladungen

von der Dichte  $\frac{\varepsilon - 1}{4\pi\varepsilon} \mathfrak{D}_n$  auftreten. Denken wir uns ein Stück einer

Kraftröhre herausgeschnitten, so werden die Endflächen von Querschnitt  $q$  dieser Röhre Influenzladungen von der Größe  $\frac{\varepsilon - 1}{4\pi\varepsilon} \mathfrak{D}_n q$  tragen. Im

homogenen Dielektrikum aber kommen diese Ladungen nicht zur Wirkung, da an jeder Stelle zu beiden Seiten eines Schnittes immer gleich große entgegengesetzte Influenzladungen auftreten. Man kann sich also vorstellen, daß jedes Raumelement des Dielektrikums sich so verhält wie das ganze Dielektrikum, indem es an den in Richtung der hindurchgehenden Kraftlinien einander gegenüberstehenden Teilen seiner Oberfläche entgegengesetzte Influenzladungen trägt. Von einem solchen Teilchen sagt man, es sei polarisiert, und entsprechend denkt man sich das ganze Dielektrikum, wenn es der elektrischen Erregung unterliegt, in einem Zustande der Polarisation aller seiner Teilchen. An jeder Stelle hat diese Polarisation eine bestimmte Richtung und Größe. Die Richtung fällt mit derjenigen des Erregungsflusses zusammen, die Größe ist durch

$\frac{\varepsilon - 1}{4\pi\varepsilon} \mathfrak{D}$  gegeben. Man kann also außer  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{E}$  noch einen dritten

Vektor einführen, der diesen Zustand charakterisieren soll.

Man bezeichnet ihn mit  $\mathfrak{P}$ :

$$\mathfrak{P} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi\varepsilon} \mathfrak{D} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \mathfrak{E} \quad (88)$$

und nennt ihn die Elektrisierung oder die elektrische Polarisation des Dielektrikums.

Der Gedanke, die Oberflächenwirkung des Dielektrikums als Folge des inneren Polarisationszustandes anzusehen, läßt sich auch in Gestalt einer mathematischen Umformung der entsprechenden Anteile des Potentials ausdrücken. Wir wollen zunächst annehmen, daß nur ein allseitig begrenztes Stück eines Dielektrikums im freien Äther gegeben sei. Das von den scheinbaren Ladungen seiner Oberfläche herrührende Potential hat nach Abschnitt 37 (S. 80) den Wert:

$$- \frac{\varepsilon - 1}{4\pi\varepsilon} \int \frac{ds}{r} \left( \frac{\partial V}{\partial n} \right)_1 \quad \text{oder} \quad + \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \int \frac{ds}{r} \left( \frac{\partial V}{\partial n} \right)_2.$$

Mit Hilfe des Greenschen Satzes in seiner ersten Form (30) können wir das Oberflächenintegral in ein Raumintegral über den von dem Dielektrikum eingenommenen Raum verwandeln, und wenn wir berücksichtigen, daß im homogenen Dielektrikum  $\Delta V = 0$  ist, so erhalten wir für das Potential den Ausdruck:

$$- \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \int dv \left[ \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \cdot \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \cdot \frac{\partial V}{\partial z} \right],$$

wobei das negative Zeichen daher rührt, daß bei der Aufstellung des Greenschen Satzes die nach außen gerichtete, im obigen Integral dagegen die nach innen gerichtete Oberflächennormale positiv gerechnet wurde. Nun hatten wir im Abschnitt 29 als Ausdruck für das Potential eines elektrischen Dipols gefunden:

$$+ e da \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a} + e db \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b} + e dc \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c},$$

wo die  $a b c$  die Koordinaten des Dipols und die  $e d a$ ,  $e d b$ ,  $e d c$  die Komponenten seines elektrischen Momentes darstellten. Ein Vergleich dieses Ausdruckes mit dem obigen Raumintegral zeigt, daß die Wirkung des Dielektrikums auch so aufgefaßt werden kann, als ob jedes Raumelement des Dielektrikums ein elektrischer Dipol wäre, dessen Moment die Komponenten:

$$\begin{aligned} - \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \frac{\partial V}{\partial x} dv &= \frac{\varepsilon - 1}{4\pi\varepsilon} \mathfrak{D}_x dv, & - \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \frac{\partial V}{\partial y} dv &= \frac{\varepsilon - 1}{4\pi\varepsilon} \mathfrak{D}_y dv, \\ - \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \frac{\partial V}{\partial z} dv &= \frac{\varepsilon - 1}{4\pi\varepsilon} \mathfrak{D}_z dv, \end{aligned}$$

also den resultierenden Betrag

$$\frac{\varepsilon - 1}{4\pi\varepsilon} \mathfrak{D} \cdot dv = \mathfrak{P} \cdot dv \quad (89)$$

habe. In diesem Sinne bezeichnet man die Größe  $\mathfrak{P}$  auch als das elektrische Moment der Volumeneinheit.

Wie die entsprechende Ueberlegung durchzuführen ist, wenn in der Oberfläche, für die das Integral zu nehmen ist, zwei verschiedene Dielektrika aneinander stoßen, ist leicht ersichtlich. Entsprechend der Zerlegung in Formel 87 (S. 84) zerfällt das Oberflächenintegral alsdann in zwei, und die Umformung in das Raumintegral ist für das eine In-

tegral über den Raum des einen, für das andere über den Raum des anderen Dielektrikums auszuführen.

Die Beziehung zwischen den drei Größen  $\mathfrak{D}$ ,  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{P}$  läßt sich in der Form schreiben:

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + 4\pi \mathfrak{P}. \quad (90)$$

Damit ist der Erregungsfluß im Dielektrikum in zwei Anteile geteilt. Im leeren Raum wird der von einer gegebenen Elektrizitätsmenge ausgehende Erregungsfluß nur durch den Kraftfluß des Aethers übertragen,  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{E}$  sind identisch. Innerhalb der Materie aber haben wir uns den Aether auch als vorhanden, die Materie als in den Aether eingebettet zu denken. In einem materiellen Dielektrikum geht dann ein Teil des Erregungsflusses als Kraftfluß durch den Aether, ein anderer Teil wird von der Materie aufgenommen und geht als Polarisationsfluß (in der Stärke  $4\pi \mathfrak{P}$ ) durch die Materie hindurch. Bei gegebener Erregung  $\mathfrak{D}$  — d. h. gegebenen wahren Elektrizitätsmengen — ist  $\mathfrak{E}$  um so kleiner, je größer  $\mathfrak{P}$ , d. h. je größer  $\epsilon$  ist. Wird dagegen  $\mathfrak{E}$  konstant gehalten — d. h. bei gegebener Potentialdifferenz —, so ist  $\mathfrak{D}$  um so größer, je größer  $\mathfrak{P}$ , d. h.  $\epsilon$  ist.

### 39. Dielektrische Kugel in homogenem Felde.

Die allgemeinen Betrachtungen über die Dielektrika wollen wir wieder auf den einfachsten Spezialfall anwenden, auf den Fall eines kugelförmigen Dielektrikums, das sich im leeren Raum befinden soll. In Abschnitt 28 hatten wir den Fall einer leitenden Kugel in einem homogenen Felde behandelt und gesehen, daß die Dichte der influenzierten Flächenbelegung durch die Formel (53)

$$\eta = \frac{3}{4\pi} \mathfrak{E}_0 \cos \vartheta$$

gegeben ist, wenn  $\mathfrak{E}_0$  die influenzierende Feldstärke und  $\vartheta$  der Winkelabstand des betreffenden Punktes der Kugeloberfläche von dem Endpunkte des in die Richtung von  $\mathfrak{E}_0$  fallenden Durchmessers ist. Dabei ist natürlich im Inneren der leitenden Kugel das Feld gleich Null.

Denken wir uns an Stelle der leitenden Kugel eine dielektrische Kugel und denken wir uns diese in ein elektrisches Feld von solcher Beschaffenheit gebracht, daß im Inneren der Kugel eine homogene Erregung entsteht. Ihre Richtung werde als X-Achse genommen. Es soll also im ganzen Inneren der Kugel  $\mathfrak{D}_y$  und  $\mathfrak{D}_z = 0$  sein und  $\mathfrak{D}_x$  einen konstanten Wert  $\mathfrak{D}_i$  haben. Dann ist die Normalkomponente der Erregung für einen beliebigen Punkt der Kugeloberfläche:

$$\mathfrak{D}_n = -\mathfrak{D}_i \cos \vartheta.$$

Wenn wir beachten, daß  $n$  die nach dem Inneren der Kugel gerichtete Normale bedeuten soll, und wenn wir ferner festsetzen, daß  $\vartheta = 0^\circ$  sein soll für den Pol der Kugel, in dem der Erregungsfluß aus der Kugel hinausweist,  $\vartheta = 180^\circ$  für den Pol, in dem die Erregung nach innen hineingeht, dann ist nach Formel (86) die Dichtigkeit der scheinbaren Ladung des Dielektrikums gegen den Aether:

$$\eta = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi\varepsilon} \mathfrak{D}_i \cos \vartheta. \quad (91)$$

Daraus folgt, daß das Gesetz für die Verteilung der Ladungen auf der gleichmäßig polarisierten dielektrischen Kugel mit dem Gesetz übereinstimmt, nach dem sich die Influenzelektrizität auf einer leitenden Kugel in einem homogenen Feld verteilt. Also muß das äußere Feld für die dielektrische Kugel der gleichen Bedingung genügen, die jene Verteilung auf der leitenden Kugel hervorbrachte, d. h. es muß ein homogenes Feld sein, oder wenn eine dielektrische Kugel in ein homogenes elektrisches Feld gebracht wird, so wird sie in ihrem Inneren gleichförmig polarisiert. Die Richtung der Polarisation fällt mit der Richtung der Kraft des elektrisierenden Feldes zusammen. Die Frage, wie stark das homogene äußere Feld in unendlich großer Entfernung von der Kugel sein muß, um im Inneren der Kugel die angenommene Erregung  $\mathfrak{D}_i$  oder die elektrische Kraft  $\mathfrak{E}_i = \frac{\mathfrak{D}_i}{\varepsilon}$  hervorzubringen, läßt sich durch folgende Ueberlegungen beantworten.

Wenn die scheinbare Ladung von der Dichte

$$\frac{\varepsilon - 1}{4\pi\varepsilon} \mathfrak{D}_i \cos \vartheta$$

auf einer leitenden Kugel säße, so würde dies ein äußeres Feld von einer solchen Stärke  $\mathfrak{E}_0$  erfordern, daß

$$\frac{3}{4\pi} \mathfrak{E}_0 = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi\varepsilon} \mathfrak{D}_i$$

wäre, also ein Feld von der Stärke

$$\mathfrak{E}_0 = \frac{\varepsilon - 1}{3\varepsilon} \mathfrak{D}_i = \frac{\varepsilon - 1}{3} \mathfrak{E}_i. \quad (92)$$

Die Kraftlinien dieses Feldes, dessen Potential nach Abschnitt 28 Formel (52) durch

$$V_1 = -\frac{\varepsilon - 1}{3} \mathfrak{E}_i \left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right) x + A_1 \quad (93)$$

gegeben wäre, würden in den Ladungen der Kugel enden und nicht in das Innere eindringen. Durch die dielektrische Kugel aber geht ein Teil des äußeren Kraftflusses in der Stärke  $\mathfrak{E}_i$  hindurch. Wir erhalten

die vollständige Lösung für den Außenraum, wenn wir über das soeben gekennzeichnete Feld noch ein homogenes Feld von der Stärke  $\mathfrak{E}_i$  an allen Punkten des Raumes gelagert denken. Dessen Potential wäre:

$$V_2 = - \mathfrak{E}_i x + A_2. \quad (94)$$

Das Gesamtpotential für den Außenraum ist also:

$$\left. \begin{aligned} V_a = V_1 + V_2 &= - \frac{\varepsilon + 2}{3} \mathfrak{E}_i x + \frac{\varepsilon - 1}{3} \frac{R^3}{r^3} \mathfrak{E}_i x + A \\ &= - \frac{\varepsilon + 2}{3} \mathfrak{E}_i \left( 1 - \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \frac{R^3}{r^3} \right) x + A \end{aligned} \right\} \quad (95)$$

Bezeichnen wir wieder die Feldstärke in unendlicher Entfernung mit  $\mathfrak{E}_0$ , so muß  $\mathfrak{E}_0$  den Wert haben:

$$\mathfrak{E}_0 = \frac{\varepsilon + 2}{3} \mathfrak{E}_i.$$

Durch ein homogenes Feld von der Stärke  $\mathfrak{E}_0$  wird also in einer dielektrischen Kugel ein Feld von der Stärke

$$\mathfrak{E}_i = \frac{3}{\varepsilon + 2} \mathfrak{E}_0 \quad (96)$$

und eine Erregung

$$\mathfrak{D}_i = \frac{3 \varepsilon}{\varepsilon + 2} \mathfrak{E}_0 \quad (97)$$

erzeugt. Setzen wir noch fest, daß das Potential für  $x = 0$ , also in der  $YZ$ -Ebene den Wert Null haben soll, so wird es im Aeußeren dargestellt durch die Formel:

$$V_a = - \left( 1 - \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \frac{R^3}{r^3} \right) x \mathfrak{E}_0, \quad (98)$$

im Inneren der Kugel durch die Formel

$$V_i = - \frac{3}{\varepsilon + 2} x \mathfrak{E}_0. \quad (99)$$

Für die Kugeloberfläche, d. h. für  $r = R$ , hat  $V_a$  den gleichen Wert wie  $V_i$ . Daß auch den durch das Brechungsgesetz der Kraftlinien ausgesprochenen Grenzbedingungen genügt wird, erkennt man, wenn man aus den Ausdrücken für das Potential die Kraftkomponenten im Außen- und im Innenraum bildet. Zunächst setzen wir zur Vereinfachung:

$$M = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} R^3. \quad (100)$$

Dieser Ausdruck ist nichts anderes als das elektrische Moment der ganzen Kugel im Felde 1. Denn das Moment der Volumeneinheit ist nach (90):

das der ganzen Kugel vom Volumen  $v$  also:

$$\mathfrak{P} \cdot v = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} R^3 \mathfrak{G}_0 = M \mathfrak{G}_0.$$

Dann erhält man für die Kraftkomponenten die Ausdrücke:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{G}_{ax} &= \left(1 - \frac{M}{r^3}\right) \mathfrak{G}_0 + 3 \frac{M x^2}{r^5} \mathfrak{G}_0 = \left(1 - \frac{M}{r^3}\right) \mathfrak{G}_0 + \frac{3M}{r^3} \mathfrak{G}_0 \cos^2(x, r) \\ \mathfrak{G}_{ay} &= + 3 \frac{M xy}{r^5} \mathfrak{G}_0 = + \frac{3M}{r^3} \mathfrak{G}_0 \cos(x, r) \cos(y, r) \\ \mathfrak{G}_{az} &= + 3 \frac{M xz}{r^5} \mathfrak{G}_0 = + 3 \frac{M}{r^3} \mathfrak{G}_0 \cos(x, r) (\cos z, r) \\ \mathfrak{G}_{ix} &= \frac{3}{\varepsilon + 2} \mathfrak{G}_0 \\ \mathfrak{G}_{iy} &= \mathfrak{G}_{iz} = 0. \end{aligned} \right\} (101)$$

Da  $\mathfrak{G}_{ay} : \mathfrak{G}_{az} = y : z$  ist, so hat die in die YZ-Ebene fallende Komponente der Kraft die Richtung der Projektion  $\rho$  des Radius  $r$  auf die XY-Ebene. Die Gesamtkraft liegt also immer in der durch die X-Achse und den Radius  $r$  gelegten Ebene. Die Komponente, die in die Richtung des Radius fällt, hat den Wert:

$$\mathfrak{G}_{ar} = \left(1 + \frac{2M}{r^3}\right) \mathfrak{G}_0 \cos(x, r),$$

die dazu senkrechte Komponente hat den Wert:

$$\mathfrak{G}_{at} = \left(1 - \frac{M}{r^3}\right) \mathfrak{G}_0 \sin(x, r).$$

Für die Kugeloberfläche gehen diese Ausdrücke über in:

$$\mathfrak{G}_{aR} = \frac{3\varepsilon}{\varepsilon + 2} \mathfrak{G}_0 \cos(x, r),$$

$$\mathfrak{G}_{aT} = \frac{3}{\varepsilon + 2} \mathfrak{G}_0 \sin(x, r).$$

Da für die Innenseite der Kugeloberfläche

$$\mathfrak{G}_{iR} = \frac{3}{\varepsilon + 2} \mathfrak{G}_0 \cos(x, r),$$

$$\mathfrak{G}_{iT} = \frac{3}{\varepsilon + 2} \mathfrak{G}_0 \sin(x, r)$$

ist, so sind die Grenzbedingungen erfüllt; denn es ist

$$\mathcal{E}_{nR} = \varepsilon \mathcal{E}_{iR} \quad \text{und} \quad \mathcal{E}_{nT} = \mathcal{E}_{iT}.$$

Bedeutet  $\gamma_a$  den Winkel der äußeren Kraft,  $\gamma_i$  den der inneren Kraft mit dem Radius für einen Punkt der Kugeloberfläche, so ist

$$\operatorname{tg} \gamma_a = \frac{\mathcal{E}_{nT}}{\mathcal{E}_{nR}} = \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{tg} (x, r), \quad \operatorname{tg} \gamma_i = \operatorname{tg} (x, r). \quad (102)$$

Fig. 20 zeigt, wie die Kraftlinien in jedem Punkte der Kugel ge-

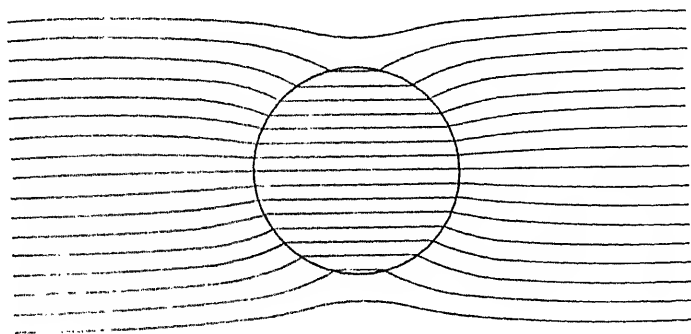


Fig. 20.

brochen werden. Je größer  $\varepsilon$  ist, um so kleiner wird  $\gamma_a$ ; für  $\varepsilon = \infty$  ist  $\gamma_a = 0$ , d. h. die Kraftlinien des äußeren Feldes münden senkrecht

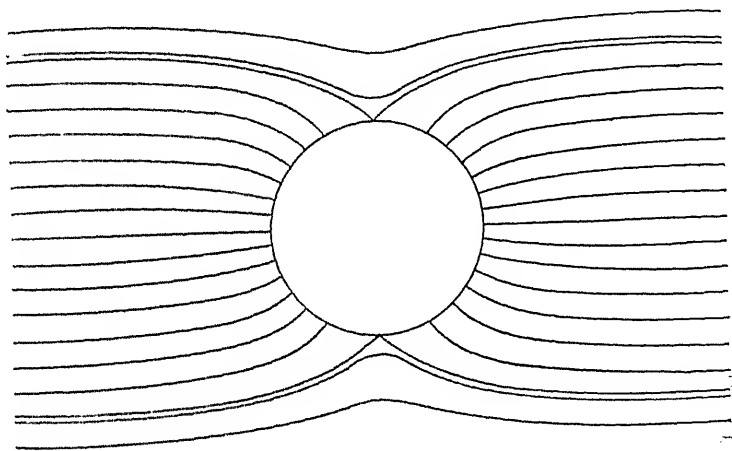


Fig. 21.

auf die Oberfläche der Kugel, wie es für eine leitende Kugel Fig. 21 darstellt.

Der Fall, daß ein allseitig begrenztes Dielektrikum in einem homogenen Felde eine homogene Elektrisierung erfährt, läßt sich nur verwirklichen, wenn die Begrenzungsfläche des Dielektrikums ein Ellipsoid ist. Der behandelte Fall der Kugel ist ein Spezialfall dieses allgemeinen



Satzes. Den Beweis des Satzes wollen wir hier nicht führen<sup>1)</sup>, sondern uns damit begnügen, das Resultat der Rechnung anzugeben. Wenn das äußere Feld in Richtung einer der Achsen des Ellipsoides wirkt, so ist auch im Inneren die Elektrisierung dieser Achse parallel und in ihrer Stärke der Stärke des elektrisierenden Feldes proportional. Aber für jede der drei Achsen ist der Proportionalitätsfaktor ein anderer. Nehmen wir die Richtung der drei Achsen als Koordinatenachsen, so kann man schreiben:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{G}_{ix} &= \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} L} \mathfrak{G}_{0x} \\ \mathfrak{G}_{iy} &= \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} M} \mathfrak{G}_{0y} \\ \mathfrak{G}_{iz} &= \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} N} \mathfrak{G}_{0z} \end{aligned} \right\} \quad (103)$$

wobei  $L, M, N$  Größen sind, die von den Dimensionen des Ellipsoides abhängen und die alle drei den Wert  $\frac{4\pi}{3}$  annehmen, wenn das Ellipsoid in eine Kugel übergeht. Bringt man das Ellipsoid in solcher Lage in das homogene Feld, daß die Richtung des Feldes mit den Achsen des Ellipsoides Winkel bildet, so folgt aus obigem, daß zwar auch in diesem Falle die Elektrisierung des Ellipsoides homogen ist, aber ihre Richtung nicht mehr mit der des elektrisierenden Feldes zusammenfällt. Daraus ergibt sich ein Drehungsmoment, das ein Ellipsoid in solcher Lage im homogenen Feld erfährt. Auf diese Frage kommen wir später zurück.

Hier wollen wir nur noch die Ausdrücke angeben, in die obige Formeln übergehen, wenn das Ellipsoid ein Rotationsellipsoid ist und in Richtung seiner Rotationsachse elektrisiert wird. Wir nehmen diese Achse als X-Achse, setzen also  $\mathfrak{G}_{0y}$  und  $\mathfrak{G}_{0z} = 0$ . Bedeutet  $e$  die Exzentrizität der Meridianellipse, so ist für ein abgeplattetes Ellipsoid<sup>2)</sup>:

$$L = 4\pi \left( \frac{1}{e^2} - \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e^3 \arcsin e} \right) \quad (104)$$

und geht, wenn  $e = 1$ , das Ellipsoid also zu einer unendlich dünnen Scheibe wird, über in:

<sup>1)</sup> Vgl. darüber Dirichlet, Crelles Journal **32**, S. 80, 1846. Ferner G. Kirchhoff, Vorlesungen über Mechanik, 4. Aufl., Leipzig 1897, S. 215; Vorlesungen über Elektrizität und Magnetismus, Leipzig 1891, S. 163.

<sup>2)</sup> In bezug auf die Ableitung der Formeln (104) und (105) vgl. man J. C. Maxwell, Lehrbuch II, Art. 438 ff.

$$L = 4\pi.$$

In einer solchen Scheibe ist also, wenn sie senkrecht zu den Kraftlinien des äußeren Feldes liegt:

$$\mathcal{E}_i = \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{E}_0.$$

Für ein stark verlängertes Rotationsellipsoid ist:

$$L = 4\pi (1 - e^2) \left( \ln \frac{2}{\sqrt{1 - e^2}} - 1 \right) \quad (105)$$

und geht für  $e = 1$ , also für ein unendlich dünnes Rotationsellipsoid über in den Wert Null. Für einen unendlich dünnen Stab, der in Richtung der Kraftlinien in das Feld gebracht wird, ist daher:

$$\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_0.$$

Das Resultat für die beiden Grenzfälle hätten wir übrigens direkt aus den bekannten Grenzbedingungen hinschreiben können analog der Behandlung der entsprechend geformten Höhlungen in einem Dielektrikum in § 33.

#### 40. Energie des elektrostatischen Feldes.

Ein geladener Körper repräsentiert ein gewisses Quantum von Energie. Denn um ihn zu laden, war ein bestimmter Aufwand von mechanischer Arbeit notwendig. Für einen geladenen Konduktor läßt sich die Größe dieser Arbeit leicht aus der Ladung und dem Potential des Konduktors berechnen. Denn nach der Bedeutung des Potentials  $V$  stellt das Produkt  $V \cdot de$  die mechanische Arbeit dar, die erforderlich ist, um die  $\infty$  kleine Elektrizitätsmenge  $de$  aus der Unendlichkeit, wo  $V = 0$  gesetzt ist, bis zur Stelle mit dem Potentialwerte  $V$  zu bringen. Wenn also  $V_0$  das Potential des Konduktors bedeutet, so ist die mechanische Arbeit, um  $de$  bis auf die Oberfläche des Konduktors zu bringen:  $V_0 de$ . Nach Formel (35) auf S. 50 hängt aber  $V_0$  mit der Ladung  $e$  durch die Beziehung

$$e = CV_0$$

zusammen. Folglich ist die gesamte Arbeit, die geleistet werden muß, um den Körper von der Ladung 0 bis zur Ladung  $e$  aufzuladen:

$$W = \int_0^e V_0 de = \frac{1}{C} \int_0^e e de = \frac{1}{2} \frac{e^2}{C} = \frac{1}{2} C V_0^2 = \frac{1}{2} e V_0. \quad (106)$$

Sind eine Anzahl von Konduktoren vorhanden, deren Potentialwerte  $V_1, V_2, V_3$  usw. dann natürlich für jeden Konduktor nicht bloß von seiner Ladung, sondern auch von den Ladungen und den Lagen der

anderen Konduktoren abhängen, so ist die gesamte durch den Ladungsprozeß aufgespeicherte Energie:

$$W = \frac{1}{2} \sum e_h V_h. \quad (107)$$

Dabei sind unter den  $e$  immer die wahren Ladungen, unter den  $V$  die Potentiale verstanden, die die Konduktoren unter den Bedingungen, unter denen sie sich befinden, durch diese Ladungen annehmen; diese Werte von  $V$  hängen natürlich auch von dem Dielektrikum ab, in dem sich die Konduktoren befinden.

Man nennt die Größe  $W$  die elektrische Energie des geladenen Systems. Formel (107) ist der einfachste und unmittelbarste Ausdruck, der sich für diese Größe aufstellen läßt. Er gibt zunächst nur ein Maß der Energie, da er die mechanische Arbeit darstellt, die zur Herstellung dieses Quantums von potentieller elektrischer Energie erforderlich ist. Fragt man nach dem physikalischen Zustande, der die eigentliche Grundlage für diese Aufspeicherung von Energie ist, so würden nach der Formel (107) die Konduktoren mit ihren Ladungen als die Träger der Energie erscheinen. Dieses Bild entspricht den Vorstellungen der älteren Elektrizitätslehre. Die moderne Feldtheorie dagegen betrachtet den zwischen den Konduktoren befindlichen Raum, sei es leerer Raum oder materielles Dielektrikum, als Vermittler der elektrischen Wirkungen, als Sitz der elektrischen Kraft und entsprechend auch als Träger der elektrischen Energie. Dieser Anschauung trägt man Rechnung, indem man den obigen Ausdruck für die Energie umwandelt in ein über das ganze elektrische Feld sich erstreckendes Raumintegral.

Um diese Umformung auszuführen, berücksichtigen wir, daß

$$e_h = \int \eta_h \, ds_h = - \frac{1}{4\pi} \int \epsilon \frac{\partial V_h}{\partial n} \, ds_h,$$

das Integral genommen über die Oberfläche des  $h^{\text{ten}}$  Leiters, und daß  $V_h$  für jeden Konduktor einen konstanten Wert hat. Man kann also schreiben:

$$W = - \frac{1}{8\pi} \sum \int \epsilon V_h \frac{\partial V_h}{\partial n} \, ds_h. \quad (108)$$

Zu dieser Summe von Integralen über die einzelnen Konduktoroberflächen kann man, ohne den Wert von  $W$  zu ändern, noch ein Integral der gleichen Form über eine unendlich ferne Kugeloberfläche hinzufügen; denn dieses Integral ist 0, da zwar die Oberfläche von der Ordnung  $r^2$  unendlich groß, das Produkt  $V \frac{\partial V}{\partial n}$  dagegen von der Ordnung  $\frac{1}{r^3}$  unendlich klein wird. Diese Summe von Oberflächenintegralen läßt

sch durch Anwendung des Greenschen Satzes in seiner ersten Form (30) unmittelbar in ein Raumintegral über das elektrische Feld verändern, das zwischen den Konduktoren und der unendlich fernen Kugelfläche liegt; wir müssen nur beachten, daß in der Formel (30) die nach außen gerichtete Normale positiv gerechnet ist, während in der vorigen Formel  $dn$  die nach innen, d. h. in das Dielektrikum hinein gerichtete Normale bezeichnet. Indem wir dementsprechend das Vorzeichen umkehren und in der Formel des Greenschen Satzes  $U_1 = \epsilon V$ ,  $U_2 = V$  setzen, erhalten wir aus (108) den Ausdruck:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{8\pi} \int dv \left[ \frac{\partial(\epsilon V)}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial(\epsilon V)}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial(\epsilon V)}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} + \epsilon V \Delta V \right] \\ &= \frac{1}{8\pi} \int dv \epsilon \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right] \\ &\quad + \frac{1}{8\pi} \int dv V \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \epsilon \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \epsilon \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \epsilon \frac{\partial V}{\partial z} \right) \right] \end{aligned} \quad (109)$$

Diese Umformung gilt unter der Voraussetzung, daß  $\epsilon$  im betrachteten Raume endlich, eindeutig und stetig ist. Nun ist

$$-\epsilon \frac{\partial V}{\partial x} = \mathfrak{D}_x, \quad -\epsilon \frac{\partial V}{\partial y} = \mathfrak{D}_y, \quad -\epsilon \frac{\partial V}{\partial z} = \mathfrak{D}_z$$

und das zweite Integral geht in die Form über:

$$\frac{1}{8\pi} \int dv V \left( -\frac{\partial \mathfrak{D}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{D}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{D}_z}{\partial z} \right)$$

Setzen wir voraus, daß wahre Ladungen, deren Maß ja die Größe  $\mathfrak{D}$  ist, nur auf den Konduktoren vorliegen, aber nicht im Raume, so ist für den ganzen Raum  $\left( \frac{\partial \mathfrak{D}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{D}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{D}_z}{\partial z} \right) = 0$ , und es bleibt nur das erste Integral als Ausdruck von  $W$  übrig:

$$W = \frac{1}{8\pi} \int dv \epsilon \mathfrak{E}^2, \quad (110)$$

wobei  $\mathfrak{E}$  die elektrische Kraft an der Stelle des Raumelementes  $dv$  bedeutet.

Wenn  $\epsilon$  nicht stetig im Raum verläuft, sondern an der Grenzfläche zweier Dielektrika sich sprungweise ändert, so wäre der Raum, um obige Umformung durchführen zu können, noch durch diese Grenzfläche unterteilt zu denken, und die Integration wäre von der einen Seite her bis dieser Grenzfläche und dann auf der anderen Seite mit dem sprunghaft veränderten Werte weiterzuführen. Um den Greenschen Satz an-

anderen Konduktoren abhängen, so ist die gesamte durch den Ladungsprozeß aufgespeicherte Energie:

$$W = \frac{1}{2} \sum e_h V_h. \quad (107)$$

Dabei sind unter den  $e$  immer die wahren Ladungen, unter den  $V$  die Potentiale verstanden, die die Konduktoren unter den Bedingungen, unter denen sie sich befinden, durch diese Ladungen annehmen; diese Werte von  $V$  hängen natürlich auch von dem Dielektrikum ab, in dem sich die Konduktoren befinden.

Man nennt die Größe  $W$  die elektrische Energie des geladenen Systems. Formel (107) ist der einfachste und unmittelbarste Ausdruck, der sich für diese Größe aufstellen läßt. Er gibt zunächst nur ein Maß der Energie, da er die mechanische Arbeit darstellt, die zur Herstellung dieses Quantums von potentieller elektrischer Energie erforderlich ist. Fragt man nach dem physikalischen Zustande, der die eigentliche Grundlage für diese Aufspeicherung von Energie ist, so würden nach der Formel (107) die Konduktoren mit ihren Ladungen als die Träger der Energie erscheinen. Dieses Bild entspricht den Vorstellungen der älteren Elektrizitätslehre. Die moderne Feldtheorie dagegen betrachtet den zwischen den Konduktoren befindlichen Raum, sei es leerer Raum oder materielles Dielektrikum, als Vermittler der elektrischen Wirkungen, als Sitz der elektrischen Kraft und entsprechend auch als Träger der elektrischen Energie. Dieser Anschauung trägt man Rechnung, indem man den obigen Ausdruck für die Energie umwandelt in ein über das ganze elektrische Feld sich erstreckendes Raumintegral.

Um diese Umformung auszuführen, berücksichtigen wir, daß

$$e_h = \int \eta_h \, ds_h = - \frac{1}{4\pi} \int \epsilon \frac{\partial V_h}{\partial n} \, ds_h,$$

das Integral genommen über die Oberfläche des  $h^{\text{ten}}$  Leiters, und daß  $V_h$  für jeden Konduktor einen konstanten Wert hat. Man kann also schreiben:

$$W = - \frac{1}{8\pi} \sum \int \epsilon V_h \frac{\partial V_h}{\partial n} \, ds_h. \quad (108)$$

Zu dieser Summe von Integralen über die einzelnen Konduktoroberflächen kann man, ohne den Wert von  $W$  zu ändern, noch ein Integral der gleichen Form über eine unendlich ferne Kugeloberfläche hinzufügen; denn dieses Integral ist 0, da zwar die Oberfläche von der Ordnung  $r^2$  unendlich groß, das Produkt  $V \frac{\partial V}{\partial n}$  dagegen von der Ordnung  $\frac{1}{r^3}$  unendlich klein wird. Diese Summe von Oberflächenintegralen läßt

sich durch Anwendung des Greenschen Satzes in seiner ersten Form (30) unmittelbar in ein Raumintegral über das elektrische Feld verwandeln, das zwischen den Konduktoren und der unendlich fernen Kugelfläche liegt; wir müssen nur beachten, daß in der Formel (30) die nach außen gerichtete Normale positiv gerechnet ist, während in der obigen Formel  $dn$  die nach innen, d. h. in das Dielektrikum hinein gerichtete Normale bezeichnet. Indem wir dementsprechend das Vorzeichen umkehren und in der Formel des Greenschen Satzes  $U_1 = \varepsilon V$ ,  $U_2 = V$  setzen, erhalten wir aus (108) den Ausdruck:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{8\pi} \int dv \left[ \frac{\partial(\varepsilon V)}{\partial x} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial(\varepsilon V)}{\partial y} \cdot \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial(\varepsilon V)}{\partial z} \cdot \frac{\partial V}{\partial z} + \varepsilon V \Delta V \right] \\ &= \frac{1}{8\pi} \int dv \varepsilon \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right] \\ &\quad + \frac{1}{8\pi} \int dv V \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \varepsilon \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \varepsilon \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \varepsilon \frac{\partial V}{\partial z} \right) \right] \end{aligned} \quad (109)$$

Diese Umformung gilt unter der Voraussetzung, daß  $\varepsilon$  im betrachteten Raume endlich, eindeutig und stetig ist. Nun ist

$$\varepsilon \frac{\partial V}{\partial x} = \mathfrak{D}_x, \quad -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial y} = \mathfrak{D}_y, \quad -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial z} = \mathfrak{D}_z$$

und das zweite Integral geht in die Form über:

$$\frac{1}{8\pi} \int dv V \left( \frac{\partial \mathfrak{D}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{D}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{D}_z}{\partial z} \right)$$

Setzen wir voraus, daß wahre Ladungen, deren Maß ja die Größe  $\mathfrak{D}$  ist, nur auf den Konduktoren vorliegen, aber nicht im Raume, so ist für den ganzen Raum  $\left( \frac{\partial \mathfrak{D}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{D}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{D}_z}{\partial z} \right) = 0$ , und es bleibt nur das erste Integral als Ausdruck von  $W$  übrig:

$$W = \frac{1}{8\pi} \int dv \varepsilon \mathfrak{E}^2, \quad (110)$$

wobei  $\mathfrak{E}$  die elektrische Kraft an der Stelle des Raumelementes  $dv$  bedeutet.

Wenn  $\varepsilon$  nicht stetig im Raum verläuft, sondern an der Grenzfläche zweier Dielektrika sich sprungweise ändert, so wäre der Raum, um obige Umformung durchführen zu können, noch durch diese Grenzfläche unterteilt zu denken, und die Integration wäre von der einen Seite her bis zu dieser Grenzfläche und dann auf der anderen Seite mit dem sprunghaft veränderten Werte weiterzuführen. Um den Greenschen Satz an-

wenden zu können, wären dann zu den Oberflächenintegralen der Formel (108) außer dem Integral über die unendlich ferne Kugel noch Integrale über diese Grenzflächen von der Form

$$\frac{1}{8\pi} \int ds \left[ \epsilon_1 V_1 \frac{\partial V_1}{\partial n} - \epsilon_2 V_2 \frac{\partial V_2}{\partial n} \right]$$

hinzuzufügen. Da an der Grenze zweier Dielektrika

$$\epsilon_1 \frac{\partial V_1}{\partial n} = \epsilon_2 \frac{\partial V_2}{\partial n} = - \mathfrak{D}_n$$

ist nach (74), (Abschnitt 32) und anderseits  $V_1 - V_2$  als konstant angesehen werden muß (Abschnitt 36), so erhalten diese Integrale die Form

$$- \frac{1}{8\pi} (V_1 - V_2) \int ds \mathfrak{D}_n.$$

Das Integral  $\int ds \mathfrak{D}_n$  ist aber nach (63') (S. 66) nichts anderes als das  $4\pi$ -fache der von der Fläche umschlossenen wahren Ladung. Ist diese gleich Null, so verschwindet das Integral über die betreffende Grenzfläche, kann also zu den Integralen der Formel (108) hinzugefügt werden, ohne den Wert von  $W$  zu ändern. Enthält dagegen das Dielektrikum in seinem Innern eine wahre Ladung  $e$ , umgibt es etwa in geschlossener Schicht einen geladenen Konduktor, so hat das Integral den Wert  $-\frac{1}{2} e (V_1 - V_2)$  und seine Hinzufügung würde den Wert von  $W$  um diesen Betrag ändern. Allein in diesem Falle ist der Ansatz der Formeln (106) und (107) nicht ausreichend und durch folgende Ueberlegungen zu ersetzen.

Es sei der  $h^{\text{te}}$  Konduktor von einem Dielektrikum 1 umgeben, das in geschlossener Grenzfläche an ein den übrigen Raum erfüllendes Dielektrikum 2 grenze. An der Grenzfläche bestehe der Potentialsprung  $V_1 - V_2$ . Dann besteht die Arbeit, die man leisten muß, um die Elektrizitätsmenge  $de$  auf den Konduktor vom Potential  $V_h$  zu bringen, nicht bloß aus der Arbeit, die man gegen die Kräfte des Feldes leisten muß, sondern auch aus der Arbeit  $(V_1 - V_2) de$ , die nötig ist, um den Potentialsprung zu überwinden. Nun wollen wir von dieser letzteren Arbeit im folgenden absehen. Sie spielt eine wichtige Rolle in anderen Gebieten der Elektrizität (in der Theorie der galvanischen Elemente und der Thermoelektrizität); aber sie kommt für die vorliegende Frage nach der Energie des durch elektrische Ladungen hervorgerufenen elektrostatischen Feldes nicht in Betracht. Wollen wir letztere allein berechnen, so müssen wir von der ganzen Arbeit  $V_h de$  den Betrag  $(V_1 - V_2) de$  abziehen. Setzen wir

$$V_h = V'_h + V_1 - V_2,$$

so ist  $V'_h$  der von den Ladungen allein abhängige Anteil des Potentials (vgl. S. 78) und die gesuchte Arbeit für die Ladung mit der Elektrizitätsmenge  $e_h$  wird sein

$$W = \frac{1}{2} e_h V'_h = \frac{1}{2} e_h V_h - \frac{1}{2} e_h (V_1 - V_2). \quad (107')$$

Dieser Ausdruck tritt also an Stelle von (107). Der erste Summand ist, wie in (108), in das Integral über die Oberfläche des Konduktors umzuformen und der zweite Summand ist identisch mit dem Integral:

$$\frac{1}{8\pi} \int ds \left[ \epsilon_1 V_1 \frac{\partial V_1}{\partial n} - \epsilon_2 V_2 \frac{\partial V_h}{\partial n} \right]$$

über die Grenzfläche der Dielektrika. Dieses Integral ist also in dem Ausdruck für die Energie des Feldes bereits enthalten. Mit seiner Hilfe ist dann die Umformung in das Raumintegral für die von den verschiedenen Isolatoren erfüllten Räume direkt ausführbar und führt zu dem über das ganze Feld sich erstreckenden Ausdruck (110).

Es ist endlich die Frage zu erörtern, wie sich die Energie bei einer ausschließlich räumlichen Verteilung der Elektrizität darstellt. Die Arbeit, um die Elektrizitätsmenge  $de$  an die Stelle von Potential  $V$  zu bringen, ist  $V de$ .

Dabei ist  $V$  das Integral  $\int \frac{\rho dv}{\epsilon r}$ , erstreckt über den ganzen Raum.

Setzt man  $de = \rho dv'$  und bildet das Doppelintegral

$$\int \rho dv' \int \frac{\rho dv}{\epsilon r},$$

so gibt dieses Integral den doppelten Wert der Arbeit, die erforderlich ist, um alle Ladungen an ihre Stelle zu bringen. Denn die Arbeit für je zwei Elemente  $\rho dv'$  und  $\rho dv$  wird bei der zweimaligen Ausführung des Integrals über alle Elemente doppelt gerechnet. Also ist die Energie der räumlichen Verteilung unter Berücksichtigung von (64')

$$W = \frac{1}{2} \int \rho V dv = -\frac{1}{8\pi} \int V \left( \frac{\partial \mathfrak{D}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{D}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{D}_z}{\partial z} \right) dv.$$

Berücksichtigt man, daß

$$V \frac{\partial \mathfrak{D}_x}{\partial x} = \frac{\partial (V \cdot \mathfrak{D}_x)}{\partial x} - \mathfrak{D}_x \frac{\partial V}{\partial x}$$

ist, und entsprechend für die anderen Komponenten, so geht  $W$  in die Form über:

$$W = \frac{1}{8\pi} \int \left( \frac{\partial (V \mathfrak{D}_x)}{\partial x} + \frac{\partial (V \mathfrak{D}_y)}{\partial y} + \frac{\partial (V \mathfrak{D}_z)}{\partial z} \right) dv + \frac{1}{8\pi} \int \epsilon \mathfrak{E}^2 dv.$$



Das erste Integral läßt sich mit Hilfe des Gaußschen Satzes in ein Flächenintegral

$$\frac{1}{8\pi} \int V \cdot \mathfrak{D}_n \, ds$$

über die Grenzen des Raumes, d. h. über die unendlich ferne Kugel und über etwa vorhandene Oberflächen von Leitern verwandeln. Sind diese, wie vorausgesetzt, ungeladen, so verschwindet das Integral an ihnen und ebenso an der unendlich fernen Kugel. Die Energie ist also auch in diesem Falle durch den Ausdruck

$$W = \frac{1}{8\pi} \int \epsilon \mathfrak{E}^2 \, dv \quad (110)$$

dargestellt.

Dieses Integral läßt sich als eine Summe von Energiebeträgen auffassen, die in den einzelnen Raumelementen des elektrischen Feldes aufgespeichert sind. In jedem Raumelement besteht ein eigentümlicher physikalischer Zustand, der durch den Wert von  $\mathfrak{E}$  oder in Berücksichtigung der etwaigen Verschiedenheit von  $\epsilon$  an verschiedenen Stellen des Raumes ganz allgemein durch die Werte von  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{E}$  für das betreffende Raumelement charakterisiert ist. Die Arbeit, die zur Hervorbringung dieses Zustandes erforderlich ist, kann man als potentielle Energie dieses elektrischen Zustandes in den Raumelementen des Feldmediums, sei es Aether oder materielles Dielektrikum, lokalisiert denken. Wenn man dann jedem Raumelement den Energiebetrag

$$\frac{\epsilon}{8\pi} \mathfrak{E}^2 \, dv$$

zuschreibt, so ergibt die Summe über alle diese Beträge die gesamte Ladungsarbeit. Im Sinne dieser Auffassung spricht man von der elektrischen Energie der Volumeneinheit. Wenn wir diese Größe mit  $W_e$  bezeichnen, so haben wir dafür die Definition

$$W_e = \frac{\epsilon}{8\pi} \mathfrak{E}^2 = \frac{\mathfrak{D}^2}{8\pi \epsilon} = \frac{1}{8\pi} \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{E}. \quad (111)$$

#### 41. Der Energiewert eines nicht statischen elektrischen Feldes. Satz von Thomson.

Der zuletzt aufgestellte Ausdruck für die Energie der Volumeneinheit ist an jeder Stelle des Feldes nur abhängig von der dort herrschenden Kraft, ist also unabhängig von der Verteilung der Kraft im Felde. Wir können daher den Ausdruck benutzen, um die Energie eines Feldes auch für den Fall zu berechnen, daß die Verteilung der Kraft

nicht dem Gleichgewichtszustande der Elektrizität entspricht. Wir wollen die beiden Fälle betrachten, daß die gleiche Elektrizitätsmenge auf den Konduktoren einmal in derjenigen Anordnung, die dem Gleichgewicht entspricht, vorhanden sei — für diesen Fall sollen die Werte der elektrischen Kraft und der elektrischen Erregung mit  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{D}$  bezeichnet werden — und das andere Mal in einer beliebigen anderen — als bleibender Zustand natürlich nicht möglichen — Anordnung, der die Werte  $\mathfrak{E}'$  und  $\mathfrak{D}'$  entsprechen sollen. Die Werte von  $\mathfrak{E}'$  werden sich von denen von  $\mathfrak{E}$  um gewisse Beträge unterscheiden, die wir durch  $u$  bezeichnen wollen, d. h. es soll sein:

$$\mathfrak{E}_x' = \mathfrak{E}_x + u_x, \quad \mathfrak{E}_y' = \mathfrak{E}_y + u_y, \quad \mathfrak{E}_z' = \mathfrak{E}_z + u_z \quad (112)$$

und entsprechend:

$$\mathfrak{D}_x' = \mathfrak{D}_x + \varepsilon u_x, \quad \mathfrak{D}_y' = \mathfrak{D}_y + \varepsilon u_y, \quad \mathfrak{D}_z' = \mathfrak{D}_z + \varepsilon u_z. \quad (112')$$

Da die Gesamtladung jedes Konduktors in beiden Zuständen die gleiche sein soll, so ist für den  $h^{\text{ten}}$  Konduktor

$$\int_h ds \mathfrak{D}_n' = \int_h ds \mathfrak{D}_n, \quad \text{also} \quad \int_h ds \varepsilon u_n = 0. \quad (113)$$

Außerdem soll wahre Elektrizität in beiden Fällen nur auf den Konduktoren, nicht räumlich im Felde vorhanden sein; also

$$\frac{\partial \mathfrak{D}_x'}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{D}_y'}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{D}_z'}{\partial z} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathfrak{D}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{D}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{D}_z}{\partial z} = 0,$$

woraus folgt, daß auch

$$\frac{\partial (\varepsilon u_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\varepsilon u_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\varepsilon u_z)}{\partial z} = 0 \quad (114)$$

sein muß.

Wir bilden nun den Ausdruck für die Gesamtenergie des Feldes im zweiten Zustande:

$$\begin{aligned} W' &= \frac{1}{8\pi} \int d v \varepsilon \mathfrak{E}'^2 \\ &= \frac{1}{8\pi} \int d v \varepsilon \mathfrak{E}^2 + \frac{1}{8\pi} \int d v \varepsilon (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int d v \varepsilon (\mathfrak{E}_x u_x + \mathfrak{E}_y u_y + \mathfrak{E}_z u_z). \end{aligned}$$

Setzt man für die Komponenten von  $\mathfrak{E}$  die negativen Ableitungen des Potentials  $V$ , so läßt sich das letzte Integral folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4\pi} \int dv \left( \varepsilon u_x \frac{\partial V}{\partial x} + \varepsilon u_y \frac{\partial V}{\partial y} + \varepsilon u_z \frac{\partial V}{\partial z} \right) \\
& = -\frac{1}{4\pi} \int dv \left[ \frac{\partial (\varepsilon u_x V)}{\partial x} + \frac{\partial (\varepsilon u_y V)}{\partial y} + \frac{\partial (\varepsilon u_z V)}{\partial z} \right] \\
& \quad + \frac{1}{4\pi} \int dv V \left[ \frac{\partial (\varepsilon u_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\varepsilon u_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\varepsilon u_z)}{\partial z} \right].
\end{aligned}$$

Von diesen beiden Integralen verschwindet das letzte nach (114), das erste läßt sich nach dem Gaußschen Satze (Abschnitt 15) in eine Summe von Flächenintegralen, genommen über die Leiterflächen und die unendlich ferne Kugel, umformen, die sämtlich die Form

$$-\frac{1}{4\pi} \int ds \varepsilon V u_n$$

oder, da die für den statischen Zustand geltenden Potentialwerte auf den Leitern konstant sind, die Form

$$-\frac{V}{4\pi} \int ds \varepsilon u_n$$

haben, also gleich Null sind nach (113). Ebenso verschwindet aus mehrfach erörterten Gründen das Integral über die unendlich ferne Kugel. Also bleiben in der Energiegleichung nur die beiden ersten Integrale übrig:

$$W' = W + \frac{1}{8\pi} \int dv \varepsilon u^2. \quad (115)$$

Da das zweite von diesen aus lauter positiven Gliedern besteht, so ist  $W'$  immer größer als  $W$ . Die Energie erreicht also für die gegebenen Ladungsmengen ihren kleinsten Wert, wenn  $u = 0$  ist, also für den Fall des Gleichgewichts, oder die elektrische Ladung verteilt sich im elektrostatischen Gleichgewicht so, daß das von ihr hervorgebrachte Feld ein Minimum von elektrischer Energie besitzt, oder in mathematischer Form:  $\delta W = 0$  für jede unendlich kleine Aenderung in der Anordnung der Ladung. Dieser zuerst von Sir William Thomson bewiesene Satz bildet eine Parallele zu dem bekannten Satze der Mechanik, daß der stabilen Gleichgewichtslage eines Körpers ein Minimum seiner potentiellen Energie zukommt. Wie dort zu jeder Veränderung der Lage des Körpers, so ist hier zu jeder Veränderung in der Verteilung der Ladung eine positive Arbeit erforderlich.

## 42. Die potentielle Energie und die ponderomotorischen Kräfte.

Bei den Betrachtungen des vorhergehenden Abschnittes war nur die Anordnung der Elektrizität auf den Leitern als veränderlich in Betracht gezogen, die Leiter selbst waren dabei als Körper von unveränderlicher Form und Lage angenommen. Aber die Energie eines geladenen Systems hängt nicht bloß von den Ladungen, sondern auch von Gestalt und gegenseitiger Lage der Konduktoren und der dielektrischen Grenzflächen ab; denn die Kapazität eines jeden Leiters, die zusammen mit der Ladung das Potential des Leiters bestimmt, hängt ja von der Gestalt des Leiters und von seiner Lage zu den anderen Leitern und den Dielektriken ab. Wir betrachten nun diejenigen Aenderungen der Energie, die mit Orts- oder Gestaltsänderungen eines Konduktors verbunden sind, während wir die Elektrizitätsmenge auf dem Konduktor als unveränderlich ansehen. Aus diesen Aenderungen lassen sich die ponderomotorischen Kräfte berechnen, die auf den Konduktor wirken.

Wird nämlich irgendein Punkt P eines Systems, dessen gesamte potentielle Energie  $W$  ist, in irgendeiner Richtung  $s$  um die Strecke  $\delta s$  verschoben, ist  $K_s$  die Kraft, die in Richtung von  $s$  wirkt, und wird die durch die Verschiebung herbeigeführte Abnahme von  $W$  mit  $-\delta W$  bezeichnet, so muß diese gleich sein der von  $K_s$  geleisteten Arbeit, d. h. es ist

$$-\delta W = K_s \delta s \quad \text{oder} \quad K_s = -\frac{\delta W}{\delta s}.$$

Ist das System ursprünglich in Ruhe, d. h. ist seine kinetische Energie gleich Null und setzt es sich nun von selbst, nur durch die zwischen seinen Teilen wirkende Kraft in Bewegung, so muß dadurch die kinetische Energie wachsen; denn diese ist eine beständig positive Größe, da die lebendige Kraft aus einer Summe von quadratischen, d. h. beständig positiven Gliedern besteht. Es ist daher der Uebergang des Systems aus dem Zustande der Ruhe in den der Bewegung stets von einer Abnahme seiner potentiellen Energie begleitet. Denn da die kinetische Energie wächst, so muß nach dem Prinzip der Erhaltung der Energie die potentielle Energie um einen gleichen Betrag abnehmen. Die Richtung der Bewegungstendenz des Systems, d. h. der Aenderung seiner Konfiguration, ist die, in welcher die Abnahme seiner potentiellen Energie am schnellsten erfolgt; man kann sagen, das System hat die Tendenz, sich auf einer Kurve des steilsten Gefälles seiner potentiellen Energie zu bewegen.

Diese Richtung und die Größe der wirkenden Kraft ergeben sich in bekannter Weise aus den Komponenten

$$K_x = -\frac{\partial W}{\partial x}, \quad K_y = -\frac{\partial W}{\partial y}, \quad K_z = -\frac{\partial W}{\partial z}.$$

Wir berechnen als Beispiel die Kraft, die auf die Platte eines ebenen Kondensators wirkt, aus der Energieänderung bei einer virtuellen Verschiebung. Ist  $S$  die Oberfläche,  $d$  der Abstand der Platten, so ist die Gesamtenergie des Kondensators:

$$W = \frac{1}{8\pi} \epsilon \mathfrak{E}^2 S \cdot d = \frac{2\pi d e^2}{\epsilon S} \quad (116)$$

nach Formel (110) und (63''). Nimmt also bei konstantem  $e$  der Abstand  $d$  ab, so nimmt auch  $W$  ab. Die ponderomotorische Kraft sucht also  $d$  zu verkleinern, d. h. die Platten zu nähern; ihre Größe ist

$$\frac{2\pi e^2}{\epsilon S}$$

in Uebereinstimmung mit der auf anderem Wege gefundenen Formel (72). Die Kraft auf die Flächeneinheit oder der elektrostatische Druck ist:

$$\frac{2\pi e^2}{\epsilon S^2}.$$

Dieser Ausdruck aber ist nach dem obigen identisch mit der Energiedichte  $W/Sd$  oder mit  $\frac{1}{8\pi} \epsilon \mathfrak{E}^2$ . In dieser Form ist der Ausdruck ganz unabhängig von den Besonderheiten des vorliegenden Falles. Wir können ihn übertragen auf jedes Element der Oberfläche eines irgendwie gestalteten Konduktors. In der Tat ist der hier gewonnene Ausdruck für den elektrostatischen Druck identisch mit demjenigen, den wir bereits in Formel (69) aus ganz anderen Ueberlegungen hergeleitet hatten. Nachdem wir im vorstehenden den Begriff der Energiedichte kennen gelernt haben, können wir also die Gleichung (69)

$$p = \frac{1}{8\pi} \epsilon \mathfrak{E}^2$$

direkt in der Form aussprechen: Der elektrostatische Druck an der Oberfläche eines Leiters wird gemessen durch den Betrag der Energiedichte des Feldes an der betreffenden Stelle.

Wollen wir in entsprechender Weise die ponderomotorischen Kräfte darstellen, die auf die Grenzfläche von Isolatoren wirken, so empfiehlt es sich, die Fälle zu unterscheiden, daß die Grenzfläche senkrecht zu den Kraftlinien oder parallel zu ihnen liegt.

Wir verwirklichen diese Fälle am einfachsten, wenn wir uns einen Plattenkondensator denken, dessen isolierender Zwischenraum von zwei verschiedenen flüssigen Dielektrika ausgefüllt ist. Im ersten Falle liege die Grenzfläche der beiden Dielektrika parallel zu der Kondensatorfläche,

also senkrecht zu den Kraftlinien des Feldes. Es sei  $S$  die Oberfläche der Platte,  $d$  ihr Abstand, es seien  $\epsilon_1$  und  $\epsilon_2$  die Dielektrizitätskonstanten,  $d_1$  und  $d_2$  die Schichtdicken der beiden Isolatoren, also  $d = d_1 + d_2$ . Die gesamte Energie der Ladung des Kondensators ist dann:

$$W = -\frac{1}{8\pi} \epsilon_1 \mathcal{E}_1^2 d_1 S + \frac{1}{8\pi} \epsilon_2 \mathcal{E}_2^2 d_2 S. \quad (117)$$

Nun ist nach (74), S. 68:

$$\epsilon_1 \mathcal{E}_1 = \epsilon_2 \mathcal{E}_2 = \mathcal{D},$$

wenn  $\mathcal{D}$  die Erregung bedeutet, die bei Voraussetzung konstanter Ladung konstant sein muß, da  $\mathcal{D} = \frac{4\pi e}{S}$  ist. Also ist:

$$\begin{aligned} W &= -\frac{1}{8\pi} S \mathcal{D}^2 \left( \frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2} \right) = -2\pi \frac{e^2}{S} \left( \frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2} \right) \\ &= -\frac{1}{8\pi} S \mathcal{D}^2 \left( \frac{d}{\epsilon_1} - \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1 \cdot \epsilon_2} d_2 \right) = -2\pi \frac{e^2}{S} \left( \frac{d}{\epsilon_1} - \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1 \cdot \epsilon_2} d_2 \right). \end{aligned}$$

Nimmt durch Verschiebung der Grenzfläche  $d_2$  um  $\delta s$  zu, so ist:

$$\delta W = -\frac{S \mathcal{D}^2}{8\pi} \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1 \epsilon_2} \delta s = -\frac{2\pi e^2}{S} \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1 \epsilon_2} \delta s. \quad (118)$$

Ist also  $\epsilon_2 > \epsilon_1$ , so nimmt  $W$  ab bei einer Vergrößerung von  $d_2$ . Es muß also eine Kraft an der Grenzfläche wirksam sein, die die Flüssigkeit mit der größeren Dielektrizitätskonstante in das Feld hineinzieht.

Diese Kraft, dividiert durch die Oberfläche  $S$ , stellt den auf die Flächeneinheit wirkenden elektrostatischen Druck oder Zug  $p_n$  für den Fall normaler Kraftrichtung dar. Also:

$$p_n = -\frac{1}{S} \frac{\delta W}{\delta s} = -\frac{1}{8\pi} \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1 \epsilon_2} \mathcal{D}^2 = -\frac{1}{8\pi} \frac{\mathcal{D}^2}{\epsilon_1} + \frac{1}{8\pi} \frac{\mathcal{D}^2}{\epsilon_2}$$

oder:

$$p_n = \frac{1}{8\pi} \epsilon_1 \mathcal{E}_1^2 - \frac{1}{8\pi} \epsilon_2 \mathcal{E}_2^2. \quad (119)$$

Die Kraftwirkung auf die Grenzfläche läßt sich also ansehen als die Differenz zweier Kräfte, die zu beiden Seiten der Grenzfläche nach entgegengesetzten Richtungen wirken, und deren jede gemessen wird durch die Energiedichte auf der betreffenden Seite der Grenzfläche. Da die Gesamtkraft für  $\epsilon_2 > \epsilon_1$  von dem Medium 2 nach dem Medium 1 gerichtet ist und da die Energiedichte in 1 größer als in 2 ist, so muß die auf jeder Seite wirkende Komponente ein Zug sein, der in das Medium dieser Seite hinein gerichtet ist.

Um den Fall einer zu den Kraftlinien parallelen Oberfläche zu realisieren, denken wir uns einen Kondensator, dessen Platten senkrecht

auf der Grenzfläche zweier dielektrischer Flüssigkeiten stehen. Von der ganzen Oberfläche der Platte sei der Teil  $S_1$  in dem Medium 1, der Teil  $S_2$  in 2. Da wegen der Grenzbedingung (75) für die tangentialen Kraftkomponenten (S. 69) in diesem Falle  $\mathcal{E}$  in beiden Teilen den gleichen Wert hat, so ist die gesamte Energie der Ladung des Kondensators in diesem Falle:

$$W = \frac{1}{8\pi} \mathcal{E}^2 (\epsilon_1 S_1 + \epsilon_2 S_2) d. \quad (120)$$

Bei einer Verschiebung der Grenzfläche der Dielektrika muß sich  $\mathcal{E}$  ändern, wenn die Bedingung konstanter Ladung erfüllt sein soll. Denn wenn  $e$  die Ladung der einen Kondensatorplatte bedeutet, so muß nach (63'):

$$4\pi e = \mathcal{D}_1 S_1 + \mathcal{D}_2 S_2 = \mathcal{E}(\epsilon_1 S_1 + \epsilon_2 S_2)$$

sein. Also

$$W = \frac{2\pi e^2 d}{\epsilon_1 S_1 + \epsilon_2 S_2} = \frac{2\pi e^2 d}{\epsilon_1 S + (\epsilon_2 - \epsilon_1) S_2}. \quad (120')$$

Wird wieder vorausgesetzt, daß  $\epsilon_2 > \epsilon_1$  sei, so nimmt  $W$  ab, wenn sich die Grenzfläche der Dielektrika so verschiebt, daß  $S_2$  zunimmt. Also muß auch dieses Mal wieder eine Kraft an der Oberfläche wirksam sein, die das Medium mit der größeren Dielektrizitätskonstante in das Kondensatorfeld hineinzieht. Die Variation von  $W$  im Sinne einer solchen Verschiebung ergibt:

$$\partial W = - \frac{2\pi e^2 d}{[\epsilon_1 S + (\epsilon_2 - \epsilon_1) S_2]^2} (\epsilon_2 - \epsilon_1) \delta S_2. \quad (121)$$

Nun ist die Änderung, die  $S_2$  bei dieser Verschiebung erleidet, gleich dem Produkt von  $\delta s$ , der Größe der Verschiebung, mit der Länge  $l$  der Linie, in der sich die Kondensatorplatte mit der Grenzfläche schneidet. Andererseits ist  $l \cdot d$  der Flächeninhalt der Grenzfläche.

Dividiert man die aus  $-\frac{\partial W}{\partial S}$  sich ergebende Kraft durch  $l \cdot d$ , so erhält man wieder die Kraft auf die Flächeneinheit oder den elektrostatischen Druck. Er ergibt sich, für den Fall der tangentialen Kraftrichtung mit  $p_t$  bezeichnet:

$$p_t = \frac{2\pi e^2}{(\epsilon_1 S_1 + \epsilon_2 S_2)^2} (\epsilon_2 - \epsilon_1) = \frac{1}{8\pi} (\epsilon_2 - \epsilon_1) \mathcal{E}^2,$$

wofür wir auch in Berücksichtigung der Grenzbedingung (75) für die tangentialen Komponenten schreiben können:

$$p_t = \frac{1}{8\pi} \epsilon_2 \mathcal{E}_2^2 - \frac{1}{8\pi} \epsilon_1 \mathcal{E}_1^2. \quad (122)$$

Auch hier erscheint diese Wirkung wieder als Differenz zweier

Kräfte, die von den beiden Seiten aus auf die Grenzfläche ausgeübt werden, und deren jede wieder durch die Energiedichte auf der betreffenden Seite gemessen wird. Aber für  $\epsilon_2 > \epsilon_1$  ist dieses Mal die Energiedichte im Medium 2 größer als im Medium 1, während die resultierende Kraft vom Medium 2 nach dem Medium 1 hin gerichtet ist. Die einzelne Kraftkomponente des obigen Ausdruckes darf also in diesem Falle nicht als ein in das eigene Medium hinein gerichteter Zug, sondern muß als ein in das andere Medium hinein gerichteter Druck angesehen werden.

Da aus den vorstehenden Ableitungen sich ergibt, daß sowohl für die normale wie für die tangentielle Krafrichtung die ponderomotorische Kraft auf der Grenzfläche der Dielektrika senkrecht steht und stets in das Medium mit dem kleineren  $\epsilon$  hinein gerichtet ist, so muß das gleiche auch für einen beliebigen Winkel  $\gamma$  der Krafrichtung mit der Normalen der Grenzfläche der Fall sein. Die Größe der ponderomotorischen Kraft auf die Flächeneinheit berechnet sich in diesem allgemeinen Falle als Summe der beiden Kräfte, die sich nach den obigen Formeln für die normalen und für die tangentialen Komponenten der elektrischen Kraft ergeben:

$$p = \frac{1}{8\pi} \epsilon_1 \mathfrak{G}_{n1}^2 - \frac{1}{8\pi} \epsilon_2 \mathfrak{G}_{n2}^2 + \frac{1}{8\pi} \epsilon_2 \mathfrak{G}_{t2}^2 - \frac{1}{8\pi} \epsilon_1 \mathfrak{G}_{t1}^2$$

$$= \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{8\pi} \left( \mathfrak{G}_{t1}^2 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \mathfrak{G}_{n1}^2 \right) \quad (123)$$

oder in symmetrischer Form:

$$p = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{8\pi} (\mathfrak{G}_{t1} \cdot \mathfrak{G}_{t2} + \mathfrak{G}_{n1} \cdot \mathfrak{G}_{n2})$$

und unter Berücksichtigung der Beziehungen

$$\mathfrak{G}_{t1} = \mathfrak{G}_1 \cdot \sin \gamma, \quad \mathfrak{G}_{n1} = \mathfrak{G}_1 \cos \gamma,$$

$$p = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{8\pi} \mathfrak{G}_1^2 \left( 1 - \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2} \cos^2 \gamma \right). \quad (123')$$

Will man für ein festes, allseitig begrenztes Dielektrikum die ponderomotorische Gesamtkraft finden, die es in einem elektrischen Felde erfährt, so muß man in das Integral für die Kraftkomponenten in der Richtung s

$$\mathfrak{P}_s = \int p \cdot \cos(ns) dS \quad (124)$$

den obigen Ausdruck für  $p$  einsetzen und das Integral über die Oberfläche des Dielektrikums ausführen. Voraussetzung ist dabei, daß die Größe  $\epsilon$  absolut konstant, nicht etwa von der Feldstärke abhängig ist, woraus neue Kraftwirkungen hervorgehen würden.

Es muß noch einmal darauf aufmerksam gemacht werden, daß die



Ableitung der obigen Ausdrücke für die Kraftwirkungen aus dem Energieprinzip voraussetzt, daß das geladene System vollkommen isoliert, die Ladungen also bei der virtuellen Verschiebung ungeändert bleiben. Denn nur in diesem Falle geht die bei der Verschiebung geleistete Arbeit auf Kosten der potentiellen Energie des Systems. Denkt man sich statt dessen die Kondensatorplatten mit einer Elektrizitätsquelle verbunden, die sie dauernd — auch bei allen Veränderungen der Konfiguration — auf konstantem Potential erhält, so sind die Kräfte, die im ruhenden Zustande an den einzelnen Teilen des Systems angreifen, natürlich die gleichen wie in dem früheren Falle bei gleicher Feldstärke und sind durch die obigen Ausdrücke gegeben. Aber die Energieänderungen bei einer virtuellen Verschiebung sind in diesem Falle ganz andere. Denn wenn  $V_0$  die konstante Potentialdifferenz der beiden Platten bedeutet, so ist unter passender Umgestaltung der Formeln auf S. 103 und 104:

a) wenn die Grenzfläche den Kondensatorplatten parallel liegt:

$$W = \frac{S \cdot V_0^2}{8\pi \left( \frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2} \right)}$$

und

$$\delta W = \frac{S}{8\pi} \frac{V_0^2}{\left( \frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2} \right)^2} \cdot \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \delta s = \frac{S \mathfrak{D}^2}{8\pi} \cdot \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \delta s \quad (125)$$

b) wenn die Grenzfläche senkrecht zu den Kondensatorplatten liegt:

$$W = \frac{1}{8\pi} \frac{V_0^2}{d} (\varepsilon_1 S_1 + \varepsilon_2 S_2)$$

und

$$\delta W = \frac{1}{8\pi} \frac{V_0^2}{d} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \delta s = \frac{1}{8\pi} \mathfrak{E}^2 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) d \cdot l \cdot \delta s. \quad (125')$$

In beiden Fällen ist die bei der Verschiebung  $\delta s$  eintretende Energieänderung ebenso groß, aber nicht negativ, wie bei konstanter Ladung, sondern positiv. Diese Energieänderung ist natürlich nur möglich durch Zufuhr neuer Energie in das System hinein von seiten der Elektrizitätsquelle. Diese Leistung der Elektrizitätsquelle besteht in der Vergrößerung der Ladung des Kondensators, die erforderlich ist, um das Potential bei der vergrößerten Kapazität konstant zu halten. Die Kapazität des Kondensators ist

$$\text{im Falle a: } C = \frac{S}{4\pi \left( \frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2} \right)}, \quad \text{im Falle b: } C = \frac{\varepsilon_1 S_1 + \varepsilon_2 S_2}{4\pi d},$$

die Kapazitätzunahme für die Verschiebung  $\delta s$  der Grenzfläche

im Falle a:

$$\delta C = \frac{S}{4\pi \left( \frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2} \right)^2} \cdot \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \delta s,$$

im Falle b:

$$\delta C = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) l \cdot \delta s}{4\pi d},$$

folglich die zugeführte Elektrizitätsmenge  $\delta e = V_0 \cdot \delta C$  und die dabei geleistete Arbeit  $\delta A = V_0 \delta e = V_0^2 \delta C$ :

im Falle a:

$$\delta A = \frac{S V_0^2}{4\pi \left( \frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2} \right)^2} \cdot \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \delta s,$$

im Falle b:

$$\delta A = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) V_0^2 l \delta s}{4\pi d}.$$

In beiden Fällen zeigt der Vergleich mit (125) und (125'), daß  $\delta A = 2 \delta W$  ist. Das muß der Fall sein, denn die Elektrizitätsquelle hat erstens die Energie zu liefern, die die ponderomotorischen Kräfte bei der Verschiebung in Form von Arbeit abgeben, oder sie hat den Energieverlust  $\delta W$  zu decken, den das System bei konstanter Ladung durch die Verschiebung erleiden würde, und sie hat zweitens die Energie des Systems noch um den Betrag  $+\delta W$  zu steigern.

Die für den Fall b im obigen abgeleitete Formel 122 für den elektrostatischen Druck an der Grenzfläche von Isolatoren ist von Quincke in folgender Weise durch Messungen geprüft worden<sup>1)</sup>.

Sein Apparat bestand aus einem Kondensator, dessen Platten (A und B, Fig. 22) horizontal lagen und den konstanten Abstand  $d$  von einander besaßen. Der Kondensator befand sich in einem Gefäße, in welches die zu untersuchende Flüssigkeit F, z. B. Terpentinöl, eingefüllt wurde. Vom Mittelpunkte der oberen Platte A aus erhebt sich eine vertikale Röhre, welche einerseits mit einem Flüssigkeitsmanometer M kommuniziert, anderseits mit dem Hahn H. Durch diesen kann trockene Luft in den Zwischenraum zwischen die Kondensatorplatten eingeblasen werden. Sie bildet dort die Form einer flachen Blase. Schließt man den Hahn bei H, so zeigt das Manometer eine gewisse Steighöhe an, entsprechend dem Ueberdruck, unter dem die Luft in der Blase steht. Wenn nun die Kondensatorplatten elektrisch geladen werden, so zieht sich die Flüssigkeit möglichst hinein in das elektrische Feld, die Luftblase kontrahiert sich daher, der Druck wächst und das Manometer zeigt eine größere Differenz der Flüssigkeitskuppen in seinen beiden

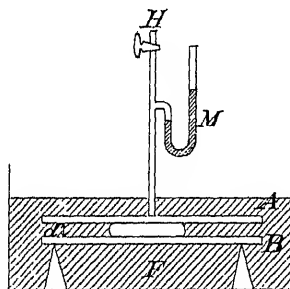


Fig. 22.

<sup>1)</sup> G. Quincke, Wied. Ann. 19, S. 705, 1883.

Schenkeln als vorher im unelektrischen Zustande an. Dieser durch die Elektrisierung hervorgerufene Zuwachs  $h$  der Steighöhe mißt den hydrostatischen Druck, der bei diesem Versuche dem an der Wand der Luftblase wirkenden elektrostatischen Druck das Gleichgewicht hält. Ist  $\rho$  die Dichte der Manometerflüssigkeit,  $g$  die Schwerebeschleunigung, so ist

$$h\rho g = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{8\pi} \frac{(V_1 - V_2)^2}{d^2} \quad (126)$$

nach Formel (122) (S. 104). Durch Messung der Potentialdifferenz  $V_1 - V_2$ , des Plattenabstandes  $d$  und der elektrischen Steighöhe  $h$  kann man also die Dielektrizitätskonstante  $\epsilon_2$  der Flüssigkeit  $F$  berechnen, falls  $\epsilon_1$  bekannt ist (für Luft ist  $\epsilon$  sehr nahe gleich 1). Quincke verfuhr nicht direkt so, sondern er bestimmte den Quotienten  $(V_1 - V_2)^2 : d^2$  durch die Anziehung, welche auf die obere Platte des Kondensators von der unteren ausgeübt wurde, falls der ganze Zwischenraum mit der Flüssigkeit  $F$  angefüllt war. Diese Anziehung ist ebenfalls proportional der Dielektrizitätskonstanten  $\epsilon_2$  (vgl. oben S. 67), sowie dem Quotienten  $(V_1 - V_2)^2 : d^2$ . Durch Messung dieser Anziehung und der Steighöhe  $h$  kann man daher nach (126)  $\epsilon_2$  berechnen, ohne daß man  $V_1 - V_2$  oder  $d$  zu messen nötig hätte.

### 43. Scheinbarer Druck und Zug im elektrischen Felde.

Die Entwicklungen des vorigen Abschnittes haben die ponderomotorischen Kräfte im elektrischen Felde stets in der Form der Differenz von zwei Zug- oder Druckkräften ergeben, die zu beiden Seiten der Grenzfläche des Leiters oder Dielektrikums angreifen und durch die Energiedichte auf der betreffenden Seite gemessen werden. Auch die Leiter dürfen wir in diesen allgemeinen Ausdruck hineinnehmen, wenn bei ihnen auch nur von der Zugkraft auf der einen Seite die Rede ist; auf der anderen Seite ist bei ihnen ja die Energiedichte gleich Null. Es liegt nun die Vorstellung nahe, daß diese Kräfte sich in Form von Zug- und Druckspannungen durch den ganzen Isolator hindurch ausbreiten. Wie der hydrostatische Druck in einer Flüssigkeit oder die elastischen Spannungen eines gedehnten Körpers würden sich auch diese Spannungen im Innern eines homogenen Dielektrikums in jeder beliebig gedachten Schnittfläche das Gleichgewicht halten. An der Grenzfläche gegen andere Medien würden sie dagegen mit ihren Differenzen zur Geltung kommen und die beobachtbaren ponderomotorischen Wirkungen hervorbringen.

Diese Idee eines mechanischen Zwangszustandes im Dielektrikum liegt schon den Vorstellungen Faradays über die Kraftlinien und ihre Rolle beim Zustandekommen der ponderomotorischen Wirkungen zugrunde. Sie ist später von Maxwell mathematisch durchgeführt worden. Das Resultat

dieser Rechnungen ist nach den Ausführungen des vorigen Abschnittes ohne weiteres verständlich. Der Zwangszustand würde bestehen in einer Zugspannung in Richtung der Kraftlinien, die, wie die Spannung in einem gedehnten Gummifaden, die Kraftlinien zu verkürzen strebt, und in einer Druckspannung senkrecht zu den Kraftlinien, die die Kraftlinien zu verbreitern strebt, beide numerisch gemessen durch die Energiedichte an der betreffenden Stelle des Feldes.

Diese Vorstellung entspricht insofern einer uns geläufigen Anschauungsweise, als sie die ponderomotorischen Kräfte des elektrischen Feldes auch vom Standpunkte der Nahwirkungstheorie aus in Einklang mit dem dritten Newtonschen Gesetze, dem Prinzip von Aktion und Reaktion, bringt. In der That, wie die Oberfläche eines geladenen Leiters eine Zugkraft seitens des angrenzenden Dielektrikums erfährt, so erfährt nach dieser Vorstellung auch umgekehrt das Dielektrikum eine Zugspannung seitens des Leiters. Nimmt man dagegen diese Maxwellschen Spannungen im Dielektrikum nicht an, so fehlt der ponderomotorischen Kraft, die der Leiter erfährt, die Gegenkraft an Ort und Stelle. Das dritte Newtonsche Prinzip bleibt ja bekanntlich immer gewahrt für die scheinbaren Kräfte, die Fernkräfte der alten Theorie, die zwei Leiter aufeinander ausüben; wollen wir aber diese Kräfte durch Nahwirkungen des Aethers erklären, so bleibt ohne die Annahme der Maxwellschen Spannungen nur die ponderomotorische Wirkung des Dielektrikums auf den geladenen Leiter übrig, als Kraft ohne Gegenkraft.

Allein die Durchführbarkeit des Maxwellschen Gedankens scheitert an Schwierigkeiten, die sich ihm in anderer Beziehung entgegenstellen. Zunächst ist einzuwenden, daß die mathematische Bestimmung des Druckes bzw. Zuges aus den Erfahrungstatsachen keine eindeutig bestimmte Aufgabe ist, sondern daß man unendlich viele verschiedene Lösungen angeben kann. Es liegt dies daran, daß man den auf eine Fläche  $ds$  wirkenden Druck nur angeben kann, wenn man diejenige Aenderung der potentiellen Energie kennt, welche durch eine gewisse Verschiebung jener Fläche  $ds$  allein eintritt. Diese kennt man nun aber hier nicht. Denn wenn sich eine Fläche  $ds$  im Aether verschiebt, so ist damit eine bestimmte Aenderung des Kraftlinienverlaufes, d. h. auch eine berechenbare Aenderung der potentiellen Energie nur dann gegeben, falls  $ds$  wahre oder scheinbare Ladungen enthält. Dies ist aber nicht der Fall, wenn  $ds$  nicht etwa an der Grenzfläche zweier verschiedenartiger Medien liegt. Die Bestimmung des Druckes oder Zuges auf eine im Inneren eines homogenen Mediums, z. B. des freien Aethers, liegende Fläche  $ds$  ist daher eine unbestimmte Aufgabe, und die Maxwellschen Ausdrücke für die Spannungen können nur durch eine hypothetische Erweiterung der Ergebnisse des vorigen Abschnittes gewonnen werden.

Vor allem aber sind diese Spannungen Kräfte im Sinne der Mechanik. Sie sind allenfalls denkbar im materiellen Dielektrikum. Der Aether oder der leere Raum aber ist kein materielles Medium, und doch müßten die Maxwell'schen Spannungen, wenn sie den Zwangszustand des elektrischen Feldes darstellen sollen, in ihm ebenso wie im materiellen Isolator vorhanden sein. Man müßte also versuchen, mit den Eigenschaften der Materie ein Medium von den Eigenschaften des Aethers zu konstruieren. Der nächstliegende Gedanke, den Aether mit einem festen elastischen Medium zu vergleichen, erweist sich als unmöglich, weil sich niemals elastische Deformationen so kombinieren lassen, daß sie ein dem Maxwell'schen gleiches System von Spannungen ergeben. Maxwell selbst hat bei der Aufstellung seines Systems erklärt, daß „er nicht imstande gewesen wäre, mit den Prinzipien der Mechanik jenen Zwangszustand eines Mediums aus Molekularkräften abzuleiten“<sup>1)</sup>. Ebenso müssen heute alle anderen Versuche, ein mechanisches Aethermodell zu konstruieren, als gescheitert angesehen werden<sup>2)</sup>.

Man darf also den Maxwell'schen Spannungen eine Bedeutung im Sinne mechanischer Spannungen nicht zuerkennen. Gleichwohl ist diese Vorstellung als Bild für das Zustandekommen der ponderomotorischen Wirkungen gebräuchlich, und der Satz, daß die Kraftröhren sich zusammenzuziehen und zu erweitern streben, ist ein anschaulicher Ausdruck für die tatsächlichen Kraftwirkungen im elektrischen Felde. Ohne das im einzelnen auszuführen, wollen wir nur diese Ausdrucksform mit unseren Sätzen über die Energieänderungen in Zusammenhang bringen. Wir berechnen den Energieinhalt einer Kraftröhre. Ihr Längenelement an einer Stelle, an der ihr Querschnitt  $dq$  ist und die Dielektrizitätskonstante den Wert  $\epsilon$  hat, werde mit  $dl$  bezeichnet. Dann ist die Energie in der Kraftröhre

$$W_r = \frac{1}{8\pi} \int \epsilon \mathfrak{E}^2 dq dl. \quad (127)$$

Die Kraftröhre wird notwendig an einer Stelle  $S_1$ , welche die Ladung  $e$  und das Potential  $V_1$  besitzt, beginnen und endigen an einer Stelle  $S_2$ , welche die Ladung  $-e$  und das Potential  $V_2$  besitzt. Die in der Kraftröhre enthaltene Anzahl  $N$  elektrischer Erregungslinien ist gleich  $4\pi e$ . Da nun ist

$$\int \mathfrak{E} dl = V_1 - V_2 \quad (128)$$

und

$$\epsilon \mathfrak{E} dq = N = 4\pi e, \text{ d. h. } \mathfrak{E} = \frac{N}{\epsilon dq}, \quad (129)$$

<sup>1)</sup> J. C. Maxwell, Lehrbuch I, S. 163.

<sup>2)</sup> Vgl. darüber Hans Witte, Ueber den gegenwärtigen Stand der Frage nach einer mechanischen Erklärung der elektrischen Erscheinungen. Berlin, Ebering, 1906.

so wird

$$N \cdot \int \frac{dl}{\varepsilon dq} = V_1 - V_2. \quad (130)$$

Man nennt die Potentialdifferenz  $V_1 - V_2$  die elektromotorische Kraft (nach elektrostatischem Maße), welche in der Kraftröhre wirkt; das Integral aber, mit dem  $N$  multipliziert ist, bezeichnet man als den „dielektrischen Widerstand“ der Kraftröhre. Nennen wir diesen  $\omega$ , definieren also den dielektrischen Widerstand durch die Gleichung:

$$\omega = \int \frac{dl}{\varepsilon dq}, \quad (131)$$

so nimmt obige Gleichung die Form an:

$$N = \frac{V_1 - V_2}{\omega}. \quad (132)$$

Nach Analogie mit dem bekannten Ohmschen Gesetz für den elektrischen Strom kann man diese Formel für den Erregungsfluß so ausdrücken: Der Erregungsfluß in einer Kraftröhre ist gleich der in ihr wirkenden elektromotorischen Kraft, dividiert durch ihren dielektrischen Widerstand. Dabei ist die in der elektrischen Kraftröhre wirkende elektromotorische Kraft definiert als diejenige Arbeit, welche die elektrischen Kräfte bei Verschiebung eines mit  $e = 1$  geladenen Körpers durch die ganze Kraftröhre hindurch leisten.

Unter Benützung dieser Beziehungen läßt sich der Ausdruck für den Energieinhalt der Kraftröhre in folgenden drei Formen schreiben:

$$W_r = \frac{(V_1 - V_2)N}{8\pi}, \quad (133)$$

$$W_r = \frac{(V_1 - V_2)^2}{8\pi\omega}, \quad (134)$$

$$W_r = \frac{N^2\omega}{8\pi}. \quad (135)$$

Die Energie des ganzen Feldes wird dann durch Summierung über alle Kraftröhren gewonnen.

Drückt man nun nach Maxwell die ponderomotorischen Wirkungen des Feldes durch das Bestreben der Kraftröhren aus, sich zu verkürzen und zu erweitern, so sieht man aus der Formel für den dielektrischen Widerstand, daß jede Verkürzung und jede Erweiterung einer Kraftröhre eine Verminderung ihres dielektrischen Widerstandes bedeutet. Die ponderomotorischen Wirkungen eines elektrischen Feldes gehen also in der Weise vor sich, daß der dielektrische Widerstand desselben möglichst verringert wird.

Bei der Anwendung dieses Satzes ist allerdings zu berücksichtigen, daß der Widerstand eines Raumes von der Gestalt der Krafttröhren in ihm abhängt, daß er also nicht genau zu berechnen ist, wenn man nicht den Kraftlinienverlauf in ihm genau kennt. Zur annähernden Schätzung der Bewegungen genügt aber schon die allgemeine Kenntnis des ausgesprochenen Satzes, und er leistet dabei durch seine Anschaulichkeit gute Dienste.

Man kann den Satz in der gleichen Form auch aus Betrachtungen über Energieänderungen ableiten. Für Veränderungen, bei denen die Ladungen, also auch die Größe  $N$ , konstant bleiben, hat man die Formel (135) für  $W_r$  zu benutzen. In diesen Fällen erfolgt eine Veränderung unter dem Einfluß der inneren Kräfte des Systems immer so, daß die potentielle Energie abnimmt; mit der Abnahme der Energie ist aber durch Formel (135) eine Abnahme des dielektrischen Widerstandes verknüpft. Die Arbeit, die die ponderomotorischen Kräfte dabei leisten, ist gleich der Abnahme der potentiellen Energie:

$$dA = -dW_r = -\frac{N^2}{8\pi} d\omega.$$

Läßt man die gleiche Aenderung mit der gleichen Abnahme des dielektrischen Widerstandes nicht bei konstanter Ladung, sondern bei konstant gehaltener Potentialdifferenz vor sich gehen, so nimmt nach der Formel (134) die Energie  $W_r$  nicht ab, sondern zu um den Betrag:

$$+dW_r = \frac{(V_1 - V_2)^2}{8\pi\omega^2} d\omega.$$

Dieser Betrag ist aber genau der gleiche wie der Betrag der Abnahme der Energie bei konstanter Ladung oder wie der Betrag der von den ponderomotorischen Kräften geleisteten Arbeit. Man erhält daher den weiteren Satz, daß die bei irgendeiner Konfigurationsänderung von den ponderomotorischen Kräften geleistete Arbeit gleich ist der **Zunahme** der elektrischen Energie des Systems, wenn man annimmt, daß bei der Konfigurationsänderung nicht die elektrischen Ladungen der Körper, sondern ihre Potentialwerte unverändert bleiben. Das ist das gleiche Resultat in allgemeiner Form, das wir im vorigen Abschnitt speziell für die Konfigurationsänderungen in einem Kondensator bereits abgeleitet hatten.

Allgemein kann man also sagen: Da die Kräfte immer so wirken, daß sie den dielektrischen Widerstand zu verkleinern suchen, so strebt die potentielle Energie des Systems bei konstanten Ladungen einem Minimum, bei konstanten Potentialen einem Maximum zu.

#### 44. Die Einstellungen dielektrischer Körper im elektrischen Felde.

Befindet sich in einem elektrischen Felde ein dielektrischer Körper, so wird er nach den Auseinandersetzungen des vorigen Abschnittes eine solche Lage einzunehmen suchen, daß der dielektrische Widerstand des Feldes möglichst klein ist. Nun hat der dielektrische Widerstand einer Kraftröhre nach (131) den Wert:

$$\omega = \int \frac{dl}{\epsilon dq}.$$

Ist die Dielektrizitätskonstante  $\epsilon_2$  des Körpers größer als diejenige der Umgebung  $\epsilon_1$ , so sinkt  $\omega$ , wenn  $\epsilon_1$  durch  $\epsilon_2$  ersetzt wird, und der Gesamtwiderstand wird um so stärker sinken, je mehr Kraftröhren von dieser Veränderung getroffen werden. Für den Fall  $\epsilon_2 > \epsilon_1$  wird sich also der Körper so einzustellen suchen, daß möglichst viele Kraftröhren durch ihn hindurchgehen. Ist das Feld inhomogen, so werden Kräfte auf den Körper wirken, die ihn nach denjenigen Stellen des Feldes zu verschieben suchen, an denen die Kraftlinien am dichtesten gelagert sind, also die Feldstärke am größten ist. Ist dagegen  $\epsilon_2 < \epsilon_1$ , so wächst der Widerstand bei Ersetzung von  $\epsilon_1$  durch  $\epsilon_2$ ; daher ist der Gesamtwiderstand in derjenigen Lage am kleinsten, in der möglichst wenig Kraftröhren diese Veränderung erfahren. Ein solcher Körper würde sich daher nach den Stellen geringster Feldstärke zu bewegen suchen. Da im Felde eines geladenen Konduktors die Feldstärke an der Oberfläche des Konduktors am größten ist, so wird also ein dielektrischer Körper — um Drehungsmomente auszuschließen, denken wir uns ihn in Gestalt einer Kugel — im Falle  $\epsilon_2 > \epsilon_1$  von dem Konduktor angezogen, im Falle  $\epsilon_2 < \epsilon_1$  dagegen abgestoßen werden. Anders liegt der Fall, wenn der Konduktor eine unendlich ausgedehnte Ebene ist, in deren Nähe das Feld ohne den dielektrischen Körper homogen sein würde. Wird ein dielektrischer Körper in die Nähe einer solchen Platte gebracht, so verändert sich durch die Rückwirkung des Körpers die Verteilung der Elektrizität auf der Platte. Ist  $\epsilon_2 > \epsilon_1$ , so sammelt sich die Elektrizität auf der Platte in der Nähe des Körpers in größerer Dichtigkeit an; das Feld zwischen der Platte und dem Körper ist stärker als an den übrigen Teilen des Feldes und der Körper bewegt sich daher nach diesem Teil des Feldes hin, d. h. auf die Platte zu. Ist  $\epsilon_2 < \epsilon_1$ , so ist umgekehrt das Feld zwischen Körper und Platte eine Stelle kleinster Feldstärke, und der Körper bewegt sich, da er nach Orten kleinster Feldstärke wandert, wiederum auf die Platte zu. Von einer unendlich großen ge-



ladenen leitenden Ebene wird also ein dielektrischer Körper immer angezogen, gleichviel ob  $\epsilon_2 >$  oder  $< \epsilon_1$  ist <sup>1)</sup>. Eine andere Form derartiger Versuche besteht darin, daß man dem Körper eine längliche Gestalt gibt und ihn zwischen zwei entgegengesetzt geladenen Kugeln aufhängt. Das Feld ist dann in der Verbindungslinie der Mittelpunkte der beiden Kugeln am stärksten. Der Körper wird sich daher, wenn  $\epsilon_2 > \epsilon_1$  ist, mit seiner Längserstreckung in diese Verbindungslinie, oder, wie man sagt, axial einstellen; ist dagegen  $\epsilon_2 < \epsilon_1$ , so wird er sich senkrecht zur Verbindungslinie oder äquatorial einstellen.

Ist das Feld vollkommen homogen und unendlich groß, so wird mit einer Parallelverschiebung des Körpers keine Aenderung des dielektrischen Widerstandes verknüpft sein. Es werden in einem solchen Felde also auch keine verschiebenden Kräfte auf den Körper wirken. Wohl aber kann, wenn der Körper nicht Kugelgestalt hat, ein Drehungsmoment auf den Körper ausgeübt werden. Denn der Körper wird ja, wenn  $\epsilon_2 > \epsilon_1$  ist, diejenige Lage anzunehmen suchen, in der möglichst viele Krafttröhren durch ihn hindurchgeleitet werden, in der er also möglichst stark elektrisiert ist, und wenn  $\epsilon_2 < \epsilon_1$ , diejenige Lage, in der er möglichst schwach elektrisiert ist. Hat nun der Körper die Gestalt einer flachen Scheibe, so ist aus den Grenzbedingungen beim Uebergang der Kraft aus einem in ein anderes Dielektrikum leicht zu ersehen, daß für  $\epsilon_2 > \epsilon_1$  die Elektrisierung der Scheibe schwach ist, wenn die Scheibe senkrecht zu den Kraftlinien liegt, während bei paralleler Lage die Kraftlinien in der Scheibe konzentriert werden. Ist dagegen  $\epsilon_2 < \epsilon_1$ , so findet gerade das Umgekehrte statt. Infolgedessen ist zu erwarten, daß eine solche Scheibe sich immer, gleichviel ob  $\epsilon_2 >$  oder  $< \epsilon_1$  ist, im homogenen Felde parallel zu den Kraftlinien stellen wird. Ein strenger Beweis dieses Satzes läßt sich allerdings nur für den Fall eines ellipsoidisch gestalteten Körpers geben, für den sich die Kräfte genau berechnen lassen.

Da die einzigen auf einen ungeladenen dielektrischen Körper wirkenden Kräfte die auf die Oberfläche nach Formel (123) wirkenden Druckkräfte sind, so erhält man die Komponenten der Gesamtkraft und des Drehungsmomentes, indem man in die Formeln (46) und (47) auf S. 56 für  $p$  den Ausdruck der Formel (123) einsetzt. Einen einfacheren Ansatz, der das Resultat in übersichtlicherer Form darstellt, erhält man durch eine Ueberlegung, die die Polarisation der Dielektrika in Betracht zieht.

Wir haben im Abschnitt 38 die Eigentümlichkeiten der Dielektrika dahin gedeutet, daß jedes Raumelement eines Dielektrikums im elektrischen Felde sich in polarisiertem Zustande befinde, und wir konnten

<sup>1)</sup> Siehe darüber W. v. Ignatowsky, Arch. d. Math. u. Physik (3) 16, S. 168 ff. u. 313 ff., 1910, wo sich eine eingehende Diskussion der ponderomotorischen Kräfte findet, die auf dielektrische Körper im elektrostatischen Felde wirken.

diesen Zustand auffassen als hervorgebracht durch eine in Richtung der elektrisierenden Kraft einerseits, und entgegen dieser Richtung andererseits stattfindende Verschiebung der das Raumelement im neutralen Zustande in gleicher Menge erfüllenden positiven und negativen Elektrizitäten, wodurch das Raumelement ein elektrisches Moment nach Art eines elektrischen Dipols erhält. Da diese Verschiebung unter dem Einfluß der ursprünglichen Kraft des Feldes erfolgt, so nimmt die ursprüngliche Energie des Feldes bei dieser Verschiebung ab und zwar um den Betrag der auf die Polarisation des Dielektrikums aufgewandten Arbeit. Für diese läßt sich folgender Ansatz aufstellen.

Es sei  $m = e \cdot d$  das elektrische Moment eines Dipols. Wenn unter dem Einflusse einer elektrischen Kraft  $\mathfrak{E}_0$ , die in der Richtung der Achse des Dipols wirkt,  $+e$  und  $-e$  jedes eine Verschiebung um  $\frac{\delta d}{2}$  erfahren,  $+e$  im Sinne von  $\mathfrak{E}_0$  und  $-e$  im entgegengesetzten Sinne, so nimmt das Moment um  $\delta m = e \delta d$  zu. Dabei hat die Kraft  $\mathfrak{E}_0$  die Arbeit  $e \mathfrak{E}_0 \delta d = \delta m \mathfrak{E}_0$  geleistet. Nun wächst das elektrische Moment des Raumelementes  $dv$  eines Dielektrikums proportional der wirkenden Kraft. Lassen wir also die Kraft anwachsen von 0 bis  $\mathfrak{E}_0$  und das Moment entsprechend wachsen von 0 bis  $m$ , so ist die ganze dabei geleistete Arbeit  $\frac{1}{2} m \mathfrak{E}_0$ . Für den allgemeineren Fall, daß die Achse des Dipols und die Richtung der elektrischen Kraft nicht zusammenfallen, sondern einen Winkel  $\psi$  miteinander bilden, ist diese Gleichung für jede der drei Koordinatenrichtungen zu bilden. Die ganze Arbeit ist dann:

$$\frac{1}{2} (m_x \mathfrak{E}_{0x} + m_y \mathfrak{E}_{0y} + m_z \mathfrak{E}_{0z}) = \frac{1}{2} m \mathfrak{E}_0 \cos \psi.$$

Nach Abschnitt 38 ist das Moment des Raumelementes:

$$\mathfrak{P} dv = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \mathfrak{E} dv = m.$$

Also ist die ganze durch die Polarisationsarbeit  $U$  verursachte Abnahme der Energie des Feldes beim Einbringen des dielektrischen Körpers:

$$\begin{aligned} -U &= -\frac{1}{2} \int \mathfrak{P} \mathfrak{E}_0 \cos \psi dv = -\int \frac{\varepsilon - 1}{8\pi} \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{E}_0 \cos (\mathfrak{E} \mathfrak{E}_0) dv \\ &= -\int \frac{\varepsilon - 1}{8\pi} dv (\mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_{0x} + \mathfrak{E}_y \mathfrak{E}_{0y} + \mathfrak{E}_z \mathfrak{E}_{0z})^1 \end{aligned} \quad (136)$$

<sup>1)</sup> Eine strenge Ableitung dieser Formel findet man bei Cohn, S. 105, und bei Abraham-Föppl I, S. 188.

oder allgemein, wenn  $\varepsilon$  im umgebenden Feld den Wert  $\varepsilon_1$ , im Körper den Wert  $\varepsilon_2$  hat:

$$-U = - \int \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{8\pi} \mathcal{E}_2 \mathcal{E}_1 \cos(\mathcal{E}_2 \mathcal{E}_1) d\tau, \quad (137)$$

wobei  $\mathcal{E}_1$  die elektrische Kraft vor der Einführung des dielektrischen Körpers,  $\mathcal{E}_2$  die elektrische Kraft nach der Einführung bedeutet.

Innerhalb des Feldes wird sich nun der Körper so zu bewegen suchen, daß die potentielle Energie möglichst klein, also obiger Ausdruck, absolut genommen, möglichst groß wird.

Ist das Feld  $\mathcal{E}_1$  streng homogen, so ist auch im Innern des Körpers  $\mathcal{E}_2$  homogen, wenn der Körper die Gestalt eines Ellipsoides hat. Daher ist dann, wenn  $v$  das Volumen des Körpers bedeutet:

$$U = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{8\pi} v \cdot \mathcal{E}_2 \mathcal{E}_1 \cos(\mathcal{E}_2 \mathcal{E}_1). \quad (138)$$

Werden die drei Hauptachsen des Ellipsoides als X-, Y- und Z-Achse genommen, so ist (vgl. S. 92)

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{2x} &= \frac{4\pi\varepsilon_1}{4\pi\varepsilon_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)L} \mathcal{E}_{1x}, & \mathcal{E}_{2y} &= \frac{4\pi\varepsilon_1}{4\pi\varepsilon_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)M} \mathcal{E}_{1y}, \\ \mathcal{E}_{2z} &= \frac{4\pi\varepsilon_1}{4\pi\varepsilon_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)N} \mathcal{E}_{1z}, \end{aligned} \quad (139)$$

wobei L, M und N Konstanten sind, die von der Form des Ellipsoides abhängen. Ist das Ellipsoid drehbar um die Z-Achse aufgehängt, und bildet die X-Achse mit der Richtung der Kraftlinien des ursprünglichen Feldes den Winkel  $\vartheta$ , so ist

$$\begin{aligned} U &= \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{8\pi} v (\mathcal{E}_{2x} \mathcal{E}_{1x} + \mathcal{E}_{2y} \mathcal{E}_{1y}) \\ &= \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{8\pi} v 4\pi\varepsilon_1 \mathcal{E}_1^2 \left( \frac{\cos^2 \vartheta}{4\pi\varepsilon_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)L} + \frac{\sin^2 \vartheta}{4\pi\varepsilon_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)M} \right) \\ &= \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2} \varepsilon_1 v \cdot \mathcal{E}_1^2 \left( \frac{1}{4\pi\varepsilon_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)M} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)(M - L) \cos^2 \vartheta}{[4\pi\varepsilon_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)L][4\pi\varepsilon_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)M]} \right) \\ &= \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\varepsilon_1 \mathcal{E}_1^2 v}{2[4\pi\varepsilon_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)M]} + \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2 \varepsilon_1 (M - L) \mathcal{E}_1^2 v \cdot \cos^2 \vartheta}{2[4\pi\varepsilon_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)L][4\pi\varepsilon_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)M]} \end{aligned} \quad (140)$$

Die Konstanten L, M, N sind stets positiv und kleiner als  $4\pi$ . Ist das Ellipsoid in der X-Richtung länger als in der Y-Richtung, so ist  $M > L$ , daher das zweite Glied immer positiv und U am größten, wenn  $\vartheta = 0$  oder  $= \pi$  ist, also wenn das Ellipsoid mit seiner größten Erstreckung

in Richtung der Kraftlinien des homogenen Feldes liegt. Dies gilt, gleichgültig, ob  $\epsilon_2 >$  oder  $< \epsilon_1$  ist. Die Größe des Drehungsmomentes für eine schiefe Lage des Ellipsoides ergibt sich unmittelbar, indem man den Ausdruck  $+\frac{dU}{d\vartheta}$  bildet, zu

$$- \epsilon_1 \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1)^2 (M - L) v \mathfrak{G}_1^2 \sin 2\vartheta}{2[4\pi\epsilon_1 + (\epsilon_2 - \epsilon_1)L][4\pi\epsilon_1 + (\epsilon_2 - \epsilon_1)M]}. \quad (141)$$

Ist das Feld nicht streng homogen, so kann dieses Drehungsmoment durch die Kräfte, die vom ersten, mit  $(\epsilon_2 - \epsilon_1)$  proportionalen Gliede von  $U$  herrühren, verdeckt werden.

Hat der Körper die Gestalt einer Kugel, so fallen die Richtungen von  $\mathfrak{G}_2$  und  $\mathfrak{G}_1$  zusammen; es ist

$$L = M = N = \frac{4\pi}{3} \quad \text{und} \quad U = \frac{3 \cdot \epsilon_1}{8\pi} \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} v \mathfrak{G}_1^2 \quad (142)$$

(vgl. Abschnitt 39, S. 90).

Befindet sich der Körper in einem nicht homogenen Felde, so erhält man die Komponenten der Kraft, die ihn im Felde zu bewegen sucht, indem man die Ableitungen von  $U$  nach den Achsen bildet, z. B.:

$$\mathfrak{K}_x = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{8\pi} \mathfrak{G}_2 \mathfrak{G}_1 \cos \mathfrak{G}_2 \mathfrak{G}_1 dv. \quad (143)$$

Ist der Körper eine Kugel, und ist diese so klein, oder die Inhomogenität des Feldes so gering, daß man die Veränderlichkeit des Feldes innerhalb der Kugel in erster Annäherung vernachlässigen kann, so ist die bei einer virtuellen Verschiebung eintretende Änderung von  $U$  bedingt durch die Änderung von  $\mathfrak{G}_1^2$  in (142). Also ist in erster Annäherung:

$$\mathfrak{K}_x = \frac{3\epsilon_1}{8\pi} \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} v \frac{\partial \mathfrak{G}_1^2}{\partial x}. \quad (144)$$

Analoge Werte ergeben sich für die Kraftkomponenten  $\mathfrak{K}_y$  und  $\mathfrak{K}_z$ . Bezeichnet man die Richtung, in der  $\mathfrak{G}^2$  am stärksten wächst, mit  $s$ , so ist die Kraft, die die Kugel in dieser Richtung bewegt,

$$\mathfrak{K}_s = \frac{3\epsilon_1}{8\pi} \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} v \frac{\partial \mathfrak{G}_1^2}{\partial s}. \quad (145)$$

Diese Formel hat Boltzmann<sup>1)</sup> benutzt, um die Dielektrizitätskonstante zu bestimmen. Er maß die Kraft, welche eine kleine Kugel aus dem zu untersuchenden Dielektrikum in Luft ( $\epsilon_1 = 1$ ) in einem un-

<sup>1)</sup> L. Boltzmann, Wien. Ber. (2) 68, S. 81, 1873; 70, S. 307, 1874. — Pogg. Ann. 153, S. 525, 1874.

gleichförmigen Felde erfährt. Dabei bestimmte (oder eliminierte) er das in der Formel auftretende Gefälle des Quadrates der Feldstärke dadurch, daß er an denselben Ort, an welchem sich vorhin die Kugel des Dielektrikums befand, eine gleich große leitende Kugel brachte. Am einfachsten gelingt dies, wenn man die Kugel des Dielektrikums mit einer sehr dünnen, metallisch leitenden Schicht überzieht. Denn im elektrostatischen Felde wirkt eine metallische Hohlkugel ebenso wie eine metallische Vollkugel.

Wie schon mehrfach betont worden ist (siehe S. 83 u. 91), wirkt ein Leiter wie ein Dielektrikum, dessen Dielektrizitätskonstante unendlich groß ist. Die Wirkung der leitenden Kugel im elektrischen Felde folgt daher, indem man in obiger Formel (145)  $\epsilon_2 = \infty$  setzt:

$$\mathcal{R}_s' = \frac{3\epsilon_1}{8\pi} v \frac{\partial \mathcal{G}_1^2}{\partial s}. \quad (146)$$

Wenn nun die Kugeln klein sind, so werden sie den Verlauf der elektrischen Kraftlinien nur in ihrer nächsten Nähe beeinflussen, und das Gefälle des Quadrates der Feldstärke wird außerhalb der Kugeln in beiden Fällen nahezu dasselbe sein.

Setzt man daher  $\frac{\partial \mathcal{G}_1^2}{\partial s}$  in den Formeln (145) und (146) einander gleich und  $\epsilon_1 = 1$ , da die Versuche in Luft ausgeführt wurden, so ergibt sich der Koeffizient  $\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2}$  gleich dem Verhältnis  $\mathcal{R}_s/\mathcal{R}_s'$  und daraus  $\epsilon = \frac{2\mathcal{R}_s + \mathcal{R}_s'}{\mathcal{R}_s' - \mathcal{R}_s}$ . In dieser Weise hat Boltzmann auch für Kristalle (Schwefel) die Dielektrizitätskonstante bestimmt. Die Betrachtungen sind dann etwas zu modifizieren, da  $\epsilon$  im Kristall von der Richtung abhängt.

Auf dem gleichen Gedanken, daß nämlich der Isolator nach Stellen der größten Feldstärke sich hinbewegt mit einer Kraft, welche proportional zu  $\epsilon_2 - \epsilon_1$  ist, beruht eine Bestimmungsmethode von Rosa <sup>1)</sup>. Es wurde dabei ein schnell wechselndes elektrisches Feld benutzt.

## 45. Volumkräfte.

Wir haben bisher alle Kräfte aus Oberflächendruck abgeleitet, die auf die Oberfläche der Leiter oder auf die Oberfläche der Dielektrika wirken, indem wir überall homogene Dielektrika voraussetzten, die in Diskontinuitätsflächen aneinander und an die Leiter grenzten.

Man kann aber statt dessen die ponderomotorischen Kräfte auf Volumkräfte zurückführen, indem man statt der Flächenladungen und

<sup>1)</sup> E. B. Rosa, Phil. Mag. (5) 34, S. 344, 1892.

Diskontinuitätsflächen überall stetige Uebergänge annimmt. An die Stelle der Flächenladungen treten also dünne Schichten mit räumlicher Dichtigkeit, an die Stelle der Grenzflächen der Dielektrika dünne Schichten, in denen  $\epsilon$  stetig variiert von  $\epsilon_2$  bis  $\epsilon_1$ . Volumkräfte treten dann überall da auf, wo räumliche Ladungen vorhanden sind oder wo Veränderlichkeit von  $\epsilon$  mit den Koordinaten besteht. Ist  $\rho$  die räumliche Dichte,  $\mathcal{E}$  die Feldstärke an der Stelle des Elementes  $d\mathbf{v}$ , so sind die Volumkräfte, die auf die Ladung wirken, nach unseren Grundprinzipien gegeben durch  $\mathcal{E}\rho d\mathbf{v}$ . Die durch das Gefälle von  $\epsilon$  bedingten Volumkräfte aber lassen sich durch folgende Ueberlegung ableiten. Wenn an der Grenzfläche zweier Dielektrika der Unterschied der Dielektrizitätskonstanten unendlich klein ist, so unterscheiden sich auch  $\mathcal{E}_2$  und  $\mathcal{E}_{n_2}$  von  $\mathcal{E}_1$  und  $\mathcal{E}_{n_1}$  nur um unendlich kleine Größen, und in dem mit  $(\epsilon_2 - \epsilon_1)$  multiplizierten Ausdruck (123)  $(\mathcal{E}_2 \mathcal{E}_{n_1} - \mathcal{E}_{n_2} \mathcal{E}_1)$  kann man diese Unterschiede als Größen von der zweiten Ordnung der Kleinheit vernachlässigen. Dann ist der elektrostatische

Druck an einer solchen Grenzfläche gegeben durch  $\frac{\partial \epsilon}{8\pi} \mathcal{E}_1^2$ . In einer unendlich dünnen Uebergangsschicht von der Dicke  $\delta h$  wird daher auf die Flächeneinheit die Kraft  $\frac{\mathcal{E}^2}{8\pi} \frac{\partial \epsilon}{\partial h} \cdot \delta h$  wirken, und zwar wird diese Kraft nach dem, was wir in Abschnitt 42, S. 105 festgestellt haben, immer nach der Richtung wirken, in der  $\epsilon$  abnimmt. Also wirkt auf das Volumenelement  $d\mathbf{v}$  eine Kraft  $\frac{\mathcal{E}^2}{8\pi} \frac{\partial \epsilon}{\partial h} d\mathbf{v}$ . Die gesamte Volumkraft hat also die Komponenten:

$$\left. \begin{aligned} & \left( \rho \mathcal{E}_x - \frac{1}{8\pi} \mathcal{E}^2 \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \right) d\mathbf{v} \\ & \left( \rho \mathcal{E}_y - \frac{1}{8\pi} \mathcal{E}^2 \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right) d\mathbf{v} \\ & \left( \rho \mathcal{E}_z - \frac{1}{8\pi} \mathcal{E}^2 \frac{\partial \epsilon}{\partial z} \right) d\mathbf{v} \end{aligned} \right\} \quad (147)$$

Diese Ausdrücke zeigen, daß das Produkt  $e\mathcal{E}$  nur im homogenen Dielektrikum die auf die Elektrizitätsmenge  $e$  wirkende ponderomotorische Kraft darstellt. Im inhomogenen Dielektrikum kommen noch die zu zweit stehenden Glieder obiger Ausdrücke dazu.

Der hier gegebene Ansatz für die wirklichen Volumkräfte gestattet, unter Anwendung des Prinzips der kontinuierlichen Uebergänge, die ponderomotorischen Kräfte, wie wir sie früher erhalten haben, abzuleiten. Aber der Ansatz ist allgemeiner. Er gilt für wirkliche räumliche Verteilung der Elektrizität und beliebige, stetig variable Dielektrika.

## 46. Experimentelle Ermittlung der Dielektrizitätskonstanten.

Es sollen hier die Methoden zur experimentellen Ermittlung der Dielektrizitätskonstanten, von denen wir einige bereits kennen gelernt haben, zusammengefaßt, aber nur kurz skizziert werden. Betreffs der ausführlicheren Beschreibung sei auf die Werke von G. Wiedemann (II. Band, Kap. I), Mascart und Joubert (II. Band) und Winkelmanns großes Handbuch (V. Band) verwiesen.

### a) Ermittlung aus Kapazitätsvergleichung.

Diese Methode beruht ganz unmittelbar auf der in Abschnitt 30 gegebenen Definition der Dielektrizitätskonstanten. Die Kapazität eines und desselben Kondensators wird gemessen, einmal wenn sein Zwischenraum mit Luft, das andere Mal, wenn er mit dem zu untersuchenden Stoffe angefüllt ist. Wegen der Reduktion auf den leeren Raum vergleiche man die Bemerkung auf S. 63. Wenn der zu untersuchende Körper nicht den ganzen Zwischenraum zwischen den Kondensatorplatten ausfüllt, so ergibt sich  $\epsilon$  unter Benützung der Formel (84) auf S. 83 ebenfalls durch Vergleichung der Kapazitäten des Kondensators mit und ohne zwischengeschobenen Körper.

Die Kapazitäten werden entweder durch den Ausschlag eines mit dem Kondensator verbundenen Elektroskops oder Elektrometers miteinander verglichen oder durch den Ausschlag eines ballistischen Galvanometers (zuerst von Siemens<sup>1)</sup> benutzt), eines Elektrodynamometers<sup>2)</sup> oder eines Telephons<sup>3)</sup>, durch deren Windungen der Ladungs- oder Entladungsstrom des Kondensators — sei es mit einmaliger Ladung oder Entladung oder in vielfachen Wiederholungen unter Anwendung eines Induktoriums — geführt wird.

Es hat sich gezeigt, daß bei vielen Körpern die Dielektrizitätskonstante verschieden ausfällt, je nachdem sie in einem elektrischen Felde von konstanter oder schnell wechselnder Stärke untersucht werden. Die Erscheinungen werden nämlich beeinflußt durch eine etwa vorhandene galvanische Leitfähigkeit der Körper. Diese muß bei Untersuchung in statischen Feldern eine scheinbare Vergrößerung der Dielektrizitätskonstanten hervorrufen; denn in der Tat sahen wir ja oben auf S. 83, daß ein Konduktor in einem elektrostatischen Felde so wirkt wie ein Isolator, dessen Dielektrizitätskonstante unendlich groß ist.

<sup>1)</sup> W. Siemens, Pogg. Ann. 102, S. 91, 1857.

<sup>2)</sup> W. Donle, Wied. Ann. 40, S. 307, 1890.

<sup>3)</sup> Palaz, Diss., Zürich 1886. A. Winkelmann, Wied. Ann. 38, S. 161, 1889:  
40 S 732 1890

Wenn der Körper nicht homogen ist, so kann eine etwa vorhandene Leitfähigkeit auch die Erscheinung des sog. Rückstandes erklären, derzufolge ein Kondensator einige Zeit nach der Entladung wiederum von selbst sich geladen erweist.

Wie nämlich Maxwell<sup>1)</sup> zeigte, muß eine solche Rückstandsbildung immer eintreten, wenn die Dielektrizitätskonstante an verschiedenen Stellen des Körpers in verschiedenem Verhältnis zur Leitungsfähigkeit steht, was bei inhomogenen Körpern eintreten kann. Die Maxwellsche Theorie der Rückstandsbildung ist experimentell in mehreren Fällen bestätigt<sup>2)</sup>.

Bei Körpern, welche nicht, wie z. B. die Gase oder der Schwefel, sehr gute Isolatoren sind, ist es daher zweckmäßiger, sich zur Bestimmung der Dielektrizitätskonstanten einer Methode zu bedienen, deren Resultat nicht durch etwa vorhandene Leitfähigkeit gestört wird.

Zu dem Zweck kann man entweder so verfahren, daß man den Körper nur in möglichst schnell wechselnden Feldern untersucht, weil dann, wie Maxwell gezeigt hat, die Leitfähigkeit die Erscheinungen nicht stört, oder nach der von Cohn und Arons<sup>3)</sup> angegebenen Methode, welche Dielektrizitätskonstante und Leitfähigkeit gesondert zu bestimmen erlaubt. Der grundlegende Gedanke ist bei dieser Methode, daß die Leitfähigkeit der Zwischenschicht eines Kondensators denselben Effekt haben muß, als ob dieselbe vollkommen isolierte, aber die Kondensatorplatten durch einen gewissen großen galvanischen Widerstand leitend verbunden würden. Indem man diese Schaltung wirklich vornimmt und diesen Widerstand in bekannten Verhältnissen variiert, kann der Effekt der Leitfähigkeit des unvollkommenen Isolators experimentell ermittelt werden.

Auf demselben Gedanken beruht eine noch einfachere Versuchsanordnung von Nernst<sup>4)</sup>, welcher die beiden Kondensatoren, deren Kapazitäten verglichen werden sollen, in die Zweige einer Wheatstoneschen Brücke einschaltet, deren andere Zweige durch zwei gleiche kapazitätsfreie Widerstände gebildet werden. Es wird mit Wechselströmen (Induktionsapparat) gearbeitet und die Kapazitäten in der Weise abgeglichen, daß ein im Verbindungsdraht der Wheatstoneschen Brücke befindliches Telephon zum Schweigen gebracht wird. Das geschieht, wenn die Kapazitäten sich umgekehrt wie die Widerstände verhalten, also einander gleich sind, wenn die Widerstände gleich sind. Aber das Telephon schweigt

<sup>1)</sup> J. Cl. Maxwell, Lehrbuch, Bd. I. S. 471. — Ueber ein mechanisches Modell eines Isolators mit Rückstandseigenschaften vgl. auch O. Lodge, *Modern Views of Electricity*; deutsch von Wachsmuth, S. 46 ff.

<sup>2)</sup> Betreffs der Literatur hierzu vgl. Winkelmann, *Handbuch der Physik*, 2. Aufl., Bd. IV, S. 159 (Artikel: Dielektrizität von L. Graetz).

<sup>3)</sup> Cohn und Arons, *Wied. Ann.* 28, S. 454, 1886; 33, S. 32, 1888.



nicht, wenn die Kondensatoren nicht völlig isolieren. Besteht eine geringe Leitfähigkeit der Isolatoren, so spricht das Telephon ganz unabhängig von den Kapazitäten auf die durch die Leitfähigkeit vermittelten Ströme so an, als ob nur diese auf das Telephon einwirkten. Bringt man neben jedem Kondensator einen großen, kapazitätsfreien, regulierbaren Widerstand an, so kann man diese ebenfalls auf das Verhältnis der beiden Vergleichswiderstände einregulieren und das Telephon damit zu völligem Schweigen bringen. (Ueber die theoretischen Grundlagen dieser Methode siehe Kapitel VI, Abschnitt 17.)

Nach dieser Methode lassen sich die Dielektrizitätskonstanten von Körpern messen, deren Leitfähigkeit noch etwas besser als die des destillierten Wassers ist<sup>1)</sup>. Noch weiter führt die Anwendung schneller elektrischer Schwingungen an Stelle der langsameren Wechselströme eines Induktoriums<sup>2)</sup>.

Wie oben erwähnt wurde, ist es, zur Verminderung des Einflusses der Leitfähigkeit des Dielektrikums, günstig, die Ladungen der Kondensatoren möglichst schnell zu wechseln. Es ist dies auch aus dem Grunde noch günstig, weil eventuell die Dielektrika hinsichtlich ihres Verhaltens im elektrischen Felde Nachwirkungseigenschaften besitzen könnten, analog wie sie fast alle Körper gegenüber mechanischen oder thermischen Einflüssen aufweisen<sup>3)</sup>. (Siehe über diese Eigenschaften ausführlicher Abschnitt 49.) Eine dielektrische Nachwirkung würde ebenfalls, auch wenn sie nicht von galvanischer Leitfähigkeit begleitet wäre, die Rückstandsbildung erklären<sup>4)</sup>; ebenso ergeben sich dadurch verschiedene Werte der Dielektrizitätskonstanten je nach der Ladungsdauer der Kondensatoren. Je kürzer letztere aber gewählt wird, um so weniger können sich Nachwirkungserscheinungen bemerklich machen.

#### b) Ermittlung aus ponderomotorischen Wirkungen.

Diese Methoden beruhen auf den im Abschnitt 31 (S. 66) entwickelten Sätzen über den Einfluß der Dielektrizitätskonstanten auf die ponderomotorischen Wirkungen geladener Körper. Die dort gezogene Folgerung, daß bei Ladung auf gleiches Potential die ponderomotorischen Kräfte, die die geladenen Leiter aufeinander ausüben, der Dielektrizitäts-

<sup>1)</sup> Die obengenannte Methode von Cohn und Arons versagt für diesen Zweck — später konnte aber Cohn durch Beobachtung des zeitlichen Verlaufs der Entladung die Dielektrizitätskonstante auch für Wasser bestimmen (Wied. Ann. **38**, S. 42, 1889). Dieser letzten Methode verwandt ist die Versuchsanordnung von E. Bouty, C. R. **114**, S. 533, 1421, 1892.

<sup>2)</sup> W. Nernst, Wied. Ann. **60**, S. 600, 1897.

<sup>3)</sup> L. Boltzmann, Wien. Ber. (2), **70**, S. 275, 1874. — Romich und Nowak, Wien. Ber. (2) **70**, S. 380, 1874.

<sup>4)</sup> Vgl. hierüber Hopkinson, Phil. Trans., Lond. **167**, S. 599, 1877.

konstanten ihrer Umgebung direkt proportional sind, ist zuerst von Silow<sup>1)</sup> zur Messung der Dielektrizitätskonstanten von Flüssigkeiten benutzt worden. Er maß die Anziehung der Nadel eines einfach gestalteten Quadrantelektrometers, wenn dasselbe mit verschiedenen Flüssigkeiten gefüllt wurde. Die Nadel und das eine Quadrantenpaar des Elektrometers wurden durch Verbindung mit den Polen einer galvanischen Batterie immer zu einer bestimmten Potentialdifferenz geladen. Nach gleicher Methode haben Tomaszewski<sup>2)</sup> und Pérot<sup>3)</sup> gearbeitet. Durch die Anwendung schnell wechselnder Ladungen konnten Cohn und Arons<sup>4)</sup>, Tereschin<sup>5)</sup>, Rosa<sup>6)</sup> und Heerwagen<sup>7)</sup> nach dieser Methode auch die Dielektrizitätskonstanten schlecht leitender Flüssigkeiten, z. B. des destillierten Wassers und des Alkohols, messen; desgl. Nernst<sup>8)</sup>, der auf eine beachtenswerte Fehlerquelle der Methode aufmerksam machte, und Smale<sup>9)</sup>.

Quincke<sup>10)</sup> maß die Anziehung zwischen den Platten eines Kondensators, welcher verschiedene Flüssigkeiten enthielt, indem er die eine Platte des Kondensators an einem Wagebalken aufhing und die Gewichte bestimmte, welche den elektrischen Zugkräften das Gleichgewicht halten. Durch Vergleichung dieser Zugkräfte ergeben sich direkt die Dielektrizitätskonstanten der Flüssigkeiten unter Anwendung der Formel (73) S. 66, falls der Kondensator immer zu derselben Potentialdifferenz geladen wird und seine Platten immer denselben Abstand voneinander besitzen.

In anderer Weise verfuhr Boltzmann<sup>11)</sup>, indem er die Kraft maß, welche eine kleine Kugel aus dem zu untersuchenden Dielektrikum in einem ungleichförmigen elektrischen Felde erfährt; diese Methode ist auf S. 117 bereits behandelt worden.

Ferner läßt sich die auf S. 107 beschriebene Versuchsanordnung von Quincke benutzen, um die Dielektrizitätskonstanten von Flüssigkeiten zu ermitteln.

Ueber eine andere Steighöhenmethode und die Schwierigkeit ihrer Anwendung in elektrostatischen Feldern siehe Kapitel II, Abschnitt 29.

<sup>1)</sup> Silow, Pogg. Ann. 156, S. 389, 1875.

<sup>2)</sup> F. Tomaszewski, Wied. Ann. 33, S. 33, 1888.

<sup>3)</sup> A. Pérot, Journ. de Phys. (2) 10, S. 149, 1891.

<sup>4)</sup> E. Cohn und L. Arons, Wied. Ann. 33, S. 13, 1888.

<sup>5)</sup> S. Tereschin, Wied. Ann. 36, S. 792, 1889.

<sup>6)</sup> E. B. Rosa, Phil. Mag. (5) 31, S. 188, 1891.

<sup>7)</sup> F. Heerwagen, Wied. Ann. 48, S. 35; 49, S. 272, 1893.

<sup>8)</sup> W. Nernst, Wied. Ann. 57, S. 209, 1896.

<sup>9)</sup> J. F. Smale, Wied. Ann. 57, S. 215, 1896; 60, S. 625, 1897.

<sup>10)</sup> G. Quincke, Wied. Ann. 19, S. 705, 1883; 28, S. 530, 1886.

<sup>11)</sup> Vgl. die auf S. 117 genannten Arbeiten Boltzmanns. In derselben Weise haben Romich und Nowack gearbeitet. Wien. Ber. (2) 70, S. 380, 1874.

Graetz und Fomm<sup>1)</sup> endlich maßen das Drehungsmoment, das ein dielektrisches Rotationsellipsoid in einem homogenen Felde erfährt, wenn seine Achse unter  $45^\circ$  zu den Kraftlinien des Feldes steht, und berechneten  $\epsilon$  auf Grund der Formel (141) auf S. 117. Es wurden dabei als Grenzfälle des Rotationsellipsoides flache kreisförmige Scheiben oder längliche Stäbchen benutzt und die Kondensatorplatten mit schnell wechselnden elektrischen Schwingungen geladen.

c) Ermittlung aus der Brechung der Kraftlinien.

Diese Methode ist in Abschnitt 34, S. 73 erörtert worden.

Neben diesen Methoden, die auf den Prinzipien der Elektrostatik beruhen, gibt es andere, die sich auf die Beziehung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit elektrischer Wellen zur Dielektrizitätskonstante gründen. Wir werden sie im IX. Kapitel dieses Buches kennen lernen.

## 47. Elektrostriktion.

Wenn ein Kondensator mit einem festen Dielektrikum, z. B. einer innen und außen belegten Glasröhre oder Glaskugel, elektrisiert wird, so ändert sich das Volumen des Dielektrikums. Ist die Röhre oder Kugel mit einer Flüssigkeit gefüllt, die in eine feine Kapillare hineinragt, so zeigt der Rückgang des Meniskus eine Volumvermehrung durch das Elektrisieren an. Derartige Beobachtungen sind zuerst von Decker<sup>2)</sup>, später von Quincke<sup>3)</sup>, in neuerer Zeit von Wüllner und M. Wien<sup>4)</sup> angestellt worden. Die Wirkung rührt in erster Linie davon her, daß die anziehenden Kräfte zwischen den beiden Belegungen einen rein mechanischen Druck auf das Dielektrikum ausüben und das vom Dielektrikum umschlossene Volumen dadurch vergrößern. Allein die genauen Messungen von Wüllner und M. Wien haben ergeben, daß die beobachteten Volumänderungen denjenigen, die sich aus dem elektrostatischen Druck und den elastischen Konstanten der Materialien berechnen ließen, nicht ganz entsprechen; sie waren im-allgemeinen kleiner und zeigten bei manchen Glassorten sehr erhebliche Abweichungen. Es besteht also außer dem mechanischen Druck auf die Oberfläche noch eine andere, durch die Elektrisierung bedingte mechanische Wirkung innerhalb des Dielektrikums. Eine derartige Wirkung der Elektrisierung eines Isolators bezeichnet man als Elektrostriktion.

<sup>1)</sup> L. Graetz und L. Fomm, Wied. Ann. 54, S. 626, 1895.

<sup>2)</sup> E. Decker, C. R. 87, S. 828, 960, 1878; 88, S. 1260, 1879.

<sup>3)</sup> G. Quincke Wied. Ann. 10. S. 165. 18 : 19. S. 5 3. 1883.

Eine solche Wirkung ist nur denkbar, wenn andererseits die elektrischen Eigenschaften des Dielektrikums, also seine Dielektrizitätskonstante, durch mechanische Einwirkungen, Druck oder Zug, beeinflusst werden. Dieser Zusammenhang läßt sich aus energetischen Prinzipien herleiten; bestünde er nämlich nicht, so würde sich ein Kreisprozeß ausführen lassen, durch den man fortwährend Arbeit erhalten könnte, d. h. es würde sich ein Perpetuum mobile ergeben.

Wir denken uns, um eine solche Betrachtung durchzuführen, einen ebenen Kondensator mit gegebenen Ladungen, mit Luft erfüllt<sup>1)</sup>. Nun werde eine Platte eines Dielektrikums in den Kondensator hineingeschoben, so daß sie senkrecht zu den Kraftlinien liegt und überall gleichmäßig elektrisiert wird. Bei diesem Prozeß aber werde durch passend angebrachte Zug- oder Druckkräfte dafür gesorgt, daß die Platte keine mechanische Veränderung erleidet. Dann nimmt die potentielle Energie des Systems beim Einbringen der Platte ab um die zur Polarisierung der Platte erforderliche Arbeit, oder es wird durch die Kräfte, die die Platte in das Feld hineinziehen, eine gewisse Arbeit gewonnen. Diese ist nach (137):

$$W_{12} = \frac{1}{8\pi} (\epsilon - 1) \mathfrak{E}_1 \mathfrak{E}_0 v = \frac{1}{8\pi} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \mathfrak{E}_0^2 v,$$

wenn  $\mathfrak{E}_0$  die Feldstärke zwischen den Platten des Kondensators bedeutet.

Gehen wir dagegen von einem Felde von der Stärke  $\mathfrak{E}_0$  aus und denken uns die Platte aus diesem in ein Feld von der Stärke  $\mathfrak{E}_0'$  gebracht, so ist der entsprechende Arbeitsgewinn:

$$W_{12} = \frac{1}{8\pi} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} (\mathfrak{E}_0'^2 - \mathfrak{E}_0^2) v. \quad (150)$$

Nun werde in dem Felde  $\mathfrak{E}_0'$  mit der Platte eine mechanische Veränderung vorgenommen. Der Einfachheit halber wollen wir uns denken, daß die Platte in der Richtung der Kraftlinien gedehnt werde um  $\delta a$ , ohne daß sie sich senkrecht dazu in ihrer Ausdehnung ändere; dann wächst das Volumen der Platte von  $v$  auf  $v' = v + S\delta a$ , wenn  $S$  die Fläche der Platte bedeutet. Gleichzeitig ändere sich bei dieser Zustandsänderung die Dielektrizitätskonstante  $\epsilon$  auf  $\epsilon'$ . Ein Teil der erforderlichen Arbeit wird von dem an der Grenzfläche der Platte gegen Luft angreifenden elektrostatischen Druck geleistet, der nach (119)

$$= \frac{1}{8\pi} \mathfrak{E}_0'^2 - \frac{\epsilon}{8\pi} \mathfrak{E}_1'^2 = \frac{1}{8\pi} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \mathfrak{E}_0'^2$$

<sup>1)</sup> Wegen einer notwendigen Korrektur des Gedankengangs in der ersten Auflage dieses Buches S. 158, s. R. Gans, Ann. der Phys. (4) 11, S. 797, 1903. Vgl. auch wegen der obigen Darstellung J. Königsberger, Ann. der Phys. (4) 5, S. 113, 1901.

ist. Der übrige Teil werde mit  $P' \delta v$  bezeichnet, so daß die ganze bei diesem Prozeß gewonnene Arbeit ausgedrückt werde durch

$$W_{23} = \left( \frac{1}{8\pi} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \mathfrak{E}_0'^2 + P' \right) (v' - v). \quad (151)$$

Jetzt werde die so veränderte Platte in das Feld  $\mathfrak{E}_0$  zurückgebracht. Dabei muß eine Arbeit geleistet werden:

$$W_{34} = - \frac{1}{8\pi} \frac{\varepsilon' - 1}{\varepsilon'} (\mathfrak{E}_0'^2 - \mathfrak{E}_0^2) v'. \quad (152)$$

Endlich möge im Feld  $\mathfrak{E}_0$  die Platte auf ihr ursprüngliches Volumen wieder zusammengedrückt werden. Dabei muß abermals eine Arbeit geleistet werden: der eine Teil gegen den elektrostatischen Druck; der andere Teil möge jetzt mit  $P \delta v$  bezeichnet werden; also

$$W_{41} = - \left( \frac{1}{8\pi} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \mathfrak{E}_0^2 + P \right) (v' - v). \quad (153)$$

Es ist nun ein vollständiger Kreisprozeß beschrieben, und nach dem Axiom, daß es kein Perpetuum mobile gibt, muß die algebraische Summe aller Arbeiten gleich Null sein:

$$W_{12} + W_{23} + W_{34} + W_{41} = 0,$$

d. h.

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{8\pi} (\mathfrak{E}_0'^2 - \mathfrak{E}_0^2) \left[ \frac{\varepsilon' - 1}{\varepsilon'} v' - \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} v \right] \\ & + \frac{1}{8\pi} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} (\mathfrak{E}_0'^2 - \mathfrak{E}_0^2) (v' - v) + (P' - P) (v' - v) = 0 \end{aligned}$$

oder

$$+ \frac{1}{8\pi} (\mathfrak{E}_0'^2 - \mathfrak{E}_0^2) v' \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{\varepsilon \varepsilon'} = + (P' - P) (v' - v),$$

was sich unter Vernachlässigung der Produkte der kleinen Größen  $(v' - v)$  und  $(\varepsilon' - \varepsilon)$  in der Form schreiben läßt:

$$+ \frac{1}{8\pi} (\mathfrak{E}_0'^2 - \mathfrak{E}_0^2) v \cdot \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{\varepsilon^2} = + (P' - P) (v' - v). \quad (154)$$

Aus dieser Gleichung geht hervor, daß, wenn die Kräfte  $P'$  und  $P$  in den beiden Feldern  $\mathfrak{E}_0'$  und  $\mathfrak{E}_0$  verschieden sind, auch  $\varepsilon'$  und  $\varepsilon$  verschieden, d. h.  $\varepsilon$  mit  $v$  veränderlich sein muß. Die Differenz  $P' - P$  stellt also einen Druck dar, der im Inneren des Dielektrikums durch die verstärkte Elektrisierung hervorgerufen wird. Ist  $\mathfrak{E}_0 = 0$ , so stellt die Differenz  $P' - P$  die ganze durch die Elektrisierung in dem Medium hervorgerufene Elektrostriktionskraft dar. Sie möge mit  $p_i$  bezeichnet werden. Da ferner die Änderungen von  $\varepsilon$  und  $v$  nur sehr klein sind, so läßt sich die Formel schreiben:

$$p_i = + \frac{1}{8\pi} \frac{\mathfrak{E}_0^2}{\varepsilon^2} v \frac{\partial \varepsilon}{\partial v} \quad (155)$$

oder, indem wir an die Stelle der Feldstärke des erregenden Feldes die innerhalb des Dielektrikums herrschende Feldstärke  $\mathfrak{E}$  setzen:

$$p_i = + \frac{1}{8\pi} \mathfrak{E}^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial v} v \quad \text{oder} \quad \frac{1}{8\pi} \mathfrak{E}^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial a} a. \quad (156)$$

Dabei ist die Kraft  $p_i$  positiv gerechnet, wenn sie Vermehrung des Volumens oder Verlängerung der linearen Dimension bedeutet. Nimmt also  $\varepsilon$  zu durch einen Zug, der das Volumen oder die Länge zu vergrößern sucht, so bewirkt die Elektrisierung das Auftreten einer inneren Kraft, die eine Vermehrung des Volumens oder der Länge herbeiführt.

Wird das Dielektrikum aus dem Feld  $\mathfrak{E}_0$  in das Feld  $\mathfrak{E}_0'$  gebracht, so entspricht die Gesamtabnahme der potentiellen Energie des elektrischen Systems

$$\frac{1}{8\pi} \left( \frac{\varepsilon' - 1}{\varepsilon'} v' \mathfrak{E}_0'^2 - \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} v \mathfrak{E}_0^2 \right)$$

einer dreifachen Arbeitsleistung, indem sich der obige Ausdruck, kleine Veränderungen vorausgesetzt, in der Form der Summe

$$\frac{1}{8\pi} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} v \cdot \Delta \mathfrak{E}_0^2 + \frac{1}{8\pi} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \mathfrak{E}_0^2 \Delta v + \frac{1}{8\pi} v \mathfrak{E}_0^2 \frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon^2}$$

schreiben läßt. Der erste Summand stellt die von den elektrischen Kräften beim Hereinziehen des Dielektrikums in das stärkere Feld geleistete Arbeit dar, der zweite die Arbeit, mit der der elektrostatische Oberflächen- druck das Dielektrikum deformiert, und der dritte die von der Elektrostriktionskraft geleistete Arbeit.

Will man aus dem für die Elektrostriktionskraft gewonnenen Ausdruck die durch die Elektrisierung bewirkte Deformation berechnen, so hat man den Wert von  $p_i$  als mechanische Kraft in die entsprechenden Gleichungen der Elastizität einzusetzen. Am einfachsten ist die Anwendung auf Flüssigkeiten und Gase. Hier repräsentiert  $p_i$  einen allseitig wirkenden Druck oder Zug. Bei tropfbaren Flüssigkeiten bewirkt ein Zug auf die Oberfläche von der Größe  $p$  eine relative Volumvermehrung

$$\frac{\delta v}{v} = \frac{p}{C},$$

wenn  $C$  den Kompressionsmodul bedeutet. Wir wollen die relative Volumvermehrung  $\frac{\delta v}{v}$  mit  $\delta \Theta$  bezeichnen. Dann ist die durch Elektrisierung herbeigeführte Volumänderung

$$\delta v = \frac{1}{8\pi} \mathfrak{E}^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial v} \cdot \frac{v^2}{C} = \frac{1}{8\pi} \mathfrak{E}^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \Theta} \frac{v}{C}. \quad (157)$$

Nimmt  $\epsilon$  mit  $v$  zu, also bei Kompression ab, so muß sich die Flüssigkeit bei der Elektrisierung ausdehnen; nimmt  $\epsilon$  mit wachsendem  $v$  ab, also bei Kompression zu<sup>1)</sup>, so muß die Flüssigkeit sich durch Elektrisierung zusammenziehen. Allein die an Flüssigkeiten bisher vorliegenden Untersuchungen<sup>2)</sup> haben widersprechende Resultate ergeben. Für Gase dagegen läßt sich der zu erwartende Effekt direkt angeben, da für Gase der Zusammenhang zwischen  $\epsilon$  und  $v$  bekannt ist. Für Gase ist nämlich nach Boltzmann<sup>3)</sup>  $(\epsilon - 1)v$  konstant. Also ist

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial v} = - \frac{\epsilon - 1}{v}. \quad (158)$$

Gase ziehen sich also bei Elektrisierung zusammen oder zeigen eine Druckverminderung

$$p_i = - \frac{\epsilon - 1}{8\pi} \mathcal{E}^2$$

oder der Druck eines Gases im elektrischen Felde ist

$$p = p_0 - \frac{\epsilon - 1}{8\pi} \mathcal{E}^2. \quad (159)$$

Dieser Effekt ist außerordentlich klein, einmal weil  $\epsilon$  für Gase sehr gering ist (für Luft ist  $\epsilon - 1 = 0,0006$ ) und dann weil  $\mathcal{E}$  in Gasen nur niedrige Werte erreicht. Da zwischen Elektroden, die um 1 cm auseinander stehen, Luft von Atmosphärendruck bereits bei einer Potentialdifferenz von etwa 100 elektrostatischen Einheiten durchschlagen wird, so wäre für Luft von Atmosphärendruck 100 der Maximalwert, den  $\mathcal{E}$  erreichen kann. Daraus ergibt sich  $p_0 - p = \frac{3}{4\pi} \frac{\text{Dynen}}{\text{cm}^2}$ . Da eine

Atmosphäre angenähert  $= 10^6 \frac{\text{Dynen}}{\text{cm}^2}$  ist, so entspricht die maximale

Druckänderung der Luft durch Elektrostriktion bei normalem Druck nur  $0,24 \times 10^{-6}$  Atmosphären oder 0,00018 mm Quecksilber. Trotz der Geringfügigkeit dieser Wirkung ist es R. Gans<sup>4)</sup> gelungen, das Vorhandensein eines Effektes von dieser Größenordnung für Luft und Kohlensäure nachzuweisen. Da mit höherem Drucke das Entladungspotential proportional dem Drucke wächst<sup>5)</sup>, also auch  $\mathcal{E}_{\text{max}}$ , desgleichen  $\epsilon - 1$  mit dem Druck proportional ist, so würde die größte erreichbare Elektrostriktionswirkung in den Gasen mit der dritten Potenz des Druckes

<sup>1)</sup> Dies ist das Wahrscheinlichere und ist von F. Ratz an einigen Flüssigkeiten nachgewiesen worden. Zeitschr. f. phys. Chem. **19**, S. 86, 1896.

<sup>2)</sup> Vgl. hierüber Winkelmanns Handbuch, 2. Aufl. **4**, S. 167, 1905.

<sup>3)</sup> L. Boltzmann, Pogg. Ann. **155**, S. 407, 1873.

<sup>4)</sup> R. Gans, Ann. d. Phys. **11**, S. 797, 1903.

<sup>5)</sup> M. Wolf, Wied. Ann **37**, S. 306, 1889.

zunehmen, würde sich also für höheren Druck, als Differenz gegen den Druck eines ebenso stark komprimierten, aber nicht elektrisierten Gases, genauer als bei Atmosphärendruck nachweisen lassen.

Bei den festen Körpern liegen die Verhältnisse komplizierter, weil hier die Spannungen nach verschiedenen Richtungen verschieden sind. Unsere Formel für  $p_i$  stellt dann die Elektrostriktionskraft dar, die durch die Elektrisierung in Richtung der elektrischen Kraftlinien erzeugt wird. Sie würde also, wenn  $l$  die Länge,  $\delta l$  die Verlängerung des Mediums in Richtung der Kraftlinien darstellt, unter der obigen Voraussetzung der Unveränderlichkeit der zu dieser Richtung senkrechten Dimensionen, den Wert haben:

$$p_i = \frac{1}{8\pi} \mathcal{E}^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial l} l, \quad (160)$$

oder, wenn man mit  $\partial \lambda$  die relative Verlängerung  $\delta l/l$  bezeichnet, auf die es für die Veränderlichkeit von  $\varepsilon$  ja allein ankommt:

$$p_i = \frac{1}{8\pi} \mathcal{E}^2 \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \lambda} \right)_i, \quad (161)$$

wobei der Index  $i$  bedeuten soll, daß diejenige Veränderlichkeit von  $\varepsilon$  gemeint ist, die durch eine Verlängerung in Richtung der Kraftlinien bewirkt wird.

Man kann aber einen entsprechenden Kreisprozeß auch mit einer Verlängerung senkrecht zu den Kraftlinien durchführen, wobei man den Körper wieder in den zur Dehnung senkrechten Richtungen als unverändert annimmt, und erhält eine in dieser Richtung wirkende Elektrostriktionskraft

$$p_s = \frac{1}{8\pi} \mathcal{E}^2 \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \lambda} \right)_s. \quad (162)$$

Die beiden Größen  $\left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \lambda} \right)_i$  und  $\left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \lambda} \right)_s$  werden im allgemeinen für

feste Körper verschiedene Werte haben und zwei charakteristische Konstanten bzw. Funktionen für jedes feste Material darstellen. Die durch die Elektrostriktionskraft allein — ohne Berücksichtigung der elektrostatischen Oberflächendrucke — hervorgerufene Verlängerung berechnet sich nach der Formel

$$\delta l = \frac{p_i l}{E^*} = \frac{1}{8\pi} \frac{\mathcal{E}^2 l}{E^*} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \lambda} \right)_i, \quad (163)$$

wenn  $E^*$  den elastischen Dehnungswiderstand des Isolators bedeutet. Da nun aber bei einer Elektrisierung immer beide Kräfte  $p_i$  und  $p_s$  auftreten und jede Verlängerung durch einen einseitigen Zug mit



einer Querkontraktion verknüpft ist, so gehen im allgemeinen beide Konstanten in die Formel für die auftretenden Deformationen ein. Ueber die komplizierteren Gleichungen, welche die Wirkungen des elektrostatischen Druckes und der Elektrostriktionskräfte bei den von Quincke und von Wüllner und M. Wien untersuchten Kugel- oder Zylinderkondensatoren darstellen, muß auf die Originalarbeiten von G. Kirchhoff und von P. Sacerdote verwiesen werden<sup>1)</sup>.

## 48. Umkehrbare Temperaturänderungen durch Elektrisierung.

Von den gleichen energetischen Gesichtspunkten aus, wie sie im vorigen Abschnitt angewandt wurden, kann man auch beweisen, daß durch die Elektrisierung eines Dielektrikums seine Temperatur geändert werden muß, wenn seine Dielektrizitätskonstante sich mit der Temperatur ändert. Der einfache Kreisprozeß, dessen wir uns im vorigen Abschnitt bedient haben, setzte voraus, daß bei den betrachteten Vorgängen keine Temperaturänderungen und Wärmeumsetzungen stattfänden. Hier würde ein Kreisprozeß zu betrachten sein, der zwischen verschiedenen Temperaturen spielt. Er muß umkehrbar sein, um beide Hauptsätze der Thermodynamik auf ihn anwenden zu können. In dieser Form ist die Beweisführung umständlich. Man kann aber auf Grund der im vorigen Abschnitt aufgestellten Ausdrücke für die äußere Arbeit die Rechnung nach den bekannten Regeln der Thermodynamik einfacher in folgender Weise ausführen.

Wir wollen annehmen, daß die Dielektrizitätskonstante des Körpers nur von der Temperatur, nicht vom Volumen abhängt, daß also die Elektrostriktionskräfte dieses Mal gleich Null wären. Außerdem wollen wir die Aenderungen vernachlässigen, die das Volumen des Dielektrikums durch Aenderungen des Druckes, also auch durch die Aenderungen der elektrostatischen Druckkräfte, die auf seine Oberfläche wirken, erfahren könnte; sie sind geringfügig neben den Aenderungen des Volumens durch die Temperatur. Das Dielektrikum soll, wie im vorigen Abschnitt, in Form einer Platte in einem Kondensator elektrisiert werden. Die Aenderungen, die wir mit dem Dielektrikum vornehmen, sollen einerseits in einer Veränderung seiner Elektrisierung durch Verbringen aus dem Feld  $\mathfrak{E}_0$  in das Feld  $\mathfrak{E}_0 + d\mathfrak{E}_0$  bestehen; um dabei die Tempe-

<sup>1)</sup> G. Kirchhoff, Wied. Ann. **24**, S. 70, 1888. P. Sacerdote, Journ. d. Phys. (3) **8**, S. 464, 1899. Man vgl. auch F. Pockels, Enzykl. d. math. Wiss. **V**, 2, S. 362 ff., wo sich auch die weitere Literatur angeben findet. Das Experiment vgl. siehe bei

ratur konstant zu halten, wird eine Wärmemenge  $q_1 d\mathfrak{E}_0$  dem Dielektrikum zugeführt werden müssen. Zweitens soll in konstantem Feld die Temperatur um  $dT$  gesteigert werden, wozu eine Wärmezufuhr  $q_2 dT$  erforderlich sei. Die gesamte zugeführte Wärme ist dann:

$$dQ = q_1 d\mathfrak{E}_0 + q_2 dT. \quad (164)$$

Bei dem ersten Prozeß wird eine Arbeit gewonnen, die, wenn sich das Dielektrikum durch die elektrischen Kräfte nicht ausdehnt, nur durch die Verminderung der elektrischen Energie infolge der Verschiebung des Dielektrikums gemessen wird, also durch

$$\frac{1}{8\pi} \cdot \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} v d(\mathfrak{E}_0^2).$$

Dehnt sich bei der Temperaturerhöhung das Volumen aus um  $\frac{dv}{dT} dT$ , so wird eine Arbeit  $p dv$  gewonnen, wenn  $p$  den Druck bedeutet, unter dem das Dielektrikum steht. Also ist die ganze gewonnene Arbeit:

$$\begin{aligned} dW &= a_1 d\mathfrak{E}_0 + a_2 dT \\ &= \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} v \mathfrak{E}_0 d\mathfrak{E}_0 + p \frac{dv}{dT} dT. \end{aligned} \quad (165)$$

Nach dem ersten Hauptsatze muß  $dQ - dW$  ein vollständiges Differential sein, also:

$$\frac{\partial}{\partial T} (q_1 - a_1) = \frac{\partial}{\partial \mathfrak{E}_0} (q_2 - a_2).$$

Das ergibt die Gleichung:

$$\frac{\partial q_1}{\partial T} - \frac{\partial q_2}{\partial \mathfrak{E}_0} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \mathfrak{E}_0 \frac{\partial v}{\partial T} + \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{v \mathfrak{E}_0}{\varepsilon^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} - \frac{\partial v}{\partial T} \cdot \frac{\partial p}{\partial \mathfrak{E}_0}. \quad (166)$$

Nach dem zweiten Hauptsatze muß  $dQ/T$  ein vollständiges Differential sein; das ergibt die Gleichung:

$$\frac{\partial q_1}{\partial T} - \frac{\partial q_2}{\partial \mathfrak{E}_0} = \frac{q_1}{T}.$$

Die Vereinigung beider Gleichungen führt dann nach Art der bekannten Clapeyronschen oder Thomsonschen Gleichung der Thermodynamik zu der Beziehung:

$$q_1 = \frac{T}{4\pi} \cdot \frac{v \mathfrak{E}_0}{\varepsilon^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} + \left( \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \mathfrak{E}_0 - \frac{\partial p}{\partial \mathfrak{E}_0} \right) T \frac{\partial v}{\partial T}. \quad (167)$$

Nun hängt  $p$ , auch wenn wir, wie angenommen, von Elektrostriktionskräften absehen, doch insofern von  $\mathfrak{E}_0$  ab, als mit der Elektrisierung der elektrostatische Oberflächendruck steigt. Richtet man es so ein, daß die Ausdehnung des Dielektrikums bei der Erwärmung in Richtung der elektrischen Kraftlinien erfolgt, was sich bei Flüssigkeiten und Gasen ohne

weiteres verwirklichen läßt, so leistet der elektrostatische Druck die Arbeit (siehe den vorigen Abschnitt)  $\frac{1}{8\pi} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \mathfrak{E}_0^2 dv$ . Also ist

$$\frac{\partial p}{\partial \mathfrak{E}_0} = \frac{1}{4\pi} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \mathfrak{E}_0$$

und der Ausdruck in der Klammer wird null. Die bei einer Steigerung des Feldes um  $d\mathfrak{E}_0$  zur Konstanthaltung der Temperatur erforderliche Wärme ist also unter der gemachten Annahme:

$$\Delta Q = q_1 d\mathfrak{E}_0 = \frac{T}{4\pi} \frac{v \mathfrak{E}_0}{\varepsilon^2} d\mathfrak{E}_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial T}$$

oder

$$\Delta Q = \frac{T}{8\pi} v d(\mathfrak{E}^2) \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \quad (168)$$

wenn  $\mathfrak{E}$  wieder die elektrische Kraft im Innern des Dielektrikums bedeutet. Dabei ist unter  $T$  die absolute Temperatur zu verstehen und die Wärmemenge  $\Delta Q$  in mechanischem Maße gemessen zu denken. Formel (168) ist von J. J. Thomson <sup>1)</sup> aufgestellt worden.

Wenn dem Körper bei der Elektrisierung keine Wärme zugeführt wird, so folgt aus der Gleichung  $dQ = 0$  (nach 164):

$$q_1 d\mathfrak{E}_0 = -q_2 dT$$

oder

$$dT = -\frac{q_1}{q_2} d\mathfrak{E}_0. \quad (169)$$

Dabei ist unter  $q_2$  die Wärmemenge zu verstehen, die dem Körper bei konstanter Elektrisierung zugeführt werden muß, um seine Temperatur um  $dT$  zu erhöhen. Ist  $\rho$  die Dichtigkeit des Dielektrikums und  $C$  seine spezifische Wärme bei konstanter Elektrisierung, so ist

$$q_2 = C\rho v \text{ in kalorischem Maße} \quad (170)$$

oder

$$q_2 = CA\rho v \text{ in mechanischem Maße,}$$

wenn  $A$  das mechanische Wärmeäquivalent bedeutet. Also ist die bei der Steigerung der Elektrisierung eintretende Temperaturänderung

$$dT = -\frac{T}{8\pi AC\rho} d(\mathfrak{E}^2) \frac{d\varepsilon}{dT}. \quad (171)$$

Nimmt  $\varepsilon$  mit der Temperatur zu, so sinkt beim Elektrisieren die Temperatur; sie steigt, wenn  $\varepsilon$  mit steigender Temperatur abnimmt.

Ersteres ist nach J. J. Thomson der Fall bei Glas, Glimmer, Ebonit. Diese Stoffe werden sich also bei einer Elektrisierung abkühlen. Bei Flüssigkeiten dagegen nimmt die Dielektrizitätskonstante mit wach-

<sup>1)</sup> J. J. Thomson, Anwendungen der Dynamik auf Physik und Chemie. Leipzig, G. Engel 1890, S. 123—125.

sender Temperatur ab; sie werden sich daher bei einer Elektrisierung erwärmen. Doch sind die Effekte in allen Fällen außerordentlich klein. Beobachtungen darüber liegen noch nicht vor.

Auch bei Gasen nimmt die Dielektrizitätskonstante mit steigender Temperatur ab. Für sie ist

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial T} = - \frac{\epsilon - 1}{T} \quad (172)$$

zu setzen. Dieser Ausdruck in (171) eingesetzt führt zu einer Formel für die Temperaturzunahme, die ein Gas durch Elektrisierung erfahren würde. Bei der Ableitung dieser Formel ist aber, wie ausdrücklich hervorgehoben, die durch Elektrostriktionswirkung im Gase hervorgerufene Druckänderung nicht berücksichtigt. Wollte man diese auf Grund der Berechnungen des vorigen Abschnittes in der Formel (167) mitberücksichtigen, so würde sich für  $q_1$  und entsprechend für die durch Elektrisierung eintretende Temperaturänderung der Gase der Wert Null ergeben.

## 49. Dielektrische Hysteresis.

Eine sehr merkwürdige Erscheinung hat G. Quincke<sup>1)</sup> beobachtet. Kugeln aus einem festen Dielektrikum, an einem feinen Faden in einer dielektrischen Flüssigkeit aufgehängt, kamen in einem elektrischen Felde in lang anhaltende Rotation. Nach Heydweiller<sup>2)</sup> beruht die Erscheinung auf einer schwachen Leitfähigkeit der Flüssigkeit, die der Oberfläche der dielektrischen Kugel Ladungen zuführt, dadurch einen zufällig vorhandenen Drehungsantrieb nach der einen oder anderen Richtung verstärkt und dauernd in Gang erhält. Eine Rechnung hat E. v. Schweidler<sup>3)</sup> darüber angestellt. Auch in Luft können diese Drehungen eintreten, wenn sie durch Röntgenstrahlen leitend gemacht wird, wie Graetz<sup>4)</sup> nachgewiesen hat.

Andererseits kann man Anordnungen treffen, bei welchen die elektrischen Kraftlinien rotieren. Hängt man in ein solches elektrisches Drehfeld ein Dielektrikum in Form eines Rotationskörpers, dessen Achse senkrecht zu den elektrischen Kraftlinien steht, so ist zuweilen eine Rotation des Körpers um diese seine Achse zu beobachten<sup>5)</sup>. Diese Erscheinung kann nur durch die Eigenschaft der dielektrischen Nachwirkung erklärt werden, die wir oben bereits erwähnt haben. Diese Nachwir-

<sup>1)</sup> G. Quincke, Wied. Ann. **59**, S. 476, 1896.

<sup>2)</sup> L. Heydweiller, Verh. Phys. Ges. **16**, S. 32, 1897.

<sup>3)</sup> E. v. Schweidler, Wien. Ber. **106**, S. 526, 1897.

<sup>4)</sup> F. Graetz, Wied. Ann. **1**, S. 520 u. 548, 1900.

kung, d. h. ein zeitliches Nachhinken der Polarisation des Dielektrikums hinter der polarisierenden Feldstärke, bezeichnet man wohl auch als dielektrische Hysteresis, jedoch in genauerer Unterscheidung als viskose Hysteresis im Gegensatz zu der reinen Hysteresis, einer von der Zeit unabhängigen Nachwirkungserscheinung, die wir beim Magnetismus genauer kennen lernen werden. Bei Dielektriken dürfte es sich immer um eine viskose Hysteresis handeln<sup>1)</sup>. Das Drehungsmoment, welches der Körper im elektrischen Drehfelde erfährt, kann zur Messung seiner dielektrischen Hysteresis verwandt werden<sup>2)</sup>.

Zeigt ein Isolator dielektrische Hysteresis, so muß er bei der Elektrisierung außer der im vorigen Abschnitt behandelten umkehrbaren Temperaturänderung noch eine nicht umkehrbare erfahren. Bei einem elektrischen Kreisprozeß, d. h. bei Ladung und darauffolgender Entladung des Kondensators, in dessen Feld sich der Isolator befindet, wird die umkehrbare Temperaturänderung völlig rückgängig gemacht; die dielektrische Hysteresis aber bedingt einen Ueberschuß von Wärme, die bei diesem Kreisprozeß im Körper erzeugt wird. Bei rasch folgenden Ladungen und Entladungen wird also das Dielektrikum in diesem Falle eine Temperaturzunahme zeigen. Eine solche ist zuerst von W. Siemens<sup>3)</sup> beobachtet, später von einer Reihe von Forschern<sup>4)</sup> untersucht worden. Die Erscheinungen der Hysteresis spielen im Magnetismus eine viel größere Rolle. Wir werden auf sie in jenem späteren Kapitel eingehen. Die dort durchgeführten Rechnungen sind in analoger Weise auf die Hysteresiswärme der Dielektrika anzuwenden.

<sup>1)</sup> A. Lampa, Wien. Ber. **115**, S. 1659, 1906.

<sup>2)</sup> Die weitere Literatur s. bei Graetz, Winkelmanns Handbuch, 2. Aufl., IV, 1, S. 161; ferner V. v. Lang, Wien. Ber. **116**, S. 975, 1907. — Lampa, Wien. Ber. **116**, S. 987, 1907.

<sup>3)</sup> W. Siemens, Pogg. Ann. **125**, S. 137, 1864.

<sup>4)</sup> Siehe die Literatur bei Graetz an der genannten Stelle, ferner W. Corbino, Phys. Zeitschr. **6**, S. 138, 1905.

## Kapitel II.

# Magnetismus.

---

### 1. Der magnetische Zustand.

Außer dem elektrischen Zustand, den wir in Kapitel I behandelt haben, kennt man seit dem Altertum einen anderen eigentümlichen Zustand, der ebenfalls dadurch charakterisiert ist, daß die Körper in diesem Zustand ponderomotorische Wirkungen aufeinander ausüben. Aber diesen zweiten Zustand nimmt man nur an Körpern aus ganz bestimmtem Material wahr. Man hat ihn zuerst an einem Mineral, dem Magneteisenstein ( $\text{Fe}_3\text{O}_4$ ), kennen gelernt, das diesen Zustand von Natur aus besitzt. Man hat dann aber die Erfahrung gemacht, daß sich dieser Zustand auf gewisse andere Materialien, vor allem auf Stahl, in geringerem Maße auch auf Eisen, übertragen läßt, und zwar dadurch, daß man ein Stück des betreffenden Materials mit einem solchen natürlichen Magneten bestreicht. Heute haben wir ein bequemerer Mittel zur Erregung des magnetischen Zustandes in der Wirkung des galvanischen Stromes. Bringt man ein Stahlstück in die Nähe eines solchen, am besten in das Innere einer von einem Strom durchflossenen Drahtspule, oder leitet man eventuell den Strom durch das Stück selbst hindurch, so zeigt es sich auch nach Entfernen oder Aufhören des Stromes dauernd magnetisiert, was man an den ponderomotorischen Wirkungen erkennen kann, welche das eine Stahlstück auf ein anderes, in ähnlicher Weise behandeltes, ausübt.

Diesen Zustand kann man dem Stahlstück wieder nehmen, indem man den Magneten oder den Strom, mit dessen Hilfe man es magnetisiert hatte, in entgegengesetzter Weise auf das Stahlstück einwirken läßt, oder, einfacher und sicherer, dadurch, daß man das Stahlstück ausglüht. Hat man zwei ausgeglühte Stahlstücke, so üben sie aufeinander keine andere Wirkung aus, als man an aller Materie wahrnimmt. Magnetisiert man sie, so treten starke bewegende Kräfte zwischen ihnen in die Erscheinung. Aber diese Kräfte sind insofern komplizierter als diejenigen elektrostatisch geladener Körper, als sich an jedem magnetisierten Körper Teile finden, von denen anziehende, und andere Teile,

von denen abstoßende Wirkungen auf gewisse Teile des anderen Magneten auszugehen scheinen. Diese beiden Teile eines Magneten voneinander zu trennen, ist nicht möglich. Es ist eine bekannte Tatsache, daß beim Durchbrechen eines Magneten jeder Teil wieder einen ganzen Magneten darstellt, d. h. wieder zwei Teile von entgegengesetzter Wirkungsart aufweist. Man kann diese Teile nur dadurch in eine möglichst große räumliche Entfernung voneinander rücken, daß man den Magneten möglichst lang und dünn macht. Legt man einen Stahlkörper, welcher sehr dünn im Vergleich zu seiner Länge ist -- etwa eine Klaviersaite von 1 mm Durchmesser und 40 cm Länge -- in das Innere einer die Enden der Saite weit überragenden Röhre, um welche ein galvanischer Strom in schraubenförmigen Windungen von kleiner Ganghöhe fließt (ein sog. Solenoid), so ist der Körper nach dem Herausnehmen aus der Röhre in der Weise magnetisiert, daß die Kräfte nur von seinen Enden auszugehen scheinen.

Diese Enden nennt man seine magnetischen Pole. Allgemein verwendet man diese Bezeichnung für diejenigen Stellen eines magnetisierten Körpers, welche der scheinbare Sitz von in die Ferne wirkenden Zentralkräften sind.

Stellt man sich zwei derartige lange, dünne Magnetstäbe her, so kann man angenähert davon sprechen, daß zwei einzelne Pole aufeinander wirken, wenn man die beiden Magnetstücke so einander nähert, daß die Entfernung zweier Pole sehr klein, die der beiden anderen möglichst groß ist. Auf diese Weise kann man dann zunächst feststellen, welche Pole gleichartig, welche ungleichartig sind. Zwei Pole sind gleichartig, wenn sie auf denselben Pol eines dritten Magneten die gleiche, sei es anziehende oder abstoßende, Wirkung ausüben; sie sind ungleichartig, wenn ihre Wirkungen auf denselben Pol entgegengesetzt sind. Hat man dies festgestellt, so ergibt sich aus den Wirkungen der beiden Pole aufeinander, daß gleichartige Pole sich abstoßen, ungleichartige sich anziehen.

Wie man die beiden elektrischen Zustände in ihrer Gegensätzlichkeit durch  $+$  und  $-$  unterschieden hat, so bezeichnet man auch die beiden entgegengesetzten Pole eines Magneten als positive und negative Pole. Dabei ist es zunächst ganz willkürlich gewesen, welchen Pol man den positiven, welchen man den negativen nennen wollte. Aber natürlich müssen immer gleichartige Pole die gleiche Bezeichnung erhalten. Dazu ist erforderlich, jeden Magneten in bezug auf den Charakter seiner Pole an einem Normalmagneten zu prüfen, an dem das Vorzeichen der Pole ein für allemal festgelegt ist. Einen solchen Magneten haben wir in unserer Erde jederzeit zur Verfügung. Unter ihrem Einfluß stellt sich jeder Magnet an einem bestimmten Ort der

Erde in eine bestimmte, nahezu meridionale Richtung ein; es ist nun üblich, dasjenige Ende eines Magneten, das sich nach Norden einstellt, seinen Nordpol, als positiven Pol zu bezeichnen.

## 2. Das magnetische Feld.

Die moderne Anschauung über das Zustandekommen solcher ponderomotorischen Wirkungen haben wir in der Einleitung auseinandergesetzt. Dieselbe Anwendung, die wir in Abschnitt 5 des ersten Kapitels von dieser Anschauung auf die ponderomotorischen Kräfte elektrisch geladener Körper gemacht haben, werden wir nun hier auf diejenigen ponderomotorischen Kräfte zu machen haben, die auf Magnete ausgeübt werden, sei es, daß sie von Magneten oder von elektrischen Strömen hervorgerufen werden. Auch diese Kräfte denken wir uns nach moderner Auffassung durch den Raum hindurch vermittelt, und da auch diese Kräfte nicht bloß in dem von Materie erfüllten, sondern auch im leeren Raum von Magnet oder Strom zu Magnet übertragen werden, so werden wir auch für die Uebertragung dieser Wirkungen wieder den Aether im Sinne der Ausführungen auf S. 4 in Anspruch nehmen müssen. Demnach haben wir dem leeren Raum oder dem Aether eine doppelte Funktion zuzuschreiben und entsprechend zweierlei Arten von Zustandsänderungen anzunehmen, die er erfahren kann, die einen hervorgerufen durch elektrische Ladungen, die anderen durch Magnete und durch elektrische Ströme. Wie wir den Raum, in dem die erste Art von Zustandsänderung besteht, ein elektrostatisches oder elektrisches Feld nennen, so nennen wir einen Raum, in dem die zweite Art von Zustandsänderung vorhanden ist, ein magnetisches Feld oder — in dem besonderen Falle, den wir zunächst betrachten — wenn die Zustandsänderung durch Magnete im gewöhnlichen Sinne, sog. permanente Magnete, hervorgerufen wird, ein magnetostatisches Feld. Beide Felder können sich überlagern; man kann einen Stahlmagneten elektrisch laden und man hat an jeder Stelle des Raumes — und völlig unabhängig voneinander — gleichzeitig das elektrostatische und das magnetische Feld bestehen. Beide Felder aber treten in Wechselbeziehung zueinander, und das eine wird durch das andere erzeugt, sobald die elektrischen Ladungen oder die Magnete bewegt oder zeitlich geändert werden. Diese Beziehungen und Umsetzungen der beiden Felder ineinander werden uns in den Kapiteln über die elektromagnetischen und die Induktionserscheinungen ausführlich beschäftigen. Hier aber möge auf die Tatsache dieser Beziehungen deswegen bereits hingewiesen werden, weil gerade dieser Umstand das Verständnis für die Möglichkeit — ja



man kann sagen, für die Notwendigkeit jener beiden Zustände des Aethers erschließt. Wenn wir vom Standpunkte des Energieprinzipes aus alle Vorgänge in der Natur als Energieumsetzungen betrachten, so müssen wir für die Vorgänge innerhalb des leeren Raumes zum mindesten zwei Energieformen annehmen, die sich gegenseitig ineinander umsetzen können. Die eine dieser Energieformen haben wir als die elektrische Energie des elektrostatischen Feldes bereits kennen gelernt. Ganz analog den Betrachtungen, die uns in Kapitel I zu dieser Auffassung geführt haben, werden wir hier das magnetische Feld als den Sitz einer besonderen Energieform anzusprechen haben, die wir die magnetische Energie nennen werden (das Ausführliche hierüber siehe in Abschnitt 25 dieses Kapitels). Im elektrostatischen und im magnetostatischen Feld treten diese beiden Energieformen gesondert auf als potentielle Energie gewisser statischer Zustände. Alle Veränderungen dieser Zustände, alle Vorgänge im leeren Raum aber bestehen in dem Spiel der Umsetzungen dieser beiden Energieformen ineinander. Wir müssen also dem leeren Raum oder dem Aether außer den Eigenschaften, die ihn als Träger der elektrischen Energie charakterisieren, noch weitere Eigenschaften zuschreiben, die ihn befähigen, auch Träger dieser zweiten Energieform, der magnetischen Energie, zu sein. Diese Eigenschaften lehrt uns das Studium des magnetischen Feldes kennen.

### 3. Die Polstärke.

Um die Verteilung der ponderomotorischen Kräfte in dem magnetischen Feld eines beliebig gegebenen Magneten zu untersuchen, können wir uns das positive Ende eines sehr langen und dünnen Magneten in das Feld hineingeführt und die ponderomotorische Wirkung auf diesen Prüfpol gemessen denken, geradeso wie wir es mit der Prüfkugel im elektrischen Feld gemacht haben. Nur müssen wir, da wir die Pole nicht voneinander trennen können, uns den dünnen Prüfmagneten so lang denken, daß sein anderes Ende gewissermaßen außerhalb des Feldes liegt, d. h. so weit entfernt, daß die auf ihn wirkende Kraft vernachlässigt werden kann. Mit Hilfe dieses Kunstgriffes gelingt es, die Betrachtungsweise der Abschnitte 5 und 6 des ersten Kapitels auf das magnetische Feld zu übertragen. An jeder Stelle des Feldes erfährt der Prüfpol einen Bewegungsantrieb von bestimmter Größe und Richtung. Bringt man den gleichen Pol an verschiedene Stellen des Feldes, so findet man im allgemeinen die Wirkungen verschieden, und sie verändern sich stetig, wenn man den Pol von Punkt zu Punkt durch das Feld bewegt. Bringt man andererseits an dieselbe Stelle des Feldes nacheinander verschiedene Pole, so erhält man im allgemeinen ebenfalls Kräfte von ver-

schiedener Größe. Diese letztere Verschiedenheit schreibt man dem Umstand zu, daß die benutzten Pole verschieden stark waren. Von zwei Polen, die an derselben Stelle eines magnetischen Feldes den gleichen Bewegungsantrieb erfahren, sagt man, daß sie die gleiche Polstärke hätten.

Die ponderomotorischen Wirkungen entstehen durch die Ueber-einanderlagerung der beiden Felder, des zu untersuchenden und des Feldes, das der eingeführte Prüfpole um sich herum erzeugt. Wir wollen nun die Betrachtungen des Abschnittes 5 des ersten Kapitels auf das magnetische Feld und die Prüfpole übertragen und wollen uns die Prüfpole stets so schwach denken, daß sie das zu untersuchende Feld nur in ihrer nächsten Umgebung ändern, daß wir also die Veränderungen des gegebenen Feldes in größeren Abständen von dem Prüfpole vernachlässigen können. Wir haben dann wieder den Vorteil, die ponderomotorische Kraft als Wechselwirkung des Prüfpoles mit einer bestimmten Stelle des gegebenen magnetischen Feldes auffassen zu dürfen, und wir können den Betrag der ponderomotorischen Kraft durch ein Produkt von zwei Faktoren ausdrücken, von denen der eine nur von der Eigenschaft des Feldes an der betreffenden Stelle, der andere nur von der Eigenschaft des benutzten Prüfpoles abhängt. Diese Zerlegung beruht allerdings noch auf der weiteren Voraussetzung, daß die Polstärke des Prüfpoles sich nicht ändert, wenn der Pol in ein magnetisches Feld gebracht wird. Die entsprechende Voraussetzung auf elektrischem Gebiet war ohne weiteres erfüllt, sobald wir uns die geladene Prüfkugel isoliert dachten; dann ist die wahre Ladung der Kugel unveränderlich und ganz unabhängig von dem Feld, in das man die Prüfkugel bringt. Für die Polstärke unserer Prüfmagnete gilt das aber nicht. Wir werden im Gegenteil bei der speziellen Theorie der permanenten Magnete die Tatsache zu behandeln haben, daß sich die Polstärke solcher Magnete in einem magnetischen Felde ändert, wobei diese Wirkung abhängt von der Lage des Magneten zur Richtung der Kraft des Feldes.

Die Ausmessung magnetischer Felder mit Hilfe von Prüfpolen oder Prüfmagneten ist also in Wirklichkeit kein so einfaches Problem, wie die entsprechenden Aufgaben der Elektrostatik. Man hat es aus diesem Grunde in neueren Darstellungen häufig vorgezogen, bei der Ableitung der Eigenschaften magnetischer Felder nicht die Ausmessung durch permanente Magnete, sondern die Ausmessung durch Induktionsspulen zugrunde zu legen<sup>1)</sup>. Wir wollen uns in diesem Buche an den Gedankengang halten, wie er sich historisch entwickelt hat; er hat den Vorzug, die Fundamentalbegriffe des Magnetismus so zu entwickeln, wie sie als Grundlage des magneti-

<sup>1)</sup> So bei Abraham-Föppl, Theorie der Elektrizität, Bd. I, bei R. Gans, Einführung in die Theorie des Magnetismus. Teubner, 1908.

schen Maßsystems benutzt werden. Wir wollen also die Prüfmagnete als streng permanente Magnete auffassen, deren magnetische Eigenschaften durch das magnetische Feld, in dem sie sich befinden, nicht geändert werden sollen; aber wir wollen uns von vornherein bewußt bleiben, daß dies ein Idealfall ist, der in Wirklichkeit nicht vorkommt, und daß bei der Ausführung magnetischer Messungen an den auf jenem Wege gewonnenen Formeln Korrekturen anzubringen sind, die der Veränderlichkeit der magnetischen Größen mit dem Felde Rechnung tragen<sup>1)</sup>.

Unter den nunmehr festgelegten Voraussetzungen werden sich für verschiedene Prüfpole an derselben Stelle eines magnetischen Feldes ponderomotorische Kräfte ergeben, deren Verhältnis ganz unabhängig von dem benutzten Felde sein wird. Das Verhältnis dieser Kräfte gibt uns das Verhältnis der Polstärken, und die Messung der ponderomotorischen Kräfte an einer und derselben Stelle eines magnetischen Feldes gibt uns also die Möglichkeit, Polstärken miteinander zu vergleichen. Wählen wir schließlich eine gewisse Polstärke als Einheit, so können wir nach diesem Verfahren alle übrigen Polstärken in Bruchteilen oder Vielfachen dieser Einheit ausdrücken. Die so gemessenen Polstärken wollen wir mit  $m$  bezeichnen und wollen dabei über die Wahl der Einheit zunächst keine Festsetzungen machen. Wie man zur Aufstellung einer absoluten Einheit der Polstärke kommen kann, werden wir in Abschnitt 10 sehen.

#### 4. Die magnetische Kraft.

Die ponderomotorische Kraft  $\mathfrak{F}$ , die an einer bestimmten Stelle eines magnetischen Feldes auf einen Prüfpol von der Stärke  $m$  wirkt, ist nach den Ausführungen des vorigen Abschnittes der Polstärke  $m$  proportional. Der Proportionalitätsfaktor oder das Verhältnis  $\mathfrak{F}/m$  — noch genauer: der Grenzwert, dem sich dieses Verhältnis nähert, wenn man  $m$  immer kleiner werden läßt — charakterisiert alsdann diejenige Eigenschaft des magnetischen Feldes, von der die Größe der ponderomotorischen Wirkung an der betreffenden Stelle abhängt. Wir nennen sie die Intensität oder die Feldstärke des magnetischen Feldes oder die magnetische Kraft. Sie ist ein Vektor, d. h. sie hat an jeder Stelle des Feldes eine bestimmte Größe und eine bestimmte Richtung, und zwar ist man übereingekommen, als positive Richtung der magnetischen Kraft immer die Richtung der ponderomotorischen Kraft zu nehmen, die das Feld auf einen positiven Prüfpol ausüben

<sup>1)</sup> Siehe über derartige Korrektionsformeln: F. Kohlrausch, Lehrbuch der praktischen Physik, 11. Aufl., S. 377 u. 517.

würde. Für einen negativen Prüfpol würde die Richtung der Kraft natürlich genau entgegengesetzt sein. Die so definierte magnetische Kraft soll im folgenden immer durch  $\mathfrak{H}$ , ihre Komponenten nach den Koordinatenachsen durch  $\mathfrak{H}_x$ ,  $\mathfrak{H}_y$ ,  $\mathfrak{H}_z$  bezeichnet werden. Es ist also

$$\mathfrak{H} = \frac{\mathfrak{F}}{m} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{F} = m \cdot \mathfrak{H}. \quad (1)$$

Entsprechend dieser Festsetzung pflegt man — nicht ganz streng — als Maß der magnetischen Kraft in einem bestimmten Feldpunkte P diejenige ponderomotorische Kraft zu definieren, welche ein in P befindlicher Prüfpol von der Polstärke +1 erfahren würde.

Es ist klar, daß sich das dieser Definition zugrunde liegende Messungsprinzip in der angegebenen Form im allgemeinen nicht verwirklichen läßt wegen der Unmöglichkeit, einen einzelnen Pol zu isolieren. Ein größeres Feld, z. B. das erdmagnetische, kann man nur durch seine Wirkung auf einen ganzen Magneten untersuchen. Wir müssen also zunächst diese erörtern.

## 5. Die Summe der Polstärken eines Magneten ist Null.

Wenn man anstatt des positiven den negativen Pol eines Prüfmagneten an dieselbe Stelle eines magnetischen Feldes bringt, so erhält man die Kräfte in den beiden Fällen zwar von entgegengesetzter Richtung, numerisch aber von genau gleichem Betrage. Daraus folgt, daß der absolute Wert der Polstärken der beiden Enden des Prüfmagneten gleich sein muß. Bezeichnet man die Polstärken eines magnetisierten Drahtes mit  $m$  und  $m'$  und trägt ihrem entgegengesetzten Charakter Rechnung durch die Vorzeichen + und –, so drückt sich obige Tatsache unter Berücksichtigung der Vorzeichen durch die Formel aus:

$$m + m' = 0,$$

d. h. die Summe der Polstärken ist Null.

Dieser Satz ist an den Erfahrungen gewonnen, die man mit den langen Stahldrähten machen kann, wenn man sie in der in Abschnitt 1 angegebenen Weise magnetisiert. Bricht man den Draht in kleinere Stückchen, so zeigt jedes derselben wiederum magnetische Eigenschaften in ganz ähnlicher Weise wie der ursprüngliche ganze Draht. Die Enden jedes Stückchens bilden magnetische Pole; wegen der Kürze der Stücke aber läßt sich jetzt die Wirkung eines Feldes auf den einzelnen Pol nicht mehr messen.

Wohl aber kann man auch in diesem Falle, d. h. wenn ein solcher kurzer Magnet in einem magnetischen Felde, etwa in der axialen Verlängerung eines anderen, längeren Magneten liegt, durch Kraftmessung

unmittelbar feststellen, daß die resultierende ponderomotorische Kraft ihr Vorzeichen wechselt, aber dem absoluten Werte nach konstant bleibt, wenn man den kürzeren Magneten um  $180^\circ$  so dreht, daß seine beiden Enden ihre Lage zu dem langen Magneten gerade vertauschen. Hieraus ist sofort zu schließen, daß auch in dem kurzen Magneten die Summe seiner Polstärken Null ist. Diesen Satz kann man auch aus der Beobachtung ableiten, daß das Gewicht eines Stahlstückes sich durch Magnetisierung nicht ändert. Seine beiden Pole erfahren daher in dem gleichförmigen Magnetfelde der Erde gleiche Anziehung und Abstoßung.

Dieselben Beobachtungen könnte man machen, so weit man auch die Zerkleinerung eines Magneten triebe. Hieraus ist zu schließen, daß in jedem auch noch so kleinen Magneten, d. h. auch in jedem Volumelement eines Magneten die Summe der Polstärken den Wert Null ergibt.

## 6. Das magnetische Moment eines Magneten.

Bringt man eine kurze Magnetnadel, die so dünn sei, daß man ihre Enden als ihre Pole ansehen kann, in ein homogenes magnetisches Feld, d. h. in einen Raum, in dem die magnetische Kraft nach Größe und Richtung konstant ist, so wirken auf die Enden der Nadel gleiche, aber entgegengesetzte Kräfte, die die Nadel nicht fortzubewegen, sondern nur in die Richtung der magnetischen Kraft hinein zu drehen suchen. Ist  $\psi$  der Winkel zwischen der Längsrichtung der Nadel und der Richtung der magnetischen Kraft, so ist das Drehungsmoment, das die Nadel erfährt:

$$D \sin \psi = \mathfrak{G} m l \sin \psi,$$

wenn  $m$  und  $l$  Polstärke und Länge der Nadel oder Polabstand bedeuten. Lenkt man die Nadel aus der Richtung der magnetischen Kraft, in die sie sich bei freier Beweglichkeit einstellt, ab und läßt sie dann los, so vollführt sie Schwingungen um diese Lage herum, deren Dauer  $T$  nach bekannten mechanischen Prinzipien durch die Formel

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{K}{D}}$$

bestimmt ist, in der  $K$  das Trägheitsmoment,  $D$  die Direktionskraft  $\mathfrak{G} m l$  bedeutet. Die Größe  $m l$  nennt man das magnetische Moment der Nadel. Wir wollen es mit  $\mathfrak{M}$  bezeichnen.

Dieselbe Beobachtung, die wir hier für eine dünne Magnetnadel beschrieben haben, macht man an jedem beliebig gestalteten Magneten, wenn man ihn in ein homogenes magnetisches Feld bringt. Immer kann man, indem man den Magneten um verschieden gerichtete Achsen

drehbar macht, eine bestimmte Richtung innerhalb des Magneten feststellen, mit der sich der Magnet in die Richtung der magnetischen Kraft des umgebenden Feldes einzustellen sucht — diese Richtung nennt man seine magnetische Achse — und immer führt er um die Gleichgewichtslage, in die er sich einzustellen sucht, Schwingungen aus, deren Dauer nach obiger Formel durch ein Direktionsmoment  $D$  bestimmt ist, das als ein Produkt der Feldstärke  $\mathfrak{G}$  mit einer für den Magneten charakteristischen Größe  $\mathfrak{M}$  dargestellt werden kann. Diese Größe  $\mathfrak{M}$  nennt man das magnetische Moment des Magneten. Sie läßt sich für einen Magneten von beliebiger Gestalt nicht in der einfachen Form  $m l$  ausdrücken, da die Kraftwirkungen im allgemeinen Falle nicht von scharf definierten Punkten ausgehen, wie es die Pole langer dünner Nadeln sind. Aber sie ist eine für jeden Magneten charakteristische Größe, die maßgebend ist für die mechanischen Wirkungen, die der Magnet seitens eines homogenen Feldes erfährt. Man kann die magnetischen Momente verschiedener Magnete ( $\mathfrak{M}_1$  und  $\mathfrak{M}_2$ ) miteinander vergleichen, indem man sie unter dem Einfluß desselben Feldes schwingen läßt und ihre Schwingungsdauern ( $T_1$  und  $T_2$ ) und ihre Trägheitsmomente ( $K_1$  und  $K_2$ ) ermittelt:

$$\frac{\mathfrak{M}_1}{\mathfrak{M}_2} = \frac{K_1}{T_1^2} : \frac{K_2}{T_2^2}.$$

Und man kann umgekehrt mit Hilfe eines einzelnen Magneten die Feldstärken verschiedener Felder oder an verschiedenen Stellen eines Feldes vergleichen, nach der Formel:

$$\frac{\mathfrak{G}_1}{\mathfrak{G}_2} = \frac{T_2^2}{T_1^2},$$

wenn man bei nichthomogenen Feldern dafür sorgt, daß der Magnet klein ist gegenüber der lokalen Veränderlichkeit des Feldes, damit der Raum, in dem er schwingt, in erster Annäherung als ein homogenes Feld betrachtet werden kann.

Auf den in diesem Abschnitt dargelegten Prinzipien beruhen die magnetischen Meßmethoden und die Festlegung magnetischer Größen im absoluten Maßsystem, worüber Abschnitt 15 ausführlicher handeln wird.

## 7. Magnetische Kraftlinien.

Eine kleine Magnetnadel ist das bequemste Mittel zur Untersuchung eines magnetischen Feldes. Sie stellt sich an jeder Stelle des Feldes in die Richtung der daselbst herrschenden magnetischen Kraft. Schreitet man von Punkt zu Punkt immer in der Richtung, die die Nadel anzeigt, fort, so beschreibt man eine Bahn, deren Tangente in jedem Punkt

mit der Richtung der magnetischen Kraft zusammenfällt, eine magnetische Kraftlinie. Analog dem Verfahren, das wir für das elektrische Feld in Kapitel I, Abschnitt 7 kennen gelernt haben, kann man die Gestalt der Kraftlinien eines magnetischen Feldes in bequemer Weise dadurch ermitteln, daß man Eisenfeilspäne in dasselbe bringt, während man sie der Wirkung der Schwere entzieht, z. B. durch Aufstreuen auf einen horizontalen Papierschirm. Da, wie wir später sehen werden, die Eisenteilchen im magnetischen Felde selbst zu Magneten werden, deren Pole in Richtung der Kraftlinien liegen, so ordnen sich die Späne in der Richtung derselben an infolge der Anziehung der ungleichnamigen Pole, welche zwei benachbarte Eisenstückchen einander zuwenden.

## 8. Potential und erstes Differentialgesetz der magnetischen Kraft.

Wir untersuchen zunächst das magnetische Feld eines permanenten Magneten im leeren Raum. Mit dem Prüfpole können wir die gleichen Versuche ausgeführt denken, wie im elektrischen Felde mit der Prüfkugel. Wir können wie in Kapitel I, Abschnitt 8 die Arbeit messen, die bei Verschiebung des Prüfpoles gewonnen wird oder aufgewandt werden muß, und wie im elektrischen Felde lehrt auch hier die Erfahrung, daß zwischen zwei Punkten des Feldes die Arbeit unabhängig vom Wege ist, oder daß das Linienintegral der magnetischen Kraft, genommen über eine geschlossene Linie, die ganz innerhalb des Feldes verläuft, also nirgends den vom Magneten selber eingenommenen Raum durchschneidet, gleich Null ist:

$$\oint \mathfrak{H}_e \, dl = 0. \quad (2)$$

Daraus folgt, daß auch die magnetische Kraft in diesem Felde ein Potential hat, d. h. daß die Komponenten der magnetischen Kraft sich als die negativ genommenen Ableitungen einer Funktion  $\varphi$  darstellen lassen:

$$\mathfrak{H}_x = - \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \mathfrak{H}_y = - \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \mathfrak{H}_z = - \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (3)$$

oder daß für die magnetische Kraft das gleiche Differentialgesetz gilt, wie für die elektrische Kraft:

$$\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y} = \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z} = \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x} = \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial z} \quad {}^1). \quad (4)$$

Das magnetische Feld, das einen permanenten Magneten umgibt, ist also wirbelfrei (siehe Kapitel I, Abschnitt 11).

<sup>1)</sup> Vektoranalytisch:  $\mathfrak{H} = - \text{grad } \varphi$  und  $\text{rot } \mathfrak{H} = 0$ .

## 9. Kraftfluß und zweites Differentialgesetz der magnetischen Kraft.

In der Elektrostatik haben wir durch eine zweite Art der Untersuchung des elektrischen Feldes, nämlich durch die Influenzversuche mit der Maxwellschen Doppelplatte (Abschnitt 13 des ersten Kapitels) den Begriff des Kraftflusses und das zweite Differentialgesetz der elektrischen Kraft abgeleitet. Zu diesem Versuche läßt sich im Gebiete des reinen Magnetismus oder der Magnetostatik kein Parallelversuch ausführen. Der Grund dafür liegt darin, daß es keine magnetischen Leiter gibt. Alle Stoffe werden vom magnetischen Felde beeinflusst nur in der Art, wie die Dielektrika von einem elektrischen Felde; keine zeigen hier die Eigenschaften der Leiter. Daher sind Influenzversuche mit körperlicher Trennung der beiden Magnetismen nicht möglich. Dagegen können wir, wenn wir aus dem Gebiet der reinen Magnetostatik herausgehen und Versuche aus dem Gebiet der Induktionerscheinungen heranziehen, die bereits in Abschnitt 3 erwähnten Versuche der Ausmessung eines magnetischen Feldes mit Hilfe einer Induktionsspule in unmittelbare Parallele zu jenem Influenzversuche setzen. Denn nach der bekannten Formulierung des Induktionsgesetzes, die wir in Kapitel V, Abschnitt 6 genauer besprechen werden, ist für die in einer Spule bei ihrer Bewegung im Magnetfelde durch die Induktion erzeugte elektromotorische Kraft maßgebend die zeitliche Aenderung des ganzen durch die Fläche der Spule hindurchgehenden Kraftflusses, d. h. des Produktes der Fläche der Spule mit der zur Fläche senkrecht stehenden Komponente der magnetischen Kraft. Der Hinweis auf diese Beziehung soll hier nur darauf aufmerksam machen, daß dem Begriff des Kraftflusses auch für das magnetische Feld eine ganz bestimmte reale Bedeutung zukommt. Sie wird noch stärker hervortreten, wenn wir für die Beschreibung der Erscheinungen innerhalb magnetisierter Materie den Begriff des Induktionsflusses von dem des Kraftflusses unterscheiden werden (siehe Abschnitt 18). Für unser magnetisches Feld aber können wir uns den Begriff des Kraftflusses auch ohne Anlehnung an besondere Versuche rein nach Analogie des elektrischen Kraftflusses bilden. Wir können uns das magnetische Feld in Kraftröhren zerlegt denken. Untersuchen wir die Feldstärke  $\mathfrak{H}$  an verschiedenen Stellen einer Kraftröhre, so finden wir sie dem Querschnitt  $q$  der Kraftröhre umgekehrt proportional. Das Produkt  $\mathfrak{H} \times q$  ist also in der ganzen Ausdehnung der Kraftröhre konstant, oder in jedes beliebige Stück der Kraftröhre tritt an der einen Seite so viel Kraftfluß ein, als auf der anderen Seite heraustritt, oder die Summe des ein- und austretenden Kraftflusses ist Null. Für eine



beliebige geschlossene Fläche, die ganz innerhalb des Feldes liegt, führt dies zu dem Satze:

$$\int \mathfrak{G}_n \, ds = 0. \quad (5)$$

Daraus folgt nach Abschnitt 14 des ersten Kapitels das zweite Differentialgesetz der magnetischen Kraft:

$$\frac{\partial \mathfrak{G}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{G}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{G}_z}{\partial z} = 0^1). \quad (6)$$

Drückt man die Kraft durch das Potential aus, so ergibt sich für dieses die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (7)$$

oder

$$\Delta \varphi = 0.$$

## 10. Festsetzung der Einheit der Polstärke.

Um den eingeführten Begriffen eine bestimmte, quantitativ auswertbare Fassung zu geben, müssen wir vor allem eine allgemeingültige Festsetzung über das Maßsystem aufstellen, in dem die Polstärke ausgedrückt werden soll. Ist dieses Maß festgelegt, so ist nach Gleichung (1) auch das Maß der magnetischen Kraft damit gegeben. Bei der Parallele, die wir bisher für die magnetischen und die elektrischen Felder kennen gelernt haben, ist auch für die Aufstellung des magnetischen Maßsystems der gleiche Gedankengang benutzbar, wie für die Aufstellung des elektrostatischen Maßsystems (siehe I, 17). Ebenso wie für zwei punktförmige Ladungen hat Coulomb, indem er mit langen, dünnen Magnetnadeln operierte, auch für zwei punktförmige Magnetpole die ponderomotorische Kraft bestimmt, die sie aufeinander ausüben<sup>2)</sup>. Bedeuten  $m_1$  und  $m_2$  die Polstärken,  $r$  die Entfernung der beiden Pole, so sagt das von Coulomb gefundene Gesetz aus, daß die ponderomotorische Kraft in Richtung der Verbindungslinie der Pole wirkt, ihren Polstärken direkt, dem Quadrat ihrer Entfernung umgekehrt proportional ist, oder

$$\mathfrak{F} = k \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (8)$$

wenn  $k$  eine von der gewählten Einheit für  $m$  abhängige Konstante ist.

Gibt man  $k$  einen bestimmten Wert, so ist damit auch das Maß für die Polstärke festgelegt. Denn durch Vergleich der Wirkungen, die  $m_1$  und  $m_2$  auf einen dritten Pol ausüben, kann man jederzeit das Ver-

<sup>1)</sup> Vektoranalytisch:  $\text{div } \mathfrak{G} = 0$ .

<sup>2)</sup> Siehe die S. 34 zitierte Arbeit von Coulomb.

hältnis  $m_2/m_1$  feststellen. Hat man dieses etwa gleich  $a$  gefunden, und mißt man  $\mathfrak{S}$  in Dynen,  $r$  in Zentimetern, so folgt aus Gleichung (8)

$$m_1 = \frac{r \cdot \sqrt{\mathfrak{S}}}{\sqrt{k a}},$$

und hier hat die rechte Seite, da  $r$ ,  $\mathfrak{S}$  und  $a$  gemessene Größen sind, einen bestimmten Wert, sobald über  $k$  verfügt ist. In dem von Gauß begründeten absoluten magnetischen Maßsystem wird  $k=1$  gesetzt. Nach dieser Festsetzung hat ein Magnetpol die Stärke 1, wenn er auf einen Pol von gleicher Stärke in der Entfernung von 1 cm die Kraft von einer Dyne ausübt.

Mit dieser Bestimmung ist zugleich die Beziehung der Polstärke zu dem von ihr erzeugten Kraftfluß in derselben Weise festgelegt, wie in der Elektrostatik für die Elektrizitätsmenge. Denn nach dem Coulombschen Gesetz ist die magnetische Kraft im Abstand  $r$  von einem punktförmigen Pol  $m$ :

$$\mathfrak{S} = \pm \frac{k m}{r^2}$$

und im absoluten Maßsystem:

$$\mathfrak{S} = \pm \frac{m}{r^2}.$$

Der gesamte Kraftfluß, der durch eine um den Pol beschriebene Kugel und ebenso durch jede Fläche, die den Pol einschließt, hindurchgeht, ist dann offenbar  $4\pi m$ . Dabei ist nur zu berücksichtigen, daß wohl Elektrizitätsmengen, aber nicht magnetische Pole von einer vollkommen geschlossenen Fläche umgeben werden können. Denn auch wenn wir mit sehr langen dünnen Magneten operieren, ist der Pol doch immer nur das Ende des Stabes, und eine Fläche, die den einzelnen Pol umgeben soll, muß notwendig den Magneten schneiden. Der Teil der geschlossenen Fläche aber, der innerhalb des Magneten liegt, muß bei der Integration des Kraftflusses über die Fläche ausgenommen werden. Denn unsere Aussagen beziehen sich ja nur auf die Erscheinungen in dem den Magneten umgebenden Luftraum oder leeren Raum. Mit dieser Einschränkung kann man von einem Pole von der Stärke  $m$  sagen, daß von ihm der Kraftfluß  $4\pi m$  ausgeht. Indem man in diesem Sinne die Polstärke als Quelle des magnetischen Kraftflusses mit der Elektrizitätsmenge als Quelle des elektrischen Kraftflusses in Parallele stellt, bezeichnet man die Polstärke auch mit dem Namen Magnetismusmenge.

Die durch diese Festsetzung der Einheit der Polstärke bestimmte Einheit der Feldstärke hat man dem Begründer des absoluten Maßsystems zu Ehren 1 Gauß genannt, d. h. ein magnetisches Feld

hat die Stärke 1 Gauß, wenn es auf den Pol 1 (nach obiger Definition) die Kraft von einer Dyne ausübt.

Von der Dimension der Polstärke, der magnetischen Kraft und des Potentials gilt das gleiche, was in I, 18 über die entsprechenden elektrischen Größen ausgeführt worden ist.

## 11. Darstellung der Eigenschaften eines Magnetfeldes durch Richtung und Zahl der Kraftlinien.

Wir haben schon in Abschnitt 7 gesehen, daß, falls man die Kraftlinien eines Magnetfeldes sich konstruiert hat, die Richtung der magnetischen Kraft in jedem Punkte des Feldes damit zur Darstellung gebracht ist. Man hat aber außerdem gerade auf dem Gebiet des Magnetismus in seinen praktischen Anwendungen den Begriff der Kraftlinien zu einer Maßgröße erweitert. Denken wir uns den ganzen Raum des Magnetfeldes in Kraftröhren zerlegt, die so konstruiert werden, daß in jeder Röhre der Kraftfluß  $\oint \times q = 1$  ist, wenn  $\oint$  die magnetische Feldstärke in absoluten Einheiten oder Gauß und  $q$  den Querschnitt der Röhre in Quadratcentimetern bedeutet. Der Querschnitt der Einheitsröhre ist also stets der reziproke Wert der in Gauß ausgedrückten Feldstärke. Bezeichnet man nun mit  $N$  die Zahl der Einheitsröhren, die durch eine senkrecht zu den Kraftlinien des Feldes gelegte Fläche von 1 qcm Inhalt hindurchgehen, so ist offenbar  $N = \frac{1}{q} = \oint$ . Die Zahl, die die

Feldstärke in Gauß angibt, kann man also auch als die Zahl der Einheitsröhren für den Quadratcentimeter einer Niveaufläche ansehen. Je stärker das Feld ist, um so kleiner ist der Querschnitt  $q$  und um so größer die Zahl der Einheitsröhren für den Quadratcentimeter. Für den Begriff der Kraftröhre mit der Einheit des Kraftflusses oder der Einheitsröhre hat sich die kurze Bezeichnung Kraftlinie eingebürgert. Die Stärke des Feldes in absolutem Maße ist in dieser Ausdrucksweise durch die Zahl der Kraftlinien pro Quadratcentimeter oder die Dichte der Kraftlinien gegeben. An die Stelle des abstrakten Begriffes der Feldstärke setzt man die anschauliche Vorstellung der Kraftliniendichte. In dem gleichen Sinne sagt man, daß von einem Pole mit der Stärke  $m$   $4\pi m$  Kraftlinien ausgehen.

## 12. Die Grenzen des Feldes.

Die vorhergehenden Abschnitte haben gezeigt, daß die Gesetze, nach denen sich die magnetische Kraft im leeren Raum ausbreitet, die gleichen

sind wie diejenigen, die die Ausbreitung der elektrischen Kraft im leeren Raum bestimmen. Fragen wir nun nach der Gesetzmäßigkeit, die diejenigen Stellen beherrscht, von denen die Kräfte ausgehen; diese Stellen sind die Grenzen des Feldes. Die Grenzen des elektrischen Feldes waren die geladenen Leiteroberflächen; für diese gilt das einfache Gesetz, daß diese Flächen Niveauflächen des Feldes sein, die Kraftlinien also senkrecht auf ihnen enden mußten. Unser magnetisches Feld ist begrenzt durch die Oberfläche des Magneten, zu der wir als zweite Grenze noch die unendlich ferne Kugel hinzunehmen können. An dieser ist die Feldstärke in Uebereinstimmung mit der Erfahrung gleich Null zu setzen. Für die Oberfläche des Magneten gelten nicht so einfache Gesetze, wie für die Oberfläche der Leiter im elektrischen Felde. Jedes Kraftlinienbild eines Magneten lehrt, daß die Kraftlinien von der Oberfläche unter den verschiedensten Winkeln ausgehen. Verfolgt man aber die einzelnen Kraftlinien, so sieht man, daß jede von dem Magneten ausgehende Kraftlinie auch wieder auf ihn einmündet. Bildet man das Integral der Formel (5) für die Oberfläche des Magneten, so ist es ebenfalls Null, d. h. der gesamte von dem Magneten ausgehende Kraftfluß kehrt wieder in ihn zurück. Dieser Satz ist nichts anderes als die allgemeinere Fassung der Tatsache, die wir in Abschnitt 5 behandelt haben, daß die Summe der Polstärken eines Magneten gleich Null ist.

Von dem Standpunkte aus, der als Quelle des magnetischen Kraftflusses eine Magnetismusmenge ansieht, kann man nun zunächst eine einfache Formulierung für das Zustandekommen des magnetischen Feldes dadurch finden, daß man sich die Grenze des Feldes, d. h. die Oberfläche  $S$  des Magneten, mit Quellpunkten des magnetischen Kraftflusses, mit Magnetismismengen in einer flächenhaften Verteilung belegt denkt. Die fingierte Dichte  $\eta_s$  auf der Fläche  $S$  ist zu berechnen, falls die Anzahl  $N_s$  der Kraftlinien, welche in  $S$  einströmen, überall auf  $S$  bekannt ist. Zu dem Zwecke denke man sich die Oberfläche von  $S$  in eine Anzahl, etwa 100, kleine Elemente  $dS_1, dS_2 \dots dS_{100}$  zerlegt und nenne  $\eta_1, \eta_2 \dots \eta_{100}$  die Dichte der Belegung, welche man auf diesen Elementen anzubringen hat. Die von dieser Belegung herrührende Kraft  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$  in einem Element, z. B.  $dS_1$ , ist eine lineare Funktion der Größen  $\eta$ :

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_1 = \eta_1 p_1 + \eta_2 p_2 + \dots + \eta_{100} p_{100}.$$

Falls noch andere Magnete oder durch das Feld magnetisierbare Körper im Felde vorhanden sind, würden noch Funktionen dazukommen, die die Fernwirkung dieser Körper am Ort des Elementes  $dS_1$  ausdrücken würden. Diese Wirkungen lassen sich berechnen; ebenso sind die Größen  $p$

zu berechnen, falls man die geometrische Anordnung der Elemente  $dS$  sowie ihre Größe kennt. Da nun  $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)$  sich auf jedem Elemente aus

$$dN_s = \mathfrak{G}_n dS$$

ergibt, so hat man zur Berechnung der 100 unbekannten Größen  $\eta$  100 lineare Gleichungen. Es muß dabei die Beziehung  $\Sigma dN_s = 0$  und daher auch  $\Sigma \eta = 0$  bestehen. Je weiter man die Zerteilung von  $S$  treibt, um so genauer kann man den wirklichen Kraftlinienverlauf an der Außenfläche von  $S$  durch die fingierten Belegungen nachahmen. Daß dies für eine gegebene Verteilung der magnetischen Kraft immer in völlig eindeutiger Weise möglich ist, hat Gauß<sup>1)</sup> zuerst nachgewiesen. Die magnetischen Eigenschaften eines Stahlstabes würden dann also — wenn wir von komplizierteren Erscheinungen, wie Magneten mit Folgepunkten u. dgl., absehen<sup>2)</sup> — dadurch dargestellt werden, daß die Oberfläche des Magneten auf der einen Hälfte mit positivem, auf der anderen mit negativem Magnetismus in bestimmt verteilter Flächen-dichte bedeckt wäre, beide Hälften durch eine Indifferenzzone voneinander getrennt. Diese mathematisch stets mögliche Darstellung hat aber nur einen rechnerischen Wert<sup>3)</sup>. Den fingierten Oberflächenbelegungen kommt eine physikalische Bedeutung nicht zu. Denn wir wissen ja, daß wir diese positiven und negativen Belegungen nicht getrennt erhalten, wenn wir den Magneten in der Indifferenzzone durchschneiden. So weit wir auch die Zerteilung des Magneten treiben, der kleinste Teil stellt noch immer einen ganzen Magneten dar. Diese physikalische Tatsache zwingt uns, das Zustandekommen des magnetischen Feldes dadurch zu formulieren, daß wir uns den erregenden Magneten aus Molekularmagneten aufgebaut denken.

### 13. Molekulartheorie der permanenten Magnete.

Das Potential für einen einzelnen Molekularmagneten können wir unmittelbar hinschreiben. Denn wir können einen Molekularmagneten als einen magnetischen Dipol auffassen und demgemäß die in Abschnitt 29 des Kapitels I aufgestellte Formel (60) für den elektrischen

<sup>1)</sup> C. F. Gauß, Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernungen wirkenden Anziehungs- und Abstoßungskräfte; Werke, V; Ostwalds Klassiker, Nr. 2, herausgegeben von A. Wangerin, S. 49.

<sup>2)</sup> Vgl. G. Wiedemann, Die Lehre von der Elektrizität, III, S. 110, 1895.

<sup>3)</sup> Die wichtigste Anwendung hat Gauß selbst in der Berechnung des magnetischen Potentials der Erde geliefert; siehe Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus, Gauß' Werke V, S. 119.

Dipol auf den Molekularmagneten übertragen. Dann hat also sein Potential den Wert

$$m d a \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a} + m d b \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b} + m d c \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c},$$

wobei  $a, b, c$  die Koordinaten des Molekularmagneten,  $m d a, m d b, m d c$  die Komponenten seines magnetischen Momentes nach den Achsen darstellen. Sind nun in dem unendlich kleinen Volumen  $d v$  des Magneten  $n$  solcher Molekularmagnete, so ist das Potential des Volumelementes gleich der Summe der Potentiale für die einzelnen Magnete. Dabei kann man wegen der Kleinheit von  $d v$  die Größen

$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a}, \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b}, \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c}$  für alle Magnete innerhalb  $d v$  als gleich ansehen,

indem man nun unter  $a, b, c$  die Koordinaten des Raumelements versteht. Führen wir ferner für die Summen der Komponenten der magnetischen Momente die Bezeichnungen ein:

$$\Sigma m d a = m_x d v, \quad \Sigma m d b = m_y d v, \quad \Sigma m d c = m_z d v,$$

so hat das Volumelement  $d v$  das Potential

$$\left( m_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a} + m_y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b} + m_z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c} \right) d v.$$

Die Größen  $m_x, m_y, m_z$  sind dann die Komponenten des magnetischen Momentes der Raumeinheit des gegebenen Magneten. Man nennt diese Größe auch die Magnetisierung, entsprechend dem Begriff der Elektrisierung, den wir in Kapitel I, Abschnitt 38 kennen gelernt haben. Sie hängt für den Magneten offenbar von der Zahl, dem Moment und der Orientierung der Molekularmagnete ab. Ohne darüber etwas auszusagen, können wir jedenfalls annehmen, daß im allgemeinsten Falle die Magnetisierung von Punkt zu Punkt innerhalb des Magneten veränderlich, also eine Funktion der Koordinaten sein wird. Also wird sich das Potential des ganzen Magneten darstellen in der Form:

$$\varphi = \int \left( m_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a} + m_y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b} + m_z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c} \right) d v. \quad (9)$$

Durch partielle Integration und Anwendung des Gaußschen Satzes (I, 15) läßt sich dieses Integral in die Summe eines Raum- und eines Oberflächenintegrals überführen:

$$\varphi = - \int \left( \frac{\partial m_x}{\partial a} + \frac{\partial m_y}{\partial b} + \frac{\partial m_z}{\partial c} \right) \frac{d v}{r} - \int \left( m_x \cos(n x) + m_y \cos(n y) + m_z \cos(n z) \right) \frac{d s}{r}.$$

Dabei ist, weil die Magnetisierung außerhalb des Magneten gleich Null ist, als positive Normalenrichtung (im Gegensatz zu den Festsetzungen in I, 15) die nach innen genommene Richtung verstanden. Die Normalkomponente der Magnetisierung an der Innenseite der Oberfläche werde mit  $m_n$  bezeichnet. Setzen wir noch

$$-m_n = \eta_m \quad (10)$$

$$-\left(\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_z}{\partial z}\right) = -\operatorname{div} m = \rho_m, \quad (11)$$

so nimmt das Potential des Magneten die Form an:

$$\varphi = \int \frac{\rho_m}{r} d\tau + \int \frac{\eta_m}{r} ds. \quad (12)$$

Nun hat das Potential wieder die Form des Potentials über eine bestimmte räumliche Verteilung von magnetischer Masse oder von Magnetismusk Mengen;  $\rho_m$  hat den Charakter einer räumlichen,  $\eta_m$  denjenigen einer Flächendichte des Magnetismus. Aus den Definitionen (10) und (11) ersieht man, daß diese wirksamen Magnetismusk Mengen den Charakter der „scheinbaren Ladungen“ (I, 37) haben; sie treten nur da in die Rechnung ein, wo die Magnetisierung  $m$  mit dem Ort veränderlich ist, sei es, daß im Inneren die Divergenz der Magnetisierung nicht gleich Null ist, oder daß die Magnetisierung auf der Oberfläche gewissermaßen frei endet. Man hat deswegen diese Größe als den freien Magnetismus des Magneten bezeichnet. Nur ist dabei zu beachten, daß hier — bei den permanenten Magneten — diese Belegungen unabhängig von jedem äußeren Felde dauernd in dem Magneten bestehen. Sie sind der Ausdruck für seinen, das äußere Feld erzeugenden magnetischen Zustand. Aus diesem Grunde haben neuere Autoren  $\rho_m$  und  $\eta_m$  auch direkt als die wahren magnetischen Dichten des Magneten bezeichnet, wenn sie auch nur als räumliche Differenzen von  $m$  — der wahren Magnetisierung — in die Erscheinung treten.

Ist die Magnetisierung des Innenraumes des Magneten so, daß  $\rho_m = 0$  ist, so rührt die äußere Wirkung des Magneten nur von der Flächenbelegung der Dichte  $\eta_m$  her, und diese Belegung stimmt dann mit der fingierten Belegung überein, durch die man nach dem am Schluß des vorigen Abschnittes erwähnten Satze von Gauß die Wirksamkeit des Magneten immer darstellen kann. Ist  $\rho_m$  nicht gleich Null, so erhält man die fingierte Gaußsche Belegung, indem man zu der Dichte  $\eta_m$  noch eine zweite Flächendichte  $\eta'_m$  hinzufügt, deren Verteilung so bemessen ist, daß sie nach außen dieselbe Wirkung ausübt, wie die innere Verteilung von der Dichte  $\rho_m$ . Daß dies immer möglich ist, folgt aus einer Anwendung bekannter Sätze der Elektrostatik <sup>1)</sup>. Denken

<sup>1)</sup> Siehe E. Mascart und J. Joubert, Lehrbuch der Elektrizität und des Magnetismus, deutsch von L. Levy, Berlin 1886, I, S. 287.

wir uns nämlich statt der magnetischen eine elektrische Massenverteilung von gleicher Art, eingeschlossen in eine leitende Hülle von der Form des Magneten, die zur Erde abgeleitet sei, so wird sich nach I, 13 die Innenseite der Hülle mit einer flächenhaften Ladung bedecken, die in ihrer Gesamtheit der algebraischen Summe der eingeschlossenen räumlichen Ladungen entgegengesetzt gleich ist, und deren Verteilung so beschaffen ist, daß die äußere Wirkung dieser Ladung die der räumlichen Ladungen gerade aufhebt. Denkt man sich nun die räumlichen Ladungen entfernt, die Flächenladung aber, unter Umkehrung ihres Vorzeichens, festgehalten, so ist ihre Wirkung im äußeren Raum die gleiche wie die der räumlichen Ladungen. Im Gebiete des Magnetismus ist der entsprechende Versuch allerdings physikalisch nicht ausführbar. Aber das mathematische Resultat der Ersetzbarkeit der räumlichen Ladungen durch Oberflächenladungen ist davon unabhängig und auf die magnetischen Massen ohne weiteres zu übertragen. Damit ist von einer anderen Seite her der erwähnte Satz von Gauß bewiesen, daß jeder Magnet in seiner äußeren Wirkung stets äquivalent ist einer Verteilung von positivem und negativem Magnetismus auf seiner Oberfläche. Diese fingierten Oberflächenbelegungen haben sogar den Vorzug, ganz eindeutig aus dem äußeren Felde bestimmt zu sein. Die Magnetisierung dagegen ist das nicht. Denn wenn man die Dichte der fingierten Belegung in eine Summe von zwei Anteilen zerlegt, von denen der eine der Flächendichte, der andere der räumlichen Verteilung des freien Magnetismus zukommt, so kann diese Zerlegung in unendlich vielfacher Weise vorgenommen werden.

## 14. Magnetisches Moment und Pole eines permanenten Magneten.

Ueber die Wirkungsweise eines permanenten Magneten lassen sich aus dem Ausdruck (9) für das Potential unter gewissen Annahmen einige allgemeine Sätze ableiten.

Nimmt man zunächst den Aufpunkt  $(x, y, z)$ , für den das Potential bestimmt ist, so weit von dem Magneten entfernt, daß die Dimensionen des Magneten gegen die Entfernung  $r$  sehr klein sind, so sind die Aus-

drücke  $\frac{\partial}{\partial a} \frac{1}{r}, \frac{\partial}{\partial b} \frac{1}{r}, \frac{\partial}{\partial c} \frac{1}{r}$  für alle Punkte des Magneten als merklich gleich anzunehmen und dürfen vor das Integralzeichen gesetzt werden. Führen wir dann noch die Bezeichnungen ein:

$$\int m_x d\tau = \mathfrak{M}_x, \quad \int m_y d\tau = \mathfrak{M}_y, \quad \int m_z d\tau = \mathfrak{M}_z, \quad (13)$$

so nimmt  $\varphi$  die Form an:



$$\varphi = \mathfrak{M}_x \frac{1}{\partial \frac{r}{a}} + \mathfrak{M}_y \frac{1}{\partial \frac{r}{b}} + \mathfrak{M}_z \frac{1}{\partial \frac{r}{c}},$$

also die Form des Potentials eines Dipols, dessen magnetisches Moment die Komponenten  $\mathfrak{M}_x$ ,  $\mathfrak{M}_y$ ,  $\mathfrak{M}_z$  hat. Aus diesen Komponenten berechnet sich das resultierende Moment  $\mathfrak{M}$  und seine Richtung, die wir durch  $l$  bezeichnen wollen, nach den Formeln:

$$\mathfrak{M}_x = \mathfrak{M} \cos(l \ x), \quad \mathfrak{M}_y = \mathfrak{M} \cos(l \ y), \quad \mathfrak{M}_z = \mathfrak{M} \cos(l \ z),$$

und das Potential läßt sich dann in der Form schreiben:

$$\varphi = \frac{\mathfrak{M} \cos \psi}{r_0^2}, \quad (14)$$

wenn  $r_0$  den vom Aufpunkte nach der Mitte des Magneten gezogenen Radius Vektor und  $\psi$  den Winkel zwischen  $r_0$  und der Richtung  $l$  bedeutet. Das Resultat der Erfahrung über das Verhalten eines Magneten in einem homogenen Felde, das wir in Abschnitt 6 besprochen hatten, finden wir hier in anderer Form wieder. In sehr großer Entfernung wirkt jeder Magnet so wie ein magnetischer Dipol.  $\mathfrak{M}$  ist das magnetische Moment und die Richtung  $l$  ist die magnetische Achse des Magneten. Diese beiden Größen bestimmen das magnetische Feld in sehr großer Entfernung von dem Magneten.

Für Punkte, die etwas näher liegen, kommen die Dimensionen des Magneten in Betracht. Wir beschränken die Entwicklung auf den in der Praxis üblichen Fall, daß der Magnet ein Stab sei, dessen Querdimensionen klein seien gegen seine Längsdimension. Die Richtung  $l$  falle mit der Stabachse zusammen. Wir wollen den Nullpunkt des Koordinatensystems in die Mitte des Magneten gelegt denken und wollen die Richtung der magnetischen Achse von der Mitte nach dem Nordende des Magneten als X-Achse nehmen. Dann kann nach der Voraussetzung über die Dimensionen die Veränderlichkeit von  $\frac{1}{r}$  nach der Querdimension für alle Punkte des Magneten als gleich angenommen

werden;  $\frac{1}{\partial \frac{r}{a}}$  aber kann in eine Reihe nach Potenzen von  $\frac{a}{r_0}$  entwickelt werden, bei der wir uns auf die ersten Glieder beschränken und die Glieder, die  $b$  und  $c$  als Faktoren enthalten, vernachlässigen gegenüber denen, die  $a$  enthalten. Es ist

$$\frac{1}{\partial \frac{r}{a}} = \frac{x - a}{r^3},$$

$$r^2 = r_0^2 - 2 a x + a^2.$$

Die Reihenentwicklung ergibt:

$$\frac{x-a}{r^3} = \frac{x}{r_0^3} + \frac{3 \cos^2 \psi - 1}{r_0^3} a + \frac{3 \cos \psi (5 \cos^2 \psi - 3)}{2 r_0^4} a^2 + \dots$$

und das Potential nimmt die Form an:

$$\varphi = \frac{\cos \psi}{r_0^2} \int m \, dv + \frac{3 \cos^2 \psi - 1}{r_0^3} \int m a \, dv \\ + \frac{\cos \psi (5 \cos^2 \psi - 3)}{2 r_0^4} 3 \int m a^2 \, dv + \dots$$

Dabei ist  $m$  die Magnetisierung in Richtung der Achse,  $\int m \, dv$  also gleich  $\mathfrak{M}$  und das erste Glied stellt den früher erhaltenen Ausdruck für sehr entfernte Punkte dar. Ist  $q$  der kleine Querschnitt des Magneten, so ist  $dv = q \, da$  und die Integration ist von  $+\frac{L}{2}$  bis  $-\frac{L}{2}$  auszu-dehnen, wenn  $L$  die ganze Länge des Stabes ist. Innerhalb des Querschnitts können wir die Magnetisierung als wenig veränderlich annehmen, im Verhältnis zur starken Veränderlichkeit in der Längsrichtung;  $m$  soll dann den Mittelwert der Magnetisierung für den Querschnitt bedeuten. Dieser Wert wird im allgemeinen in der Mitte des Magneten am größten sein und nach den Enden hin abnehmen. Wir wollen die in der Praxis angenähert zutreffende Voraussetzung machen, daß diese Abnahme von der Mitte aus nach beiden Enden zu symmetrisch erfolge, oder daß in Punkten, die gleich weit von der Mitte abstehen, d. h. für  $\pm a$ ,  $m$  gleichen Wert habe, der freie Magnetismus also bei entgegengesetztem Vorzeichen gleichen Betrag habe. Unter dieser Voraussetzung verschwindet das Integral  $\int m a \, dv$ .

Wir wollen nun diesen physischen Magneten mit einem mathematischen Magneten vergleichen und darunter ein Gebilde verstehen, das aus zwei punktförmigen Polen  $\pm m$  im Abstände  $l$  besteht. Wie man in der Mechanik das mathematische Pendel sucht, das die gleiche Schwingungsdauer wie ein physisches Pendel hat, so wollen wir hier den mathematischen Magneten suchen, der das gleiche Feld erzeugt, wie der gegebene physische Magnet. Für Punkte, die sehr weit entfernt sind, ist die Bedingung dafür gegeben durch die Gleichung:

$$m l = \mathfrak{M}.$$

Aber dadurch ist der äquivalente mathematische Magnet noch nicht eindeutig bestimmt, da nur das Produkt von  $m$  und  $l$  vorgeschrieben ist. Geht man dagegen auf die zweite Annäherung, so erhält man zwei Bedingungsgleichungen, die  $m$  und  $l$  einzeln bestimmen. Das Potential des mathematischen Magneten ist:

$$\varphi = \frac{m}{r_1} - \frac{m}{r_2},$$

wobei

$$r_1^2 = r_0^2 + \frac{l^2}{4} - l r_0 \cos \psi,$$

$$r_2^2 = r_0^2 + \frac{l^2}{4} + l r_0 \cos \psi$$

ist. Führt man hier die Reihenentwicklung nach Potenzen von  $l$  durch, so erhält man:

$$\varphi = \frac{m l \cos \psi}{r_0^2} + \frac{\cos \psi (5 \cos^2 \psi - 3)}{2 r_0^4} \frac{m l^3}{4} + [\dots] l^5 + \dots \quad (15)$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit der Formel für den symmetrischen physischen Magneten

$$\varphi = \frac{\cos \psi}{r_0^2} \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} m q \, da + \frac{\cos \psi (5 \cos^2 \psi - 3)}{2 r_0^4} 3 \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} m q a^2 \, da + \dots, \quad (16)$$

so sieht man, daß man einen mathematischen Magneten bestimmen kann, dessen Feld mit dem des physischen übereinstimmt von unendlicher Entfernung an bis zu solchen Abständen vom Magneten, für die die dritte Potenz von  $l/r_0$  noch zu berücksichtigen, die fünfte und die höheren Potenzen zu vernachlässigen sind. Dieser mathematische Magnet ist bestimmt durch die Gleichungen:

$$m l = \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} m q \, da,$$

$$\frac{m l^3}{4} = 3 \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} m q a^2 \, da,$$

aus denen folgt:

$$l = 2 \sqrt{\frac{3 \int m q a^2 \, da}{\int m q \, da}} \quad (17)$$

und

$$m = \frac{1}{2} \int m q \, da \times \sqrt{\frac{\int m q \, da}{3 \int m q a^2 \, da}}. \quad (18)$$

Trägt man auf dem physischen Magneten in Richtung seiner Achse vom Mittelpunkt aus die Strecken  $\pm \frac{l}{2}$  auf, so erhält man als deren Endpunkte zwei Punkte, die die Lage der sog. äquivalenten Pole des Magneten<sup>1)</sup> bestimmen. Ihre Stärke ergibt sich aus (18). Eine andere Art von Polen erhält man, wenn man für jede Hälfte des gegebenen Magneten die Schwerpunkte seiner magnetischen Belegungen aufsucht. Ein mathematischer Magnet, dessen Polabstand gleich dem Abstand dieser Schwerpunkte und dessen Polstärke gleich dem gesamten Nord- bzw. Südmagnetismus ist, würde dann auch eine Darstellung der äußeren Wirkung des Magneten bis zu einem gewissen Grade der Annäherung ergeben. Aber diese Annäherung ist beim Schwerpunktmagneten wesentlich schlechter als bei dem oben definierten äquivalenten Magneten; denn während bei dem letzteren erst die fünfte Potenz von  $l/r_0$  fortfällt, muß bei dem ersteren schon die zweite Potenz vernachlässigt werden<sup>2)</sup>.

Die Lage der äquivalenten Pole hängt von der Verteilung von  $m$  im Magneten ab. Ist  $m$  konstant in der ganzen Länge des Magneten, so ist freier Magnetismus nur auf den Endquerschnitten vorhanden, und daher  $l = L$ . Nach v. Rees<sup>3)</sup> kommt bei den gebräuchlichen Magnetformen zu dem freien Magnetismus der Endquerschnitte noch eine Verteilung von freiem Magnetismus längs des Stabes hinzu, die dem Gesetz der Kettenlinie folgt. Nach F. Kohlrausch<sup>4)</sup> entfernt sich auch die einfachere Formel für den freien Magnetismus auf dem Längenelement  $da$  des Magneten

$$\pm c a^2 da$$

ohne Annahme besonderer Belegungen auf den Endquerschnitten nicht allzuweit von der Wirklichkeit. Da der freie Magnetismus in unserem Fall gleich  $-\frac{d(mq)}{da} da$  gesetzt werden kann, und  $m$  für  $a = \pm \frac{L}{2}$  zu Null werden muß, weil an den Endflächen keine Belegungen vorhanden sein sollen, so ist

$$mq = \frac{1}{3} c \left[ \left( \frac{L}{2} \right)^3 \mp a^3 \right]$$

zu setzen, wobei das Pluszeichen für negative  $a$  zu nehmen ist. Das ergibt:

$$ml = \frac{1}{2} c \left( \frac{L}{2} \right)^4,$$

$$l = L \sqrt{\frac{2}{3}} = 0,8165 L,$$

<sup>1)</sup> E. Riecke, Pogg. Ann. **149**, S. 62, 1873; Wied. Ann. **8**, S. 300, 1879.

<sup>2)</sup> H. Ruoff, Annalen (4) **27**, S. 117, 1908.

<sup>3)</sup> v. Rees, Pogg. Ann. **74**, S. 219, 1848.

<sup>4)</sup> F. Kohlrausch, Wied. Ann. **31**, S. 612, 1887.

$$m = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3}{2}} c \left( \frac{L}{2} \right)^3 = 0,0383 c L^3.$$

Mit diesem Ergebnis für die „reduzierte Länge“  $l$  des Magneten stimmt es überein, daß man den Polabstand eines Stabmagneten zu  $\frac{5}{6}$  der Stablänge zu rechnen pflegt<sup>1)</sup>.

Wir wollen schließlich aus dem Potentialausdruck die Formel für die magnetische Kraft ableiten, die ein Magnet in solcher Entfernung, wie sie der gewählten Annäherung entspricht, ausübt, und zwar beschränken wir uns auf zwei Fälle, 1. daß der Aufpunkt in der Achse liegt ( $x = r_0$ ,  $y = z = 0$ ), 2. daß er in der Äquatorebene des Magneten liegt ( $x = 0$ ). In beiden Fällen sind die Komponenten der Kraft nach der Y- und der Z-Achse gleich Null. Wir brauchen also nur den Ausdruck  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$  zu bilden. Wir können Formel (15) in der Form schreiben:

$$\varphi = \frac{\mathfrak{M}x}{r_0^3} + \mathfrak{M} \frac{5}{8} \frac{x^3 l^2}{r_0^7} - \mathfrak{M} \frac{3}{8} \frac{x l^2}{r_0^5}. \quad (15')$$

Dann ist

$$\mathfrak{H} = - \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

im ersten Fall (für axiale Punkte):

$$\mathfrak{H} = \frac{2\mathfrak{M}}{r_0^3} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{l^2}{r_0^2} \right), \quad (19)$$

im zweiten Falle (für äquatoriale Punkte):

$$\mathfrak{H} = - \frac{\mathfrak{M}}{r_0^3} \left( 1 - \frac{3}{8} \frac{l^2}{r_0^2} \right). \quad (20)$$

## 15. Ausführung absoluter magnetischer Messungen.

Die grundlegende Definition, auf der das absolute magnetische Maßsystem beruht, ist die Definition der Polstärke, wie wir sie in Abschnitt 10 kennen gelernt haben. Sie geht auf das Coulombsche Gesetz, auf den Idealfall einzelner punktförmiger Magnetpole zurück. Für den physischen Magneten ist aber das Hauptcharakteristikum sein magnetisches Moment, und die wichtigste Aufgabe magnetischer Messungen ist die Ermittlung des magnetischen Momentes von Magnetstäben in absolutem Maße.

Die älteste, von Gauß<sup>2)</sup> begründete Methode bedient sich dazu des

<sup>1)</sup> F. Kohlrausch u. Hallock, Wied. Ann. **22**, S. 411, 1884.

<sup>2)</sup> C. F. Gauß, *Intensitas vis magneticae terrestres ad mensuram absolutam revocata*. Abhandl. der Göttinger Ges. der Wiss. S. 3—44, 1832. Deutsche Ausgabe in Ostwalds Klassikern, Nr. 53, herausgegeben von E. Dorn.

erdmagnetischen Feldes und ergibt, zugleich mit dem gesuchten magnetischen Moment, die Horizontalintensität  $H$  des Erdmagnetismus. Man läßt zunächst den Magneten unter dem Einfluß der Horizontalkraft des Erdmagnetismus schwingen und mißt die Schwingungsdauer, bestimmt außerdem durch Rechnung oder durch Zusatz bekannter Trägheitsmomente das Trägheitsmoment  $K$  des schwingenden Systems. Die Bestimmungen geben für das Produkt  $\mathfrak{M} \times H$  nach der Formel:

$$\mathfrak{M} \times H = \frac{4 \pi^2 K}{T^2}$$

einen bestimmten Zahlenwert, wenn  $K$  in Gramm-Quadratcentimetern,  $T$  in Sekunden gemessen wird. Man stellt zweitens den Magnetstab so auf, daß seine Achse senkrecht zum magnetischen Meridian liegt. Dann steht sowohl für Punkte in der Verlängerung seiner Achse als auch für Punkte seiner Aequatorebene die von ihm erzeugte magnetische Kraft  $\mathfrak{H}$  auf der erdmagnetischen Kraft senkrecht; die Resultante beider Kräfte bildet mit dem magnetischen Meridian einen Winkel  $\alpha$ , der durch die Gleichung:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\mathfrak{H}}{H}$$

gegeben ist. Diesen Winkel mißt man, indem man an die betreffende Stelle eine kleine Magnetnadel bringt und die Ablenkung beobachtet, die sie erfährt, wenn der Magnetstab, der ursprünglich entfernt war, aufgestellt wird, oder die doppelte Ablenkung, wenn man ihn an Ort und Stelle umkehrt, d. h. Nord- und Südpol vertauscht. Aus den Formeln (19) und (20) ergibt sich für Punkte in der Achse des Magneten (sog. erste Hauptlage):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \mathfrak{M}}{H r_0^3} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{l^2}{r_0^2} \right)$$

und für Punkte in der Aequatorebene (zweite Hauptlage):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\mathfrak{M}}{H r_0^3} \left( 1 - \frac{3}{8} \frac{l^2}{r_0^2} \right).$$

Indem man diese Ablenkungsbeobachtungen für zwei verschiedene Werte der Entfernung  $r_0$  ausführt, kann man aus den zwei so erhaltenen Gleichungen die Größe  $l$  eliminieren und erhält für  $\mathfrak{M}/H$  die Formel

$$\frac{\mathfrak{M}}{H} = \frac{1}{2} \frac{r_1^5 \operatorname{tg} \alpha_1 - r_2^5 \operatorname{tg} \alpha_2}{r_1^2 - r_2^2}$$

für die erste, und entsprechend ohne  $\frac{1}{2}$  für die zweite Hauptlage. Dies ergibt für  $\mathfrak{M}/H$  einen bestimmten Zahlenwert, wenn  $r_1$  und  $r_2$  in Zentimetern ausgedrückt werden. Durch passende Kombination der beiden

Werte von  $\mathfrak{M} \propto H$  und  $\mathfrak{M}/H$  erhält man sowohl für  $\mathfrak{M}$  als für  $H$  Zahlenwerte im Zentimeter-Gramm-Sekunden-System. Die doppelten Ablenkungsbeobachtungen gestatten außerdem den Abstand  $l$  der äquivalenten Pole des Magneten in Zentimetern zu ermitteln<sup>1)</sup>. Ist die erdmagnetische Horizontalintensität für den Beobachtungsort bekannt, so lassen sich natürlich die magnetischen Momente von Magnetstäben durch Schwingungs- oder durch Ablenkungsbeobachtungen allein ermitteln, entsprechend den obigen Formeln.

Unabhängig vom erdmagnetischen Felde kann man das magnetische Moment von Magnetstäben nach einem Vorschlage von Helmholtz mit einer (natürlich eisenfreien) Wage ermitteln<sup>2)</sup>. Hängt man einen Magnetstab in vertikaler Lage an der Wage auf und stellt außerhalb der Wage im Abstand  $r_0$  einen zweiten Magneten in horizontaler Lage so auf, daß seine Achse die Mitte des ersten Magneten trifft, so übt der zweite Magnet eine vertikale Kraft auf den ersten Magneten aus, die man aus dem Ausdruck (15') für das Potential leicht ermitteln kann. Denn man hat nur, wenn man die Vertikalrichtung als  $Z$ -Richtung annimmt, den Ausdruck  $-\frac{\partial \varphi}{\partial z}$  zu bilden und in diesem Ausdruck, da ja der erste Magnet auf der Achse des zweiten liegt,  $x_0 = r_0$  zu setzen. Dann ist — unter Fortlassung aller höheren Glieder — die Vertikalkraft des Feldes des zweiten Magneten:

$$\mathfrak{G}_z = \frac{3 \mathfrak{M}_2 z}{r_0^4}.$$

Nimmt man nun an, daß der erste Magnet seinen Nordpol oben, seinen Südpol unten hat, und berücksichtigt man, daß  $z$  für den oberen Pol  $= +l/2$ , für den unteren  $= -l/2$  ist, so folgt, daß die auf beide Pole wirkenden Kräfte sich addieren zu einer Gesamtkraft, die für unendlich kleine Magnete

$$= \frac{3 \mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2}{r_0^4}$$

zu setzen ist. Bei Berücksichtigung der Ausdehnung des Magneten kommen Korrektionsglieder dazu. Hat man den ersten Magneten bei einer bestimmten Lage des zweiten an der Wage äquilibriert, so muß man nach Umlegen des zweiten Magneten das äquilibrierende Gewicht um  $\pm p$  verändern, und es ist, wenn  $g$  die Schwerkraftsbeschleunigung bedeutet,

$$p g = \frac{6 \mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2}{r_0^4}.$$

<sup>1)</sup> Hinsichtlich der feineren Ausführung der Messungen und der anzubringenden Korrekturen siehe F. Kohlrausch, Lehrbuch der prakt. Physik, 11. Aufl., S. 372 ff.

<sup>2)</sup> H. v. Helmholtz, Sitzungsber. Berl. Ak. 1883, S. 405—408. Die genauere Ausführung siehe bei A. Koepsel, Wied. Ann. 31, S. 250—272, 1887.

Führt man diese Bestimmungen mit drei Magneten durch, so erhält man absolute Werte für die drei Produkte  $M_1 M_2$ ,  $M_2 M_3$ ,  $M_1 M_3$  und kann daraus die einzelnen Momente berechnen.

## 16. Das magnetische Verhalten der Materie.

Bisher haben wir den Raum, der die permanenten Magnete umgibt, als leer angenommen. Daß Materie, wenn sie in ein magnetisches Feld hineingebracht wird, von diesem beeinflußt wird und den Verlauf der magnetischen Kraft verändert, ist eine Erfahrung, die für eine Art von Materie, nämlich für das weiche Eisen, schon so lange bekannt ist, wie man überhaupt von Magnetismus etwas weiß. Denn die Anziehung, die natürliche Magnete auf Stücke weichen Eisens ausüben, ist die erste Erfahrung auf dem Gebiet des Magnetismus gewesen. Beim Eisen, ebenso — wenn auch in geringerem Maße — bei Kobalt, Nickel und bei einigen Eisenverbindungen sind diese Wirkungen so stark, daß sie mit Leichtigkeit beobachtet werden konnten. Mit feineren Hilfsmitteln entdeckte Brugmans 1778, daß Wismut sich gerade umgekehrt verhält, indem es von einem Magneten nicht angezogen, sondern abgestoßen wird. Aber erst Faraday<sup>1)</sup> gelang es 1845 durch die Anwendung der viel stärkeren Felder, die man mit Hilfe von Elektromagneten erzeugen kann, den Nachweis zu führen, daß alle Materie magnetisch einflußbar ist.

Der Charakter dieser magnetischen Beeinflußbarkeit ist derselbe wie derjenige der elektrischen Beeinflußbarkeit der Isolatoren. Die Materie kann als magnetisch polarisierbar behandelt werden, wie die Isolatoren elektrisch polarisierbar sind (I, 38), und da es keine magnetischen Leiter gibt, so gilt dieser Charakter eines Zustandes innerer Magnetisierung für alle Materie im magnetischen Felde, während im elektrischen Felde die freie Beweglichkeit der Elektrizität in den Leitern diese vor dem Bestehen eines statischen Zustandes innerer Elektrisierung schützt und die leitende Materie aus Betrachtungen dieser Art ausschließt. Die Theorie eines derartigen durch ein äußeres Feld erzeugten inneren Zustandes der Materie ist überhaupt zuerst für den „induzierten Magnetismus des weichen Eisens“ von Poisson<sup>2)</sup> entwickelt und erst später auf die Dielektrika übertragen worden. Wir gehen hier den umgekehrten Weg und wollen in den nächsten Abschnitten die Theorie der Dielektrika, die wir im ersten Kapitel entwickelt haben, auf das magnetische Verhalten der Materie übertragen. Bei dieser Parallele tritt an die Stelle der Dielektrizitäts-

<sup>1)</sup> M. Faraday, Exper. Researches, XX. u. XXI. Reihe, Phil. Trans. 1846 u.



konstante eine andere Materialkonstante, die das magnetische Verhalten der Materie charakterisiert. Maxwell hat diese Größe den Koeffizienten der magnetischen Induktion genannt, Sir William Thomson (Lord Kelvin) hat sie als Permeabilität oder magnetische Leitfähigkeit des Materials bezeichnet. Drude hat in der ersten Auflage dieses Buches den Ausdruck „Magnetisierungskonstante“ dafür gebraucht. Da der Gebrauch dieses letzteren Namens in der Literatur kein eindeutiger ist, so wollen wir uns im folgenden der Bezeichnung Permeabilität bedienen, die sich inzwischen in Wissenschaft und Technik für diese wichtige Größe eingebürgert hat. Das Symbol dieser Größe ist nach allgemeinem Brauch der Buchstabe  $\mu$ .

Einen so einfachen Versuch zur unmittelbar anschaulichen Definition und Messung der Größe  $\mu$ , wie ihn der Kondensatorversuch für die Dielektrizitätskonstante  $\epsilon$  bildet (siehe I, 30), gibt es auf dem Gebiet des reinen Magnetismus nicht. Erst auf dem Gebiet des Elektromagnetismus und der Induktion werden wir entsprechende Versuche erkennen lernen. Aber wir können, um zu einer anschaulichen Definition der Größe  $\mu$  zu gelangen, von dem Coulombschen Gesetz für die Wirkung zweier Magnetpole aufeinander ausgehen. Geradeso, wie in der Elektrizitätslehre die Wirkung zweier punktförmiger Ladungen von der Natur des umgebenden Dielektrikums abhängt und für ein beliebiges Dielektrikum durch das Coulombsche Gesetz in seiner allgemeinsten Fassung

$$\mathfrak{F} = \frac{e_1 e_2}{\epsilon r^2}$$

ausgedrückt wird (siehe I, 31, S. 67), ebenso, ist aus dem Einfluß, den die Materie auf die magnetischen Erscheinungen ausübt, zu schließen, daß auch die Kraftwirkungen zwischen zwei Magnetpolen, wenn man sie innerhalb beliebiger magnetisierbarer Substanzen untersuchen könnte, durch ein verallgemeinertes Coulombsches Gesetz dargestellt werden würden:

$$\mathfrak{F} = \frac{m_1 m_2}{\mu \cdot r^2}, \quad (21)$$

in dem  $\mu$  eine die betreffende Substanz charakterisierende Größe ist. Diese Größe ist die Permeabilität.

Nach dieser Verallgemeinerung des Coulombschen Gesetzes hat unsere in Abschnitt 10 gegebene Definition der Polstärke nur dann einen bestimmten Sinn, wenn wir noch eine Festsetzung über das Medium treffen, in dem die Messung ausgeführt zu denken ist. Wie bei der Definition der Elektrizitätsmenge bestimmen wir, daß auch die Definition der Polstärke sich auf den leeren Raum beziehen soll. Durch diese Festsetzung wird dem leeren Raum, für den das Coulombsche Gesetz in der Form

$$\mathfrak{F} = \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

gilt, die Permeabilität 1 zugeschrieben. Für eine beliebige andere Substanz aber ist die Permeabilität das Verhältnis der Kraft, die die gleichen beiden Magnetpole in der gleichen Entfernung einmal im leeren Raum und dann innerhalb der betreffenden Substanz aufeinander ausüben würden. Die Größe  $\mu$  ist also, ebenso wie die Dielektrizitätskonstante, eine reine Zahl, gemessen durch das Verhältnis zweier Größen von gleicher Dimension.

## 17. Paramagnetische, diamagnetische und ferromagnetische Körper.

Die Erfahrung lehrt, daß für alle Isolatoren die Dielektrizitätskonstante  $\epsilon > 1$  ist (s. Tabelle in I, 30, S. 63). Hinsichtlich des magnetischen Verhaltens dagegen haben die Beobachtungen Faradays die Einteilung aller Stoffe in zwei Gruppen von gegensätzlichem Verhalten gelehrt. Die einen werden von Magneten angezogen; sie verhalten sich, wie Isolatoren sich in leeren Räumen verhalten; ihre Permeabilität ist entsprechend  $> 1$  zu setzen. Faraday hat diese Gruppe von Körpern paramagnetische genannt. Die anderen werden, wie das Wismut, von einem Magneten abgestoßen. Sie verhalten sich so, wie sich ein Isolator verhalten würde, der nicht vom leeren Raum, sondern von einem Medium mit höherer Dielektrizitätskonstante, als er selber besitzt, umgeben wäre. Diese Körper hat Faraday diamagnetische genannt. Ihre Permeabilität muß nach dem Gesagten kleiner als die des leeren Raumes, also  $< 1$  angenommen werden. Für die überwiegende Mehrzahl aller Stoffe ist die Permeabilität  $\mu$  eine Zahl, die nur sehr wenig von 1 verschieden ist, wie folgende Tabelle zeigt.

	$\mu$
Wismut . . . . .	0,999 825
Quecksilber . . . . .	0,999 975
Wasser . . . . .	0,999 990
Luft . . . . .	1,000 000 36
Platin . . . . .	1,000 377
Wäßrige Eisenchlorid-Lösung . .	1,000 754
(spez. Gew. 1,5)	

Diesen Körpern von sehr geringer Magnetisierbarkeit steht eine kleine Gruppe von Körpern gegenüber, die qualitativ zu den paramagnetischen Körpern gehören, quantitativ aber durch außerordentlich hohe Werte von  $\mu$  ausgezeichnet sind, Eisen und einige Eisenverbindungen,

Nickel, Kobalt. Namentlich im Eisen erreicht  $\mu$  enorm hohe Beträge, z. B. 2000 und darüber. Bei diesen Körpern treten aber gleichzeitig kompliziertere Erscheinungen auf. Bei ihnen ist  $\mu$  nicht eine wirkliche, allein von der Natur des Körpers abhängende Konstante, sondern  $\mu$  hängt von der Stärke des magnetischen Feldes in der Weise ab, daß es für eine gewisse Feldstärke im Maximum erreicht. Auf diesen Maximalwert bezieht sich die oben angegebene Zahl. Es hat sich weiter gezeigt, daß  $\mu$  sogar für die gleiche Feldstärke verschiedene Werte annehmen kann, je nachdem das Material dieser Feldstärke von kleineren oder von größeren Feldstärken aus unterworfen wird. Der Wert von  $\mu$  hängt also auch, wie man sagt, von der Vorgeschichte ab. Man hat diese Gruppe von Stoffen, die eine so merkwürdige Ausnahmestellung einnehmen, unter dem Namen der ferromagnetischen Stoffe zusammengefaßt.

Die Methoden, nach denen die angegebenen Werte von  $\mu$  gefunden sind, werden wir im folgenden kennen lernen. Daß die im vorigen Abschnitt aufgestellte Definition von  $\mu$  aus dem verallgemeinerten Coulombschen Gesetze nur auf einem Gedankenexperiment beruht, erhellt aus den obigen Werten für  $\mu$ . Denn selbst für die am stärksten paramagnetische Substanz, für die Eisenchloridlösung, ist die Abweichung der Permeabilität von dem Werte 1 noch so geringfügig, daß die Vergleichung der Kraftwirkung von Polen im leeren Raum und in der Lösung eine zu feine Messung erfordern würde, um eine brauchbare Methode zur Bestimmung von  $\mu$  bilden zu können.

Wohl aber läßt sich die starke Magnetisierbarkeit der ferromagnetischen Substanzen benutzen, um die Tatsache der Abnahme der Kraftwirkung mit zunehmender Magnetisierbarkeit des umgebenden Mediums wenigstens qualitativ zu demonstrieren. Denken wir uns z. B. in einer großen Eisenkugel zwei kleine Höhlungen befindlich, in die man zwei Magnete hineinstecken kann (was am besten geht, wenn die Eisenkugel aus zwei Hälften besteht, die auseinander- und zusammengeklappt werden können), und zwar den einen derartig, daß er auf einer Nadelspitze schwebt und frei schwingen kann, so beobachtet man in diesem Falle, daß seine Schwingungen viel langsamer sind, als wenn man die Eisenhülle fortnimmt und die Schwingungen bei gleicher relativer Lage der Magnete in Luft beobachtet. Diese Erscheinung ist schon zu beobachten, wenn man einen etwa 2 cm dicken und 4 cm hohen Eisenring um eine kleine Kompaßnadel legt, welche unter dem Einflusse eines etwa 10 cm entfernten Magneten schwingt. (Vgl. Fig. 23.) Sowie man den Eisenring wieder fortnimmt, werden die Schwingungen der Kompaßnadel viel schneller. Da die Schwingungsdauer der Nadel nur abhängt von ihrem mechanischen Trägheitsmoment und der auf ihre Pole wirkenden magnetischen Kraft, und zwar um so kleiner wird, je mehr letztere

wächst, so kann man aus diesem Experiment direkt schließen, daß die magnetische Kraft durch den Eisenring herabgedrückt wird, da das Trägheitsmoment der Nadel konstant bleibt.

Diese unter dem Namen der „magnetischen Schirmwirkung“ des Eisens bekannte Erscheinung spricht nun tatsächlich für das Vorhandensein des in der Formel (21) ausgesprochenen Gesetzes. Je kleiner man nämlich die übrigbleibenden, von Eisen freien Höhlungen macht, je mehr man also sich den im Gesetz (21) gemachten Voraussetzungen nähert, desto stärker wird die Schirmwirkung des Eisens, bis daß man schließlich, im Grenzfalle, eine Herabsetzung des  $\mathfrak{F}$  von dem in Luft stattfindenden Werte in einem Betrage finden würde, welcher der Permeabilität des Eisens entspricht. Aber dieser Grenzfall ist in dem festen Material natürlich nicht erreichbar. Außerdem stellt sich der quantitativen Verwertung dieses Versuches eine andere Schwierigkeit entgegen.

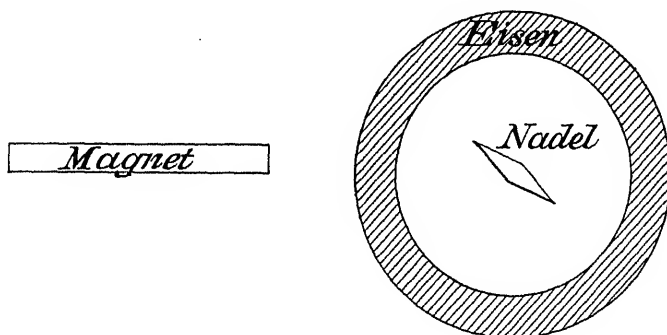


Fig. 28.

Die ganzen Betrachtungen über das erweiterte Coulombsche Gesetz beruhen auf der Annahme, daß die Polstärke eines Magneten sich nicht ändert, wenn man den Magneten in ein anderes Medium bringt. Bei schwach magnetisierbaren Stoffen dürfte ein Einfluß auf die Polstärke zu vernachlässigen sein. Umgibt man aber den Magneten mit Eisen, so ist diese Annahme nicht mehr erlaubt; neuere Versuche sprechen sogar direkt dagegen. Die strenge Theorie der beschriebenen Versuche würde also von ganz anderen Gesichtspunkten aus zu entwickeln sein.

Für die schwach magnetisierbaren para- und diamagnetischen Körper dürfen wir das verallgemeinerte Coulombsche Gesetz und die dadurch gegebene Definition unbedenklich als Grundlage der Theorie annehmen. Dann läßt sich die im ersten Kapitel entwickelte Theorie der Dielektrika auf diese Körper ohne weiteres übertragen. Die Folgerungen dieser Theorie werden sich hier sogar teilweise erheblich vereinfachen lassen, weil die Permeabilität von 1 so wenig verschieden ist. Auf die ferro-

magnetischen Körper dagegen läßt sich die Theorie, die ja  $\mu$  als Konstante ansieht, nicht direkt übertragen. Auf die Behandlung dieser Körper werden wir am Schluß des Kapitels zurückkommen und dabei auch das Verhalten der permanenten Magnete, die selber zu dieser Klasse von Körpern gehören, von neuen Gesichtspunkten aus behandeln.

## 18. Unterscheidung von magnetischer Kraft und magnetischer Erregung.

Gehen wir von der Vorstellung aus, daß es uns möglich wäre, durch irgendwelche Mittel die Polstärke eines Magneten unter allen Umständen unverändert zu erhalten, so würde der vom Pol  $m$  ausgehende Kraftfluß nach Abschnitt 11 im leeren Raume  $4\pi m$  betragen, im materiellen Medium dagegen  $4\pi m/\mu$  oder es wäre nach dem Gaußschen Satze

$$\mu \int \mathfrak{H}_n ds = 4\pi m \quad (22)$$

bzw., wenn mehrere Pole innerhalb der Fläche liegen:

$$\mu \int \mathfrak{H}_n ds = 4\pi \Sigma m.$$

Man nennt  $\mu \mathfrak{H}_n ds$  den Induktionsfluß durch das Flächenelement  $ds$  und hat entsprechend dem Begriff der elektrischen Erregung  $\mathfrak{D}$ , die mit der elektrischen Kraft  $\mathfrak{E}$  durch die Gleichung

$$\mathfrak{D} = \epsilon \mathfrak{E}$$

zusammenhängt, auch für den Magnetismus einen neuen Vektor eingeführt, den man mit  $\mathfrak{B}$  zu bezeichnen und die magnetische Erregung oder die magnetische Induktion zu nennen pflegt. Er hat in einem homogenen isotropen Medium an jeder Stelle die Richtung der magnetischen Kraft  $\mathfrak{H}$  und ist mit  $\mathfrak{H}$  durch die Gleichung verknüpft:

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}. \quad (23)$$

Dann nimmt Gleichung (22) die Form an:

$$\int \mathfrak{B}_n ds = 4\pi \Sigma m. \quad (22')$$

In jedem homogenen Medium ist der Induktionsfluß durch jede geschlossene Fläche (unter Berücksichtigung der in Abschnitt 10 erwähnten Einschränkung) gleich  $4\pi$  mal der Summe der eingeschlossenen Polstärken.

Für ein homogenes Medium ist  $\mu$  eine Konstante und kann daher ebensogut in (22) vor wie in (22') unter dem Integralzeichen stehen. Aber die Gleichung sagt aus, daß der Induktionsfluß durch eine geschlossene Fläche von der magnetischen Natur des Mediums, in dem die Fläche verläuft, gar nicht abhängt, da er ja nur durch die Summe der

eingeschlossenen Polstärken bedingt ist. Daher kann sich der Induktionsfluß durch die Fläche  $s$  auch nicht ändern, wenn die Permeabilität  $\mu$  an verschiedenen Stellen der Fläche verschieden ist. Man kann die Formel (22') daher auch ausdehnen auf den Fall, daß der Raum mit mehreren verschiedenartigen Medien mit den Konstanten  $\mu_1, \mu_2 \dots$  ausgefüllt ist und die Fläche  $s$  in mehreren dieser Medien verläuft oder daß überhaupt das magnetische Feld von einem inhomogenen Medium erfüllt ist, d. h. von einem solchen, in welchem die Permeabilität  $\mu$  von Ort zu Ort wechselt.

## 19. Die Grenzbedingungen.

Wenn zwei Medien von den Permeabilitäten  $\mu_1$  und  $\mu_2$  aneinander stoßen, so lassen sich über den Zusammenhang der magnetischen Felder zu beiden Seiten der Grenzfläche die gleichen Betrachtungen anstellen, wie in I, 32 für das elektrische Feld an der Grenzfläche von Isolatoren. Aus der Anwendung des Satzes über den Induktionsfluß auf die zur Grenzfläche normale Komponente folgt analog der Gleichung (74) S. 69

$$(\mathfrak{D}_n)_1 = (\mathfrak{D}_n)_2$$

hier die Beziehung

$$(\mathfrak{B}_n)_1 = (\mathfrak{B}_n)_2 \quad (24)$$

oder

$$\mu_1 (\mathfrak{H}_n)_1 = \mu_2 (\mathfrak{H}_n)_2,$$

d. h. beim Uebergang von einem Medium zu einem anderen ändert sich die nach der Normale ihrer Grenzfläche genommene Komponente der magnetischen Kraft unstetig, der Induktionsfluß bleibt aber stetig.

Aus der Anwendung des Satzes vom Linienintegral der magnetischen Kraft [siehe Abschnitt 8, Gleichung (2)] folgt analog der Gleichung

$$(\mathfrak{E}_t)_1 = (\mathfrak{E}_t)_2$$

hier die Gleichung

$$(\mathfrak{H}_t)_1 = (\mathfrak{H}_t)_2 \quad (25)$$

oder

$$\frac{(\mathfrak{B}_t)_1}{\mu_1} = \frac{(\mathfrak{B}_t)_2}{\mu_2},$$

d. h. beim Durchgang durch die Grenzfläche zweier Medien ändert sich die Tangentialkomponente der magnetischen Kraft stetig, die tangentiale Komponente der Induktion dagegen unstetig.

Diese Grenzbedingungen führen unmittelbar zu einer Definition der Größen  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{H}$ , die auch für das Innere fester Substanzen gültig ist, indem sie auf der Vorstellung von Kraftmessungen an einem Einheitspole in Hohlräumen der magnetisierten Substanz beruht (siehe I, 33).

Denkt man sich den Hohlraum in Gestalt eines luftleeren schmalen Schlitzes, der senkrecht zu den Kraftlinien steht, so geht der Induktionsfluß ohne Aenderung durch ihn hindurch. Da im leeren Raum, d. h. für  $\mu = 1$ ,  $\mathfrak{H}$  und  $\mathfrak{B}$  identisch sind, so mißt die Kraftwirkung auf einen Einheitspol in einem solchen Spalt die Größe der Induktion  $\mathfrak{B}$ , die in der umgebenden Materie an der betreffenden Stelle des Körpers besteht. Gibt man dagegen dem Hohlraum die Gestalt eines langen dünnen Zylinders, dessen Achse parallel den Kraftlinien verläuft, so gilt für die Mitte dieses Zylinders die zweite Grenzbedingung; das  $\mathfrak{H}$  im leeren Raume des Zylinders wird gleich dem  $\mathfrak{H}$  in der umgebenden Materie sein. Die Kraftwirkung auf den Einheitspol in einem solchen langgestreckten Zylinder mißt also die Größe der Feldstärke  $\mathfrak{H}$  an der betreffenden Stelle des Körpers.

## 20. Das Brechungsgesetz der magnetischen Kraftlinien.

Aus der Verbindung der Grenzbedingungen für die normale und die tangentielle Komponente ergibt sich für die magnetischen Kraftlinien das gleiche Brechungsgesetz, wie es in I, 34 für die elektrischen Kraftlinien abgeleitet wurde:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 : \operatorname{tg} \varphi_2 = \mu_1 : \mu_2. \quad (26)$$

Die magnetischen Kraftlinien werden beim Uebergang von einem Medium 1 zu einem Medium 2 in der Einfallsebene gebrochen und zwar derart, daß die trigonometrischen Tangenten des Einfalls- und Brechungswinkels sich verhalten wie die Permeabilitäten  $\mu_1$  und  $\mu_2$  der Medien.

Diese Brechung ist bei den para- und diamagnetischen Körpern wegen der geringen Abweichung ihrer Permeabilitäten voneinander und von 1 nur sehr gering. Sie ist dagegen außerordentlich groß bei den ferromagnetischen Körpern.

Nach (26) ergibt sich, daß im stärker paramagnetischen Medium die Kraftlinie weiter von der Normalen abgelenkt ist. Beim Uebergang von Luft in Eisen würden z. B. für  $\mu_2 = 2300$  schon bei einem Einfallswinkel von  $1^\circ$  die Kraftlinien um  $87^\circ 36'$  von der Richtung der einfallenden Strahlen abgelenkt erscheinen, d. h. der zugehörige Brechungswinkel wäre  $88^\circ 36'$ . Selbst bei Eisensorten, welche den kleinsten Wert der Magnetisierungskonstanten besitzen, wie glasharter Klavierdraht, ist die Brechung der Kraftlinien noch sehr stark. So ergeben sich z. B. für den Wert  $\mu_2 = 118$ , der bei dieser Stahlsorte beobachtet ist, folgende zusammengehörende Werte von  $\varphi_2$  und  $\varphi_1$  (es ist  $\mu_1 = 1$  gesetzt):

$$\mu_2 : \mu_1 = 118$$

$\varphi_1$	$\varphi_2$
0°	0°
1	64° 10'
2	76 20
3	80 50
4	83 5
5	84 30
6	85 25

Durch die starke Brechung, welche die Kraftlinien beim Uebergang an der Grenze Luft—Eisen erfahren, liegen dieselben im Eisen viel näher beieinander, als in der Luft, wie aus der Fig. 24 sofort zu erkennen ist,

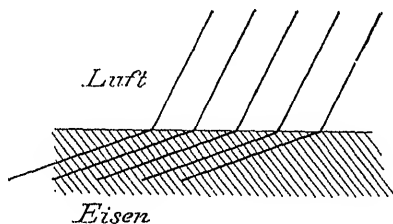


Fig. 24.

welche sich auf eine sogar noch sehr schwach magnetisierbare Eisensorte beziehen könnte. Man kann daher auch sagen: Eisen konzentriert die Kraftlinien eines Magnetfeldes in sich.

Auch die Schirmwirkung eines Eisenringes ergibt sich aus dem Brechungsgesetz der Kraftlinien. Denn wenn eine Kraftlinie an der Stelle P der Außenseite in einen Eisenring etwas schief (d. h. mit einem kleinen Winkel gegen das Einfallslot) eintritt, so wird sie so gebrochen, daß sie die Innenseite des Ringes entweder gar nicht erreicht oder an einer Stelle P', welche nicht mehr auf demselben Radiusvektor wie P liegt. Deshalb ergibt sich in roher Weise der beigezeichnete Verlauf der Kraftlinien der Fig. 25, aus der man erkennt, daß die Dichte der Kraftlinien, also auch die Feldstärke, im Innern des Ringes kleiner ist, als außerhalb desselben.

Für den Fall eines Ellipsoides, das sich in einem homogenen Felde befindet, läßt sich die Konzentration der Kraftlinien genau berechnen. Wir besprechen den Fall an einer späteren Stelle.

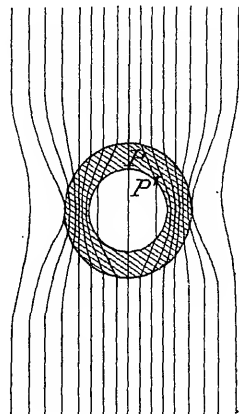


Fig. 25.



## 21. Der induzierte Magnetismus.

Das Potential eines permanenten Magneten läßt sich für den Außenraum, wie in Abschnitt 13 gezeigt wurde, in der gleichen Form darstellen, wie das Potential einer elektrischen Massenverteilung. Die dortigen Ausführungen setzten voraus, daß der den Magneten umgebende Raum leer sei. Ist er von Materie erfüllt, deren Permeabilität  $\mu$  ist, so würden die für den leeren Raum geltenden Ausdrücke mit  $\frac{1}{\mu}$  zu multiplizieren sein, um das Potential für diesen Fall zu ergeben. Befinden sich aber Grenzflächen von Stoffen von verschiedener Magnetisierbarkeit im Felde, so lehren die gleichen Betrachtungen, wie sie in I, 35 durchgeführt sind, daß der vollständige Ausdruck für das Potential nicht bloß diejenigen Glieder enthält, welche sich direkt auf die das Feld erregenden Ursachen (Magnetismusk mengen der permanenten Magnete) beziehen, sondern daß dazu noch Integrale über jene Grenzflächen kommen. Diese rühren daher, daß die Normalkomponente der magnetischen Kraft nach (24) an dieser Grenzfläche sich unstetig ändert. Von einer sprungweisen Aenderung des Potentials selbst, die wir auf elektrischem Gebiete unter I, 36 behandelt hatten, können wir beim Magnetismus absehen, da die Erfahrung hierfür keine Anhaltspunkte gibt. Es bleiben also die Glieder von der Form

$$-\frac{1}{4\pi} \int \frac{ds}{r} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_1 - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_2 \right]$$

übrig, bezogen auf alle Grenzflächen von Substanzen verschiedener Magnetisierbarkeit im magnetischen Felde. Da nach (24)

$$\mu_1 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_1 = \mu_2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_2$$

ist, so gehen diese Integrale in die Form über:

$$-\frac{\mu_2 - \mu_1}{4\pi \mu_2} \int \frac{ds}{r} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_1. \quad (27)$$

Setzen wir

$$\frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_1 = -4\pi \eta_{mi}, \quad (28)$$

so nehmen diese Glieder des Potentialausdrucks die Form an:

$$\int \frac{\eta_{mi} ds}{r}, \quad (29)$$

d. h. die Form des Potentials einer magnetischen Flächenbelegung von der Dichte  $\eta_{mi}$ . Jede Grenzfläche verschiedener Stoffe wirkt also im magnetischen Feld so, als ob sie eine magnetische Flächenbelegung trüge, deren Dichte von der Normalkomponente der Feldstärke an der betreffenden Stelle abhängt. Da

$$(\xi_n)_1 = - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_1$$

ist, so ist

$$\eta_{mi} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{4\pi\mu_2} (\xi_n)_1. \quad (28')$$

Dabei ist die in das Medium 1 hineinweisende Richtung der Normalen der Grenzfläche als positive Normalenrichtung gerechnet, entsprechend den Festsetzungen auf S. 76.

Die soeben besprochene Tatsache, daß die Einlagerung eines Mediums 2 in das magnetische Feld eines Mediums 1 so wirkt, als ob die Grenzfläche der beiden Medien der Sitz magnetischer Belegungen wäre, kann man auch dadurch passend ausdrücken, daß man sagt, es sei das Medium 2 in dem magnetischen Felde selbst zu einem Magneten geworden mit flächenhaften, an seinen Grenzen befindlichen Polen. Diesen (scheinbaren) Magnetismus nennt man induzierten Magnetismus. Ist  $\mu_2 > \mu_1$ , was z. B. stattfindet, wenn man ein Eisenstück in das sonst von Luft erfüllte Magnetfeld bringt, so ist nach (28') die induzierte magnetische Belegung  $\eta_{mi}$  negativ, falls  $\xi_n$  negativ ist, d. h. falls die Kraftlinien in das Eisen eintreten. Dagegen ist  $\eta_{mi}$  positiv, falls die Kraftlinien aus dem Eisen austreten. Diese Verhältnisse kehren sich um, wenn  $\mu_2 < \mu_1$  ist, z. B. beim Luftraum im Eisen. Man kann daher auch sagen, positive Pole induzieren auf der ihnen zugewandten Grenzfläche eines Körpers positive oder negative Pole, je nachdem seine Magnetisierungskonstante kleiner oder größer ist als die des Mediums, in welchem die induzierenden Pole liegen.

Es mag hier nochmals hervorgehoben werden, daß diese induzierten magnetischen Belegungen nur scheinbare, und keine wahren sind. Mit Zuhilfenahme dieser Vorstellung kann man sich aber oft von den beobachteten Erscheinungen sehr bequem Rechenschaft geben. So erklärt sich z. B. das Verhalten von Eisenfeile, welche in ein magnetisches Feld gebracht wird, und welche die Kraftlinien gut abzeichnet, ohne weiteres, und ebenso die Verstärkung des Feldes zwischen zwei Polen, wenn man Eisen in den Luftraum zwischen sie bringt. Für diese letztere Erscheinung soll später noch ein anschaulicheres Gesetz aufgestellt werden.

Ebenso erklärt sich durch den induzierten Magnetismus, daß para-

angezogen werden, einerlei mit welcher Art Magnetismus die letzteren behaftet sind. Denn sie induzieren auf der ihnen zugewandten, d. h. nächsten Grenzfläche des Körpers stets Pole von einem Vorzeichen, welches ihrem eigenen entgegengesetzt ist, und auf die sie daher anziehend wirken müssen.

In derselben Weise ergibt sich, daß diamagnetische Körper von den induzierenden Polen stets abgestoßen werden, wie es z. B. an Wismutstücken zu beobachten ist.

Schließlich erklärt sich aus dem ausgesprochenen Satze über den induzierten Magnetismus, speziell aus der Formel (27), daß paramagnetische Körper in einem Medium von höherer Magnetisierungskonstante so wirken, wie diamagnetische Körper im leeren Raum, d. h. unter Umständen können paramagnetische Körper scheinbar ein Verhalten wie diamagnetische zeigen.

Schreibt man Formel (28') in der Form

$$\eta_{mi} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{4\pi\mu_1\mu_2} (\mathfrak{B}_n)_1,$$

so läßt sie sich in Berücksichtigung des Umstandes, daß  $(\mathfrak{B}_n)_1 = (\mathfrak{B}_n)_2$  ist, leicht zu einer Summe zweier Glieder umgestalten, in der jedes Glied sich nur auf eine der beiden Substanzen bezieht:

$$\eta_{mi} = -\frac{\mu_1 - 1}{4\pi\mu_1} (\mathfrak{B}_n)_1 + \frac{\mu_2 - 1}{4\pi\mu_2} (\mathfrak{B}_n)_2$$

oder

$$\eta_{mi} = -\frac{\mu_1 - 1}{4\pi} (\mathfrak{S}_n)_1 + \frac{\mu_2 - 1}{4\pi} (\mathfrak{S}_n)_2,$$

wobei das Vorzeichen dadurch bestimmt ist, daß die positive Normale von 2 nach 1 gerichtet ist. Die scheinbare Flächenbelegung erscheint dann als Differenz zweier entgegengesetzter Wirkungen, die von den beiden Substanzen an der Grenzfläche ausgeübt werden. Diese Wirkung aber können wir, ebenso wie in der Theorie der Dielektrika, als eine das ganze Medium durchsetzende magnetische Polarisation seiner kleinsten Elemente auffassen. Wir charakterisieren sie durch einen dem Vektor  $\mathfrak{B}$  der Elektrizitätslehre entsprechenden neuen Vektor  $\mathfrak{J}$ , der in homogenen isotropen Medien die Richtung des Vektors  $\mathfrak{S}$  hat und mit ihm bzw. mit  $\mathfrak{B}$  durch die Gleichungen zusammenhängt:

$$\mathfrak{J} = \frac{\mu - 1}{4\pi} \mathfrak{S} = \frac{\mu - 1}{4\pi\mu} \mathfrak{B}. \quad (30)$$

Diesen Vektor nennt man die induzierte Magnetisierung. Er hat zugleich die Bedeutung des magnetischen Momentes der Raumeinheit. Zwischen den drei Größen  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{S}$  und  $\mathfrak{J}$  besteht die Beziehung:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{S} + 4\pi\mathfrak{J}. \quad (31)$$

Damit ist auch der magnetische Induktionsfluß innerhalb der Materie in zwei Teile zerlegt. Im leeren Raume sind  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{H}$  identisch. In der Materie geht ein Teil des Induktionsflusses als Kraftfluß durch den Aether und der andere Teil als Polarisationsfluß durch die materiellen Teilchen. Dieser Polarisationsfluß ist aber bei den diamagnetischen Teilchen dem Kraftfluß entgegengerichtet; denn für diese ist  $\mu = -1$ , also auch  $\mathfrak{B}$  negativ für positives  $\mathfrak{H}$ . Demnach können wir die in der Theorie der Dielektrika entwickelte Vorstellung über das Zustandekommen der dielektrischen Polarisation, die Vorstellung von einer Verschiebung elektrischer Ladungen in den kleinsten Teilchen der Substanz unter dem Einfluß des elektrischen Feldes, auf die magnetische Polarisation in Form der Vorstellung von Verschiebungen magnetischer Massen in den kleinsten Teilchen der Substanz unter dem Einfluß des magnetischen Feldes nicht übertragen. Denn in den diamagnetischen Substanzen würde diese Verschiebung ja gegen die Richtung der magnetischen Kraft erfolgen müssen. Die Uebertragung der Theorie der Dielektrika auf die magnetischen Substanzen liefert uns zwar einen für die Berechnung der Erscheinungen durchaus brauchbaren mathematischen Ansatz. Aber die physikalische Deutung des magnetischen Verhaltens der Materie muß offenbar in anderen Vorstellungen als beim dielektrischen Verhalten der Materie gesucht werden. Solche Vorstellungen liefert uns das Gebiet des reinen Magnetismus nicht. Wir werden später auf die Frage der physikalischen Deutung des Para- und Diamagnetismus zurückkommen.

In vielen Fällen läßt sich das magnetische Verhalten einer Substanz bequemer durch den Faktor  $\frac{\mu-1}{4\pi}$  als durch  $\mu$  selbst charakterisieren. Man

hat deshalb diesen Faktor durch ein besonderes Symbol,  $\kappa$ , bezeichnet und ihm einen besonderen Namen, Magnetisierungskoeffizient oder magnetische Suszeptibilität, gegeben. Er ist für diamagnetische Substanzen negativ, für paramagnetische positiv, hat aber für alle Substanzen dieser beiden Gruppen wegen der geringen Verschiedenheit der Konstante  $\mu$  von 1 außerordentlich kleine Werte, wie die folgende Tabelle zeigt, die die gleichen Substanzen enthält, für die früher die Werte von  $\mu$  angegeben worden sind.

	$\kappa$
Wismut . . . . .	$-14 \times 10^{-6}$
Quecksilber . . . . .	$-2 \times 10^{-6}$
Wasser . . . . .	$-0,76 \times 10^{-6}$
Luft . . . . .	$+0,029 \times 10^{-6}$
Platin . . . . .	$+30 \times 10^{-6}$
Wäßr. Eisenchloridlösung	$+60 \times 10^{-6}$

Für ferromagnetische Substanzen dagegen mit ihren sehr hohen  $\mu$ -Werten ist  $\kappa$  nahezu  $= \frac{\mu}{4\pi}$ , hat also ebenfalls sehr hohe positive Werte.

## 22. Kraftfluß und Induktionsfluß.

Solange die Kraftlinien in einem homogenen Medium verlaufen, gilt der Satz, daß der Kraftfluß in einer Krafttröhre konstant ist. Beim Uebergang aus einem Medium in ein anderes gilt das aber nicht mehr; denn die Normalkomponente der magnetischen Kraft erfährt ja dabei eine sprungweise Aenderung. Oder — um es anders auszudrücken — die induzierten Flächenbelegungen wirken als Pole, in denen Kraftlinien enden, oder von denen neue Kraftlinien ausgehen. Die Gültigkeit des obigen Satzes aber verlangt, daß die Krafttröhre keine Pole umschließt. Betrachtet man dagegen statt des Kraftflusses  $\oint \mathfrak{H}_n ds$  durch das Flächenelement  $ds$  den Induktionsfluß  $\oint \mathfrak{B}_n ds = \mu \oint \mathfrak{H}_n ds$ , so ist dieser im ganzen Verlaufe einer von Kraftlinien gebildeten Röhre, auch beim Uebergang in andere Medien, konstant. Aus diesem Grunde ist es zweckmäßig, Felder in nicht homogenen Medien durch den Induktionsfluß, nicht durch den Kraftfluß zu charakterisieren, und dementsprechend an die Stelle des in Abschnitt 11 eingeführten Begriffes der Kraftlinienzahl den Begriff der Zahl der Induktionslinien einzuführen. Dabei ist zu bemerken, daß in der Praxis häufig das Wort Kraftlinienzahl für den Begriff „Zahl der Induktionslinien“ gebraucht wird. Es empfiehlt sich, um Verwechslungen zu vermeiden, die beiden Begriffe auseinanderzuhalten.

Das zweite Differentialgesetz des magnetischen Feldes, das wir in Abschnitt 9 für ein homogenes Medium aufgestellt hatten, muß für den allgemeinen Fall eines von beliebigen Medien erfüllten magnetischen Feldes ebenfalls mit Hilfe des Induktionsflusses und nicht des Kraftflusses abgeleitet werden. Es gilt an Stelle der Gleichung (5) für ein inhomogenes Medium die Gleichung

$$\oint \mathfrak{B}_n ds = \int \mu \oint \mathfrak{H}_n ds = 0 \quad (5')$$

und daraus folgt in bekannter Weise die Differentialgleichung<sup>1)</sup>

$$\frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial z} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial \mu \cdot \mathfrak{H}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mu \cdot \mathfrak{H}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mu \cdot \mathfrak{H}_z}{\partial z} = 0, \quad (6')$$

welche also ein Nahwirkungsgesetz der magnetischen Kraft in einem inhomogenen Medium ist, d. h. einem solchen, in

<sup>1)</sup> Vektoranalytisch  $\text{div } \mathfrak{B} = 0$ .

welchem  $\mu$  eine Funktion der Koordinaten ist<sup>1)</sup>. Die Formel (6') geht in die früher aufgestellte Formel (6) über, falls  $\mu$  konstant ist.

Nach dem, was wir in Abschnitt 13 über die Konstitution der Magnete auseinandergesetzt haben, würde Gleichung (5') auch dann noch gelten, wenn die Fläche, über die die Integration sich erstreckt, den Magneten durchschneidet, vorausgesetzt daß wir uns diesen Schnitt als einen physikalischen Schnitt denken, der den Magneten wieder in zwei Teile von gleichen Polstärken zerlegt, oder daß wir die Molekularmagnete, aus denen wir uns den ganzen Magneten aufgebaut denken, als Gebilde behandeln, die niemals in zwei entgegengesetzt magnetische Teile zerlegt werden können. Unter dieser Voraussetzung gilt Gleichung (5') ganz allgemein im ganzen Raume. Sie ist der mathematische Ausdruck dafür, daß es keinen wahren Magnetismus gibt in dem Sinne, wie es in der Elektrizität wahre Elektrizität gibt, oder daß die magnetischen Induktionslinien immer in sich geschlossene Kurven sind.

### 23. Die entmagnetisierende Wirkung der induzierten Belegung.

Gehen die Kraftlinien in ein Medium mit höherer Permeabilität über, so tritt immer eine Verminderung der Feldstärke ein, entsprechend den Grenzbedingungen, ausgenommen den Fall, daß die Kraftlinien der Grenzfläche parallel laufen. Denn wenn  $\mathfrak{H}_a$  die äußere,  $\mathfrak{H}_i$  die innere Feldstärke,  $\mathfrak{H}_{na}$  und  $\mathfrak{H}_{ni}$  die normalen,  $\mathfrak{H}_{ta}$  und  $\mathfrak{H}_{ti}$  die tangentialen Komponenten bedeuten, so ist

$$\mathfrak{H}_a^2 = \mathfrak{H}_{na}^2 + \mathfrak{H}_{ta}^2, \quad \mathfrak{H}_i^2 = \mathfrak{H}_{ni}^2 + \mathfrak{H}_{ti}^2,$$

$$\mu_a \mathfrak{H}_{na} = \mu_i \mathfrak{H}_{ni}, \quad \mathfrak{H}_{ta} = \mathfrak{H}_{ti},$$

also

$$\mathfrak{H}_i^2 = \left( \frac{\mu_a}{\mu_i} \right)^2 \mathfrak{H}_{na}^2 + \mathfrak{H}_{ta}^2 = \mathfrak{H}_a^2 - \frac{\mu_i^2 - \mu_a^2}{\mu_i^2} \mathfrak{H}_{na}^2.$$

Ist  $\mu_i > \mu_a$ , so ist  $\mathfrak{H}_i^2 < \mathfrak{H}_a^2$ .

Für alle para- und diamagnetischen Körper ist  $\mu$  so wenig von 1 verschieden, daß das letzte Glied der obigen Formel vernachlässigt und die innere Feldstärke sowohl ihrer Größe wie ihrer Richtung nach der äußeren gleich gesetzt werden kann. Ganz anders dagegen liegen die

<sup>1)</sup> Streng genommen tritt die Formel (6') an Stelle der einfacheren (6) immer in Anwendung, wenn z. B. Eisen in einem Magnetfeld sich befindet, dessen Stärke nicht überall dieselbe ist, da in den stark magnetisierbaren Metallen  $\mu$  von  $\mathfrak{H}$  abhängt. Ein solches Eisenstück wirkt daher so, als ob nicht nur seine Oberfläche

Verhältnisse bei den ferromagnetischen Körpern. Gehen die Kraftlinien von Luft in Eisen über, so ist  $\mu_a = 1$ ;  $\mu_i$  aber kann Werte von 1000 und darüber haben. Dann ist immer:

$$\mathfrak{H}_i^2 = \mathfrak{H}_a^2 - \mathfrak{H}_{na}^2 = \mathfrak{H}_{ia}^2.$$

$\mathfrak{H}_{ni}$  ist ein so kleiner Bruchteil von  $\mathfrak{H}_{na}$ , daß die innere Feldstärke wesentlich durch die tangentielle Komponente der äußeren Kraft bestimmt wird. Treten die Kraftlinien normal ein, so ist das innere Feld außerordentlich schwach, und entsprechend erreicht auch die Magnetisierung des Materials nur mäßige Werte.

Diese Tatsache ist nur ein anderer Ausdruck für unsere Grenzbedingungen, ebenso wie die Vorstellung der induzierten Flächenbelegungen nur eine andere Form in der Darstellung der Grenzbedingungen ist. Geht man von dieser letzteren Vorstellung aus, so kann man die Herabminderung der Feldstärke als Wirkung der induzierten Belegungen auffassen. Denn da, wo die Kraftlinien in das Eisen eintreten, induzieren sie eine (scheinbare) negative Belegung. Diese muß im äußeren Medium die ursprünglich vorhandene magnetische Kraft verstärken, dagegen im Eisen der Kraft des ursprünglich vorhandenen Feldes entgegenwirken. Oder, um es noch anders auszudrücken, der von außen herantretende Kraftfluß wird von der induzierten Belegung zum größten Teile aufgefangen. In diesem Sinne pflegt man dann zu sagen, daß die induzierte Belegung einen entmagnetisierenden Einfluß auf den eingelagerten Körper ausübt. Dieser Einfluß hat je nach der Gestalt des letzteren verschiedene Größe; er muß um so größer ausfallen, je mehr die Oberfläche des Körpers senkrecht zu den Kraftlinien des Feldes verläuft, dagegen um so geringer, je mehr die Oberfläche des Körpers den Kraftlinien des Feldes parallel liegt, da die Dichte der induzierten Belegung nur von der Normalkomponente  $\mathfrak{H}_n$  des Feldes abhängt.

So ist z. B. der entmagnetisierende Einfluß einer dünnen Eisenscheibe sehr groß, wenn man sie senkrecht zu den Kraftlinien eines homogenen Feldes stellt. Da auf den beiden Seiten der Eisenscheibe der induzierte Magnetismus von gleicher Größe, aber verschiedenem Vorzeichen sein muß, so heben sich dessen Wirkungen auf das äußere Medium auf, falls die Platte sehr dünn ist. Es ist also die Feldstärke  $\mathfrak{H}_a$  in ihm gleich der ursprünglichen Stärke des homogenen Feldes, welche mit  $\mathfrak{H}$  bezeichnet sein möge. Dagegen ist die Feldstärke in der Eisenplatte

$$\mathfrak{H}_i = \frac{\mu_a}{\mu_i} \mathfrak{H},$$

d. h. bei Eisen eventuell nur der 2000ste Teil der ursprünglichen Feldstärke.

Bringt man dagegen einen sehr langen und dünnen Eisenzylinder (Draht) in ein homogenes Magnetfeld in der Weise, daß die Achse des Zylinders parallel zu den Kraftlinien des Feldes liegt, so ist der entmagnetisierende Einfluß sehr schwach, ja er verschwindet überhaupt, wenn der Zylinder unendlich dünn im Vergleich zu seiner Länge ist. Denn dann liegt die Oberfläche des Eisenkörpers im wesentlichen überhaupt nur parallel den Kraftlinien, wenn man nämlich absieht von den unendlich kleinen Endflächen des Zylinders. In diesem Falle ist also  $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_a = \mathfrak{H}$ , d. h. die ursprüngliche Feldstärke wird durch den in das Feld gebrachten Eisenkörper an keiner Stelle geändert. — In gewissen Fällen, d. h. bei gewisser Gestaltung des magnetischen Feldes, die wir später im III. Kapitel betrachten wollen, ist es möglich, einen Körper tatsächlich so in das Feld zu bringen, daß seine Oberfläche überall parallel den Kraftlinien des ursprünglichen Feldes ist. In diesem Falle kann die Feldstärke durch die Einlagerung des Körpers nirgends geändert werden, da die Dichte der induzierten Belegung überall Null ist. Die Gestalt der Kraftlinien des Feldes bleibt dann also auch völlig ungeändert; dagegen wächst der Induktionsfluß und entsprechend die Dichte der Induktionslinien im Verhältnis der Permeabilität des Körpers zu der der Umgebung. Bringt man also z. B. Eisen in der angegebenen Weise in ein Feld, welches in Luft liegt, so ist die Anzahl der Kraftlinien im Eisen etwa 2000mal größer als die Anzahl der Kraftlinien, welche vorher in dem Luftraume verliefen, der jetzt von Eisen besetzt ist.

Lagert man ein Medium 2 mit kleiner Magnetisierungskonstante in ein solches mit großer, so übt die induzierte Belegung in 2 nicht einen entmagnetisierenden Einfluß aus, sondern einen verstärkenden. Hat man sich z. B. in einem Eisenkörper ein homogenes Magnetfeld der Stärke  $\mathfrak{H}$  hergestellt und stellt man eine dünne Luftschicht in ihm her, welche senkrecht zu den Kraftlinien verläuft, so ist die Feldstärke in ihr etwa 2000mal größer als im Eisen. In einem Lufröhrchen dagegen, welches den Kraftlinien parallel verläuft, würde die Feldstärke denselben Wert wie im Eisen besitzen.

## 24. Kugel und Ellipsoid im homogenen Magnetfelde.

Die innere Magnetisierung eines Körpers hängt nach dem vorhergehenden von seiner Form ab. Von besonderer Wichtigkeit sind diejenigen Formen, bei denen ein homogenes Feld eine homogene Magnetisierung hervorruft. Die Betrachtungen in Abschnitt 39 des ersten Kapitels lassen sich vollständig auf die Magnetisierung übertragen. Nur Körper



von ellipsoidischer Form werden bei Einbringung in ein homogenes Magnetfeld in ihrem Inneren durchaus gleichmäßig magnetisiert. Nach Formel (103) in dem genannten Abschnitt ist, wenn die Koordinatenachsen in die Richtung der Ellipsoidachsen gelegt werden:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{H}_{ix} &= \frac{1}{1 + \kappa L} \mathfrak{H}_{0x} \\ \mathfrak{H}_{iy} &= \frac{1}{1 + \kappa M} \mathfrak{H}_{0y} \\ \mathfrak{H}_{iz} &= \frac{1}{1 + \kappa N} \mathfrak{H}_{0z} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

wo  $L, M, N$  von den Bestimmungsstücken des Ellipsoides abhängen. Wir beschränken uns auf Rotationsellipsoide, die in Richtung ihrer Rotationsachse magnetisiert werden, und nehmen diese Achse als  $X$ -Achse. Dann ist

$$\mathfrak{H}_0 = (1 + \kappa L) \mathfrak{H}_i. \quad (33)$$

Die Differenz  $\mathfrak{H}_0 - \mathfrak{H}_i = \mathfrak{H}_e$  bezeichnet man als die entmagnetisierende Intensität. Sie ist

$$\mathfrak{H}_e = \kappa L \mathfrak{H}_i = L \mathfrak{J}. \quad (34)$$

Die Größe  $L$  nennt man in diesem Zusammenhange den Entmagnetisierungsfaktor. Er hat, wie in I, 39 ausgeführt ist, für eine Kugel den Wert  $\frac{4\pi}{3}$ , nimmt für ein abgeplattetes Ellipsoid zu und erreicht für eine flache Scheibe den Wert  $4\pi$ ; in ihr ist, entsprechend den Ausführungen des vorigen Abschnitts,  $\mathfrak{H}_i = \frac{1}{\mu} \mathfrak{H}_0$ . Für ein verlängertes Rotationsellipsoid nimmt  $L$  ab; für ein sehr langgestrecktes Ellipsoid kann es nach der Formel

$$L = 4\pi (1 - e^2) \left( \ln \frac{2}{\sqrt{1 - e^2}} - 1 \right) \quad (35)$$

berechnet werden und geht für  $e = 1$  in den Wert 0 über.

Für den Zusammenhang der Intensität der induzierten Magnetisierung mit der Stärke des magnetisierenden Feldes ergibt sich aus obigen Formeln und aus der Formel (30), die sich in der Form

$$\mathfrak{J} = \kappa \mathfrak{H}_i \quad (30')$$

schreiben läßt, die Beziehung:

$$\mathfrak{J} = \frac{\kappa}{1 + \kappa L} \mathfrak{H}_0. \quad (36)$$

Um starke Magnetisierung zu erreichen, muß  $L$  möglichst klein sein; man verwendet daher möglichst langgestreckte Ellipsoide. Da  $\mathfrak{J}$  das Moment

der Volumeneinheit und das Ellipsoid gleichförmig magnetisiert ist, so hat das Gesamtmoment  $\mathfrak{M}$  des Ellipsoides den Wert

$$\mathfrak{M} = v \cdot \mathfrak{J},$$

wenn  $v$  das Volumen des Ellipsoides bedeutet. Die induzierten Belegungen erzeugen im Außenraum ein Feld von ähnlicher Art wie ein permanenter Magnet, nur daß sich dieses Feld über das homogene magnetisierende Feld lagert. Man kann daher das induzierte magnetische Moment des Ellipsoides nach der gleichen magnetometrischen Methode ermitteln, wie das Moment eines permanenten Magneten (siehe 14 und 15); nur muß man an der Stelle, wo man die Wirkung des Ellipsoides messen will, das magnetisierende Feld in passender Weise kompensieren. Wie das möglich ist, werden wir später besprechen. Hat man auf diese Weise  $\mathfrak{M}$  und dadurch  $\mathfrak{J}$  für ein bestimmtes  $\mathfrak{H}_0$  gefunden, so läßt sich mit Hilfe des Entmagnetisierungsfaktors  $\kappa$  berechnen nach der Formel:

$$\kappa = \frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{H}_0 - L \mathfrak{J}} = \frac{\mathfrak{M}}{v \cdot \mathfrak{H}_0 - L \mathfrak{M}}. \quad (37)$$

## 25. Energie des magnetischen Feldes.

Die Herstellung des magnetischen Feldes erfordert ebenso wie die eines elektrischen Feldes einen gewissen Arbeitsaufwand. Die Größe dieser Arbeit ist ein Maß für die in dem magnetischen Zustand der Materie und des Raumes aufgespeicherte potentielle Energie.

Besitzen wir ein magnetisches Feld, welches angesehen werden kann als herrührend von punktförmigen Polen der Stärken  $m_1, m_2, m_3, m_4$  usw., wie wir es uns z. B. durch lange dünne Stahldrähte verwirklichen können, so ist die potentielle Energie des Magnetfeldes leicht anzugeben. Ist nämlich die Magnetisierungskonstante des Mediums, in welchem die Magnete lagern,  $\mu$ , so wirken zwischen je zwei Polen  $m_h$  und  $m_k$  Kräfte, welche sich als die negativen Differentialquotienten des Ausdrucks

$$U_{hk} = \frac{1}{\mu} \frac{m_h m_k}{r_{hk}}$$

darstellen lassen. Dann ist die gesamte potentielle Energie gegeben durch

$$T = \Sigma U_{hk},$$

wobei die Summe über alle möglichen Kombinationen von  $h, k$  zu erstrecken ist. Man kann nun diese Summe in folgender Weise schreiben:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\{ m_1 \frac{1}{\mu} \left( \frac{m_2}{r_{12}} + \frac{m_3}{r_{13}} + \frac{m_4}{r_{14}} + \dots \right) \right. \\ & \quad + m_2 \frac{1}{\mu} \left( \frac{m_1}{r_{21}} + \frac{m_3}{r_{23}} + \frac{m_4}{r_{24}} + \dots \right) \\ & \quad \left. + m_3 \frac{1}{\mu} \left( \frac{m_1}{r_{31}} + \frac{m_2}{r_{32}} + \frac{m_4}{r_{34}} + \dots \right) + \dots \right\} \end{aligned}$$

Die Klammer des Faktors  $m_1$  bedeutet nun aber das Potential  $\varphi_1$  der magnetischen Kraft am Orte des Poles  $m_1$ . In analoger Bezeichnungsweise gilt daher:

$$T = \frac{1}{2} (m_1 \varphi_1 + m_2 \varphi_2 + m_3 \varphi_3 + \dots) = \frac{1}{2} \Sigma m_h \varphi_h. \quad (38)$$

In Abschnitt 13 haben wir die Wirkung eines permanenten Magneten durch Formel (12) dargestellt als Wirkung einer räumlichen und einer Oberflächenverteilung von Magnetismusemengen. Wendet man darauf die Formel (38) an, so erhält man für die magnetische Energie den Ausdruck:

$$T = \frac{1}{2} \int \rho_m \varphi \, dv + \frac{1}{2} \int \eta_m \varphi \, ds,$$

erstreckt einerseits über den Raum, anderseits über die Oberfläche des gegebenen Magneten, oder in Berücksichtigung von (10) und (11):

$$T = -\frac{1}{2} \int \varphi \left( \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_z}{\partial z} \right) dv - \frac{1}{2} \int \varphi m_n \, ds.$$

Das erste Integral läßt sich durch partielle Integration umgestalten:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \int \varphi \left( \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_z}{\partial z} \right) dv \\ & = -\frac{1}{2} \int \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\varphi m_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\varphi m_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\varphi m_z) \right] dv \\ & \quad + \frac{1}{2} \int \left( m_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + m_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + m_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) dv. \end{aligned}$$

Wendet man ferner den Gaußschen Satz (I, 15) auf das erste der beiden neuen Integrale an und rechnet die positive Normalenrichtung, wie oben S. 152 Gleichung (10), nach innen, so erhält man:

$$\frac{1}{2} \int \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\varphi m_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\varphi m_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\varphi m_z) \right] dv = -\frac{1}{2} \int \varphi m_n \, ds.$$

Setzt man diese Umformungen in den Ausdruck für  $T$  ein, so heben sich die Oberflächenintegrale fort, und es bleibt die Gleichung übrig:

$$T = \frac{1}{2} \int \left[ m_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + m_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + m_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right] dv \quad (39)$$

oder

$$T = - \frac{1}{2} \int [m_x \mathfrak{H}_x + m_y \mathfrak{H}_y + m_z \mathfrak{H}_z] dv.$$

Das Integral wäre über den Raum des Magneten zu erstrecken. Aber man kann es ebensogut über den ganzen unendlichen Raum ausgedehnt denken, da die  $m_x$ ,  $m_y$ ,  $m_z$ , die die Komponenten des permanenten magnetischen Momentes der Volumeinheit sind, außerhalb des Magneten gleich Null sind.

Der gewonnene Ausdruck entspricht der Molekulartheorie der permanenten Magnete. Aber er hat keine direkte praktische Verwertbarkeit für uns. Denn das Integral bezieht sich auf den Innenraum des Magneten, den wir gerade bisher von unserer Betrachtung ausgeschlossen haben. Wir haben bisher nur die äußeren Wirkungen des Magneten der Darstellung unterworfen. Diese äußeren Wirkungen aber können wir nach den Ausführungen in den Abschnitten 12 und 13 eindeutig durch eine bestimmte Verteilung von Magnetismusemengen auf der Oberfläche des Magneten darstellen. Bezeichnen wir die Dichtigkeit dieser fingierten Oberflächenbelegung mit  $\bar{\eta}_m$ , so wäre der der Herstellung einer solchen Oberflächenverteilung entsprechende Wert der mechanischen Arbeitsleistung, also der Wert der dadurch angesammelten potentiellen Energie:

$$T = \frac{1}{2} \int \bar{\eta}_m \varphi ds$$

genommen über die Oberfläche des Magneten. Diese magnetische Verteilung erzeugt einerseits im Außenraum das gegebene Feld, dessen Potential  $\varphi_a$  sein soll, andererseits aber auch im Innenraum ein bestimmtes Feld, dessen Potential durch  $\varphi_i$  bezeichnet werde. Dann ist entsprechend den Ausführungen in I, 16

$$\bar{\eta}_m = - \frac{1}{4\pi} \left( \mu_a \frac{\partial \varphi_a}{\partial n_a} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial n_i} \right),$$

wobei  $\mu_a$  die Permeabilität des äußeren Mediums bedeutet und aus dem Innenraum die magnetische Materie entfernt zu denken ist. Der Ausdruck für die Energie geht dann über in

$$T = - \frac{1}{8\pi} \int \mu_a \frac{\partial \varphi_a}{\partial n_a} \varphi_a ds - \frac{1}{8\pi} \int \frac{\partial \varphi_i}{\partial n_i} \varphi_i ds. \quad (40)$$

Da die Oberfläche des Magneten eine geschlossene Fläche ist, so kann man das erste Integral mit Hilfe des Greenschen Satzes in seiner ersten Form (I, 20) in ein Integral über den Raum zwischen der Oberfläche des Magneten und der unendlich fernen Kugel umwandeln, an der ja das in gleicher Weise gebildete Oberflächenintegral aus früher besprochenen Gründen gleich Null sein würde. Ebenso läßt sich natürlich das zweite Integral in ein Raumintegral über den Innenraum verwandeln. Die gesamte Energie besteht dann also aus einer Summe von zwei Teilen, von denen der eine Teil über das ganze äußere Feld verteilt erscheint, der andere über den Innenraum des Magneten. Wir wollen diese Teile als die Energie des äußeren Feldes,  $T_a$ , und die innere Energie des Magneten,  $T_i$ , unterscheiden. Für die Energie des äußeren Feldes ergeben die Umformungen in der gleichen Weise wie in I, 40:

$$T_a = \frac{1}{8\pi} \int dv_a \mu_a \left[ \left( \frac{\partial \varphi_a}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi_a}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi_a}{\partial z} \right)^2 \right] \\ + \frac{1}{8\pi} \int dv_a \varphi_a \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu_a \frac{\partial \varphi_a}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu_a \frac{\partial \varphi_a}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu_a \frac{\partial \varphi_a}{\partial z} \right) \right]$$

oder unter Berücksichtigung der Bedeutung von  $\mathfrak{G}$  und  $\mathfrak{B}$ :

$$T_a = \frac{1}{8\pi} \int \mu_a \mathfrak{G}_a^2 dv_a + \frac{1}{8\pi} \int \varphi_a \cdot \left[ \frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial z} \right] dv_a.$$

Im magnetischen Felde ist aber nach (6')  $\frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial z}$  immer gleich Null. Also stellt sich die Energie des äußeren Feldes dar in der Form:

$$T_a = \frac{1}{8\pi} \int \mu_a \mathfrak{G}_a^2 dv_a, \quad (41)$$

ausgedehnt über den ganzen Raum, den das Feld einnimmt. Wie die Energie des elektrischen Feldes können wir also auch die Energie des magnetischen Feldes als eine Summe von Energiebeträgen auffassen, die in den einzelnen Raumelementen des Feldes aufgespeichert sind. Dann beträgt der Energieinhalt im Raumelement  $dv$ :

$$\frac{1}{8\pi} \mu_a \mathfrak{G}_a^2 dv_a$$

oder in der Raumeinheit:

$$\frac{1}{8\pi} \mu_a \mathfrak{G}_a^2.$$

Wir wollen unter  $T_0$  die Energie der Raumeinheit eines magnetischen Feldes verstehen. Dann ist in einem Medium von der Permeabilität  $\mu$  an einer Stelle, wo die Induktion  $\mathfrak{B}$ , die Feldstärke  $\mathfrak{H}$  ist, in jedem Kubikzentimeter ein Energiebetrag enthalten:

$$T_0 = \frac{1}{8\pi} \mu \mathfrak{H}^2 = \frac{1}{8\pi\mu} \mathfrak{B}^2 = \frac{1}{8\pi} \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{H}. \quad (42)$$

Auch diese Art, die magnetische Energie im Felde lokalisiert zu denken und sie durch die magnetischen Feldgrößen auszudrücken, steht wieder in vollkommener Parallele zu der Behandlung der entsprechenden Frage beim elektrischen Felde. Aber es besteht folgender Unterschied. Hat man ein elektrisches Feld, das durch geladene Leiter hervorgebracht wird, so gibt der Ausdruck  $\int W_0 dv$ , ausgedehnt über den ganzen Raum zwischen den Leitern, die ganze potentielle Energie der geladenen Körper oder die ganze mechanische Arbeit, die zur Herstellung dieser Ladungen erforderlich war; denn innerhalb der Leiter ist ja das Feld gleich Null. Hat man dagegen einen Stahlmagneten, so gibt der Ausdruck  $\int T_0 dv$ , ausgedehnt über den ganzen Raum außerhalb des Magneten, nicht den ganzen Betrag der magnetischen Energie. Denn in dem Raum, den der Magnet selber einnimmt, ist das Feld nicht gleich Null. Denkt man sich die Wirkung des Magneten ersetzt durch die Gaußsche Oberflächenbelegung, so ist durch die Flächenbelegung auch das Feld im Inneren bestimmt, und damit auch der Wert der Energie  $T_i$  des Innenraums. Aber dieser Wert ist ebenso ein fingierter, wie es die Oberflächenbelegung ist. Die tatsächlich in dem Magneten lokalisierte Energiemenge würde man nur dadurch ermitteln können, daß man die gesamte Magnetisierungsarbeit auf irgendeinem Wege mißt und an diesem Gesamtbetrag den Anteil  $\int T_a dv$  des äußeren Feldes in Abzug bringt.

Die Unbestimmtheit des Problems, die darauf beruht, daß das magnetische Feld sich auch in das der Untersuchung nicht zugängliche Innere des Magneten hinein erstreckt, läßt es fraglich erscheinen, ob die Einführung des Begriffs der Energiedichte und der Vorstellung der Lokalisierung der Energie in diesem Falle überhaupt zweckmäßig und berechtigt ist. Dieser Zweifel findet seine Beseitigung in den Anwendungen des Begriffs auf das von elektrischen Strömen erzeugte magnetische Feld. Aber auch für die Betrachtung des rein magnetostatischen Feldes legt die weitgehende Analogie zwischen seinen Eigenschaften und denen des elektrischen Feldes es nahe, auch diese Begriffe und Vorstellungen von dem elektrischen auf das magnetische Feld zu übertragen.

## 26. Energie einer Kraftröhre. Magnetischer Widerstand.

Da das magnetische Feld ebenso wie das elektrische Feld in Kraftröhren oder richtiger, in Berücksichtigung möglicher Verschiedenheiten der Permeabilität, in Induktionsröhren zerlegt werden kann, so lassen sich auch die auf S. 110 entwickelten Formeln für die Energie einer elektrischen Kraftröhre unmittelbar auf das magnetische Feld anwenden. Die Induktionsröhren gehen im Falle des magnetostatischen Feldes von dem permanenten Magneten aus und münden an anderen Stellen wieder in ihn ein, oder münden auf anderen permanenten Magneten. Bezeichnen wir mit  $\varphi_1$  den Wert des magnetischen Potentials an der Stelle, wo die Induktionsröhre aus dem Magneten austritt, mit  $\varphi_2$  den entsprechenden Wert an der Eintrittsstelle, wobei wir den Querschnitt der Röhre als unendlich klein annehmen müssen, da die Oberfläche des Magneten keine Niveaufäche ist, so hat das über die Länge der Induktionsröhre erstreckte Integral  $\int \mathfrak{H} \, dl$  den Wert  $\varphi_1 - \varphi_2$ . Wir wollen diese Differenz die in der Kraftröhre wirkende magnetomotorische Kraft nennen und mit  $A$  bezeichnen. Da ferner der durch die Röhre gehende Induktionsfluß, ausgedrückt als Zahl der Induktionslinien, gegeben ist durch

$$N = \mathfrak{B} \, dq = \mathfrak{H} \, \mu \, dq,$$

so ist

$$N \int \frac{dl}{\mu \, dq} = A. \quad (43)$$

Das Integral hängt nur von der Gestalt der Induktionsröhre und der Permeabilität des Materials, in dem sie verläuft, ab; man nennt es den magnetischen Widerstand der Induktionsröhre zwischen den gewählten Endquerschnitten, an denen das Potential die Werte  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  hat. Führt man das Zeichen  $\omega_m$  dafür ein:

$$\omega_m = \int \frac{dl}{\mu \, dq}, \quad (44)$$

so ist die Beziehung zwischen Induktionsfluß und magnetomotorischer Kraft durch die dem Ohmschen Gesetz analoge Formel ausgedrückt:

$$N = \frac{A}{\omega_m}. \quad (45)$$

Der Energieinhalt der Kraftröhre aber läßt sich, analog den Formeln auf S. 111, in folgenden drei Formen schreiben:

$$T_r = \frac{A^2}{8 \pi \omega_m}, \quad (47)$$

$$T_r = \frac{N^2 \omega_m}{8 \pi}. \quad (48)$$

Die gesamte Energie des äußeren Feldes würde dann durch Summierung dieser Ausdrücke über alle Induktionsröhren gewonnen werden.

Die wesentliche Anwendbarkeit dieser Formeln liegt allerdings nicht auf dem Gebiet der magnetostatischen, sondern auf dem der elektromagnetischen Erscheinungen. Bei diesen verlaufen, wie wir im nächsten Kapitel ausführlich behandeln werden, die Induktionslinien als in sich geschlossene Linien frei im Raume. Ueber diese geschlossenen Kurven haben sich die Integrationen bei dem Linienintegral der magnetischen Kraft und bei dem magnetischen Widerstande zu erstrecken, und diese Integrationen führen auf direkt angebbare Werte. Die Vorstellung, daß die Induktionslinien stets geschlossene Kurven sind, kann man nun allerdings auch auf die magnetostatischen Erscheinungen ausdehnen, wenn man den Innenraum des Magneten mit in die Betrachtung hineinzieht; denn da aus diesem Innenraum nach dem Außenraum stets einerseits so viel Induktionslinien austreten wie andererseits eintreten, so liegt es nahe, die eintretenden Linien durch den Innenraum hindurch bis zu den austretenden fortgesetzt zu denken. Um aber die genannten Integrationen durch diesen Innenraum hindurch erstrecken zu können, bedarf es einer Kenntnis der inneren Eigenschaft der permanenten Magnete. Wir kennen bis jetzt nur ihre äußere, felderregende Wirkung. Sie ist zunächst charakterisiert durch die Größe des Induktionsflusses, der von dem Magneten ausgeht, also durch die Gesamtzahl aller von ihm ausgehenden Induktionslinien. Aus dem Induktionsfluß und dem äußeren magnetischen Widerstande läßt sich aber nach (45) auch eine gewisse magnetomotorische Kraft ableiten, durch die man ebenfalls die felderregende Wirkung des Magneten definieren könnte. Für die Formulierung der Wirksamkeit der Magnete unter veränderlichen Bedingungen kommt es nun auf die Frage an, worin die Permanenz der Magnete besteht. Für gewöhnlich hat man sich die permanenten Magnete als Gebilde von konstanter Polstärke gedacht, also konstantem, von den äußeren Bedingungen unabhängigem Induktionsfluß. Aber man könnte sie auch als Sitz einer konstanten magnetomotorischen Kraft ansehen. Welche Auffassung richtig ist, kann nur eine experimentelle Untersuchung über das Verhalten der Magnete unter wechselnden Bedingungen ergeben. Auf



diese Frage kommen wir bei den ferromagnetischen Körpern zurück, zu denen die permanenten Magnete gehören, und die mit allen ihren merkwürdigen Eigenschaften eine besondere Behandlung verlangen.

## 27. Die potentielle Energie und die ponderomotorischen Kräfte.

Die Aufgabe, aus den Aenderungen der potentiellen Energie bei einer Orts- oder Gestaltsveränderung des Systems die wirkenden mechanischen Kräfte abzuleiten, stößt nach dem vorhergehenden hier auf die Schwierigkeit, daß wir über die etwaigen Energieänderungen im Innenraume des Magneten keine Aussage machen können. Man genügt in erster Annäherung den Tatsachen, wenn man den Energiebetrag des Innenraumes als unveränderlich annimmt und nur die durch die Veränderungen bewirkten Aenderungen von  $T_a$  in Betracht zieht. Nimmt man die weitere Vorstellung hinzu, daß die Magnete konstante Polstärke haben, also konstanter Induktionsfluß von ihnen ausgeht, so folgt aus der Abnahme der potentiellen Energie, die eintreten muß, wenn sich das System im Sinne der in ihm wirkenden mechanischen Kräfte bewegt, nach (48) eine Abnahme des magnetischen Widerstandes des äußeren Feldes. Wie in der Elektrostatik können wir auch hier diese Wirkungen beschreiben als ein Bestreben der Kraftlinien einerseits sich zu verkürzen, andererseits sich zu verbreitern, und die völlige Analogie der Ausdrücke für die Kräfte, die aus der Gleichheit des Coulombschen Gesetzes für Elektrizitätsmengen und für magnetische Pole folgt, führt zu den gleichen Ausdrücken für die scheinbaren Zug- und Druckkräfte, mit denen sich die Kraftwirkungen des magnetischen Feldes geradeso beschreiben lassen, wie die des elektrischen Feldes (siehe I, 43).

Betrachten wir im speziellen die Kraftwirkungen, die ein magnetisierbarer Körper im magnetischen Felde erfährt, so lassen sie sich als Drucke auf die Oberfläche des Körpers berechnen, die aus der Differenz der Druck- oder Zugwirkungen zu beiden Seiten der Fläche hervorgehen. Stehen die Kraftlinien senkrecht auf der Oberfläche, so wirkt entsprechend Formel (119) auf S. 103 eine Druckkraft auf die Flächeneinheit von der Größe

$$p_n = \frac{1}{8\pi} \mu_1 \mathfrak{H}_1^2 - \frac{1}{8\pi} \mu_2 \mathfrak{H}_2^2, \quad (49)$$

wobei  $\mu_1$  und  $\mu_2$  die Permeabilitäten der beiden Medien, die in der Fläche aneinander grenzen,  $\mathfrak{H}_1$  und  $\mathfrak{H}_2$  die Feldstärken in ihnen bedeuten. Liegt die Fläche parallel zu den Kraftlinien, so wirkt entsprechend der Formel (122) auf S. 104 ein Druck von der Größe

$$p_t = \frac{1}{8\pi} \mu_2 \mathfrak{H}_2^2 - \frac{1}{8\pi} \mu_1 \mathfrak{H}_1^2. \quad (50)$$

Für den allgemeinen Fall einer zu den Kraftlinien schiefen Lage der Fläche —  $\gamma$  Winkel der Kraftlinien mit der Flächennormalen — gilt entsprechend der Formel (123') auf S. 105 die Formel

$$p = \frac{\mu_2 - \mu_1}{8\pi} \mathfrak{S}_1^2 \left( 1 - \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2} \cos^2 \gamma \right) \quad (51)$$

und stellt eine zur Fläche senkrechte, nach dem Medium mit dem kleineren  $\mu$  hinein gerichtete Druckkraft dar.

Schließt man die ferromagnetischen Körper von der Betrachtung aus, so vereinfachen sich diese Formeln dadurch, daß für alle para- und diamagnetischen Körper die Differenzen der Permeabilitäten außerordentlich klein sind. Infolgedessen kann in der letzten Formel das zweite Glied, welches das Quadrat der Differenz  $\mu_2 - \mu_1$  enthält, gegen das erste Glied vernachlässigt werden; oder, was auf dasselbe hinauskommt, es kann der Unterschied der Feldstärke in den beiden Medien unberücksichtigt bleiben. Die an der Grenzfläche wirkende Druckkraft kann dann also einfach durch die Formel

$$p = \frac{\mu_2 - \mu_1}{8\pi} \mathfrak{S}^2 \quad (52)$$

ausgedrückt werden und ist unabhängig von der Orientierung der Fläche gegen die Kraftlinien.

In einem streng homogenen Magnetfelde ist daher diese Druckkraft für alle Elemente der Grenzflächen zweier Medien die gleiche. Sie hat hier ganz den Charakter des hydrostatischen Druckes in einer Flüssigkeit. Daraus folgt, daß auf ein Stück eines para- oder diamagnetischen Körpers in einem homogenen Magnetfelde keinerlei Kraftwirkungen, weder fortbewegende noch drehende, ausgeübt werden. Die Drehungsmomente, die sich bei den entsprechenden Betrachtungen der Elektrostatik (siehe I, 44) für länglich gestaltete Körper auch in einem homogenen Felde ergeben hatten, sind hier wegen der Geringfügigkeit der Unterschiede der Permeabilität unmerklich klein. Bei ferromagnetischen Körpern mit ihren hohen Permeabilitäten treten sie natürlich stets in die Erscheinung und bewirken, daß solche Körper auch in homogenen Feldern sich mit ihrer Längserstreckung in die Richtung der magnetischen Kraftlinien einstellen.

In inhomogenen Feldern dagegen ergeben sich aus der Verschiedenheit von  $p$  an verschiedenen Stellen der Oberfläche auch bei den para- und diamagnetischen Substanzen Kräfte, welche die Körper stets in solche Lagen zu bringen suchen, daß der magnetische Widerstand ein möglichst kleiner ist; oder Kräfte, die die stärker magnetisierbaren Körper nach den Stellen größter Feldstärke hintreiben. Aus der Richtung von  $p$  folgt ohne weiteres, daß ein paramagnetischer Körper in Luft ( $\mu_2 > \mu_1$ )

von einem Magneten angezogen, ein diamagnetischer ( $\mu_2 < \mu_1$ ) abgestoßen wird, daß zwischen den spitz zulaufenden Polen eines kräftigen hufeisenförmigen Elektromagneten ein paramagnetischer Körper mit seiner Längsrichtung sich in die Kraftlinienrichtung (axial), ein diamagnetischer sich äquatorial einstellt. Das sind die bekannten Versuche zur Untersuchung des magnetischen Verhaltens der Substanzen. Ferner folgt aus dem Faktor  $\mu_2 - \mu_1$  in dem Ausdruck für  $p$  die differentielle Natur der ganzen Erscheinungen. Wird ein paramagnetischer Körper in eine stärker paramagnetische Flüssigkeit gehängt ( $\mu_1 > \mu_2$ ), so ist für ihn  $\mu_2 - \mu_1$  negativ, wie bei einem diamagnetischen Körper, und er verhält sich in den beschriebenen Fällen in der Tat wie ein solcher.

## 28. Niveaugestalten von Flüssigkeiten in ungleichförmigen Magnetfeldern.

Wenn die beschriebenen magnetischen Druckkräfte an Flüssigkeitsoberflächen in inhomogenen Feldern angreifen, so bewirken sie Aenderungen der Niveaugestalt, die sich unter der Annahme, daß außer den magnetischen Kräften nur die Schwere wirkt, leicht berechnen lassen. Nennt man  $z$  die Erhebung des Niveaus der Flüssigkeit  $F$  vom spezifischen Gewichte  $\rho$  an irgendeiner Stelle  $P$  über diejenige Horizontalebene, welche das Niveau einer mit  $F$  kommunizierenden Flüssigkeit sein würde, auf welche nur die Schwere wirkt, so leistet die letztere bei Erhebung des Niveaus einer bei  $P$  befindlichen kleinen Fläche  $dq$  um  $dz$  die negative Arbeit

$$A_1 = -z dq dz \rho g,$$

die magnetischen Kräfte leisten dagegen die positive Arbeit

$$A_2 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{8\pi} \mathfrak{H}^2 dq dz,$$

falls  $\mu_2$  den Wert der Permeabilität der Flüssigkeit,  $\mu_1$  den des Gases (Luft) bezeichnet, welches die Flüssigkeit umgibt.

Im Gleichgewichtsfalle ist  $A_1 + A_2 = 0$ , d. h. die  $z$ -Koordinate des Flüssigkeitsniveaus an irgendeiner Stelle wird durch die Gleichung bestimmt:

$$z = \frac{\mu_2 - \mu_1}{8\pi\rho g} \mathfrak{H}^2. \quad (53)$$

Das Niveau erhebt sich daher, falls  $\mu_2 - \mu_1$  positiv ist, am meisten, wo  $\mathfrak{H}^2$  den größten Wert hat. Man kann die Gestalt des Niveaus aus (53) mathematisch berechnen, falls  $\mathfrak{H}$  als Funktion des Ortes bekannt ist.

Rührt z. B.  $\xi$  scheinbar von einem punktförmigen Pol der Stärke  $m$  her, der im Niveau  $z = 0$  liegt, und bezeichnet  $R$  die horizontal gemessene Entfernung des Punktes  $P$  von  $m$ , so ist

$$\xi = \frac{m}{z^2 + R^2},$$

d. h. nach (53):

$$z (z^2 + R^2)^2 = \frac{m^2 (\mu_2 - \mu_1)}{8 \pi \rho g} = \text{Konst.}$$

Das Niveau ist daher eine Rotationsfläche, ihre höchste Erhebung über das Niveau in der Unendlichkeit ( $R = \infty$ ) findet für  $R = 0$ , d. h. senkrecht über dem Pol, statt und hat den Wert

$$z_{\text{Max}} = \sqrt[5]{\frac{m^2 (\mu_2 - \mu_1)}{8 \pi \rho g}}.$$

Dabei ist jedoch die bei stärkeren Krümmungen nicht zu vernachlässigende Wirkung der Kapillarkräfte nicht berücksichtigt.

Die schon von Plücker<sup>1)</sup> beobachteten Niveaugestalten paramagnetischer und diamagnetischer Flüssigkeiten (vgl. die Figuren 26 und 27)

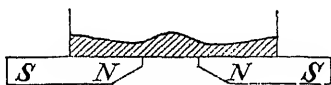


Fig. 26



Fig. 27.

über zwei gegenüberstehenden Magnetpolen folgen direkt aus (53), da in der Nähe eines Poles  $\xi$  am größten ist. Die charakteristische Niveaugestalt zeigt sich besser, falls man zwei gleichnamige Magnetpole gegenüberstellt, als zwei ungleichnamige, weil im ersteren Falle  $\xi$  ungleichförmiger ist als im letzteren. Das Vorzeichen von  $\xi$ , d. h. das Vorzeichen des Magnetpoles, ist hier natürlich direkt von gar keinem Einfluß, da  $\xi$  quadratisch in den Formeln auftritt.

Die Gase (auch Flammengase) zeigen ganz ähnliche Niveaugestalten. Man kann sie gut erkennen, wenn eine Flamme in einem ungleichförmigen Magnetfelde brennt, z. B. zwischen zwei spitzen Polen.

## 29. Die Methoden zur Bestimmung der Magnetisierungskonstanten.

Die Mehrzahl der Methoden zur Ermittlung der Permeabilität der para- und diamagnetischen Stoffe beruht auf der Messung der Kraft-

wirkungen in inhomogenen Feldern. Aus (52) ergibt sich dadurch direkt der Wert der Differenz  $\mu_2 - \mu_1$ . Ist das umgebende Medium Luft, so kann  $\mu_1$  mit großer Annäherung  $= 1$  gesetzt werden. Die Versuche ergeben dann unmittelbar die Suszeptibilität  $\kappa = \frac{\mu - 1}{4\pi}$  der untersuchten Substanz. Will man bei größerer Genauigkeit auf die wahre Suszeptibilität, d. h. auf die Differenz gegen den leeren Raum korrigieren, so hat man die gewonnenen Zahlen um den Betrag der Suszeptibilität der Luft zu vermehren.

Die wichtigsten Methoden sind die folgenden:

A) Für Flüssigkeiten und Gase die hydrostatische oder Steighöhenmethode.

Die Flüssigkeit, deren  $\mu$  gemessen werden soll, wird in ein U-Rohr gefüllt, dessen Schenkel so weit voneinander entfernt sind, daß, wenn sich der eine an den Stellen der größten Feldstärke, d. h. in dem Zwischenraum der Pole, befindet, die Feldstärke an dem Orte des anderen Schenkels sehr gering ist. Wir wollen sie zunächst ganz vernachlässigen. Ist nun die Permeabilität  $\mu$  der Flüssigkeit größer als die Konstante  $\mu_0$  der Luft, so wird dieselbe infolge der Anziehung des Magnetfeldes in dem im Magnetfelde befindlichen Schenkel  $S_1$  höher stehen als in dem außerhalb desselben befindlichen Schenkel  $S_2$ . Der magnetischen Zugkraft, die die Flüssigkeit in das Magnetfeld hineinzieht, hält der hydrostatische Druck, der die gehobene Flüssigkeitssäule nach unten zieht, das Gleichgewicht. Die Gleichsetzung beider Drucke gibt die Formel zur Berechnung von  $\mu$ . Ist  $h$  die Steighöhe, d. h. die Differenz des Niveaus im Felde gegen das Niveau außerhalb des Feldes,  $\rho$  die Dichtigkeit der Flüssigkeit, und  $g$  die Schwerebeschleunigung (981 im cgs-System), so ist in Uebereinstimmung mit der durch eine andere Betrachtung abgeleiteten Formel (53)

$$\rho h g = \frac{\mu - \mu_0}{8\pi} \mathfrak{H}^2. \quad (53')$$

Daraus folgt:

$$\mu - \mu_0 = \frac{8\pi h \rho g}{\mathfrak{H}^2} \quad \text{oder} \quad \kappa - \kappa_0 = \frac{2 h \rho g}{\mathfrak{H}^2}. \quad (54)$$

Dabei bedeutet  $\mathfrak{H}$  die Feldstärke am Orte des oberen Flüssigkeitsniveaus im Schenkel  $S_1$ . Es ist an und für sich nicht notwendig, dafür zu sorgen, daß  $\mathfrak{H}$  innerhalb eines größeren Gebietes konstant sei. Zum Zwecke einer genauen experimentellen Ermittlung des  $\mathfrak{H}$  (von der im Kapitel „Induktion“ die Rede sein soll) empfiehlt es sich allerdings, ein Magnetfeld anzuwenden, in welchem  $\mathfrak{H}$  innerhalb eines gewissen Gebietes nahezu konstant ist.

Wenn die Feldstärke am Orte des Flüssigkeitsniveaus im Schenkel  $S_2$  nicht verschwindet, sondern den Wert  $\mathfrak{H}'$  hat, so ist in (54)  $\mathfrak{H}^2 - \mathfrak{H}'^2$  an Stelle von  $\mathfrak{H}^2$  zu setzen.

Die magnetische Steighöhe  $h$  wird mit einem Mikroskop abgelesen. Da durch Erregung des Magnetfeldes die Flüssigkeitsoberflächen in beiden Schenkeln  $S_1$  und  $S_2$  sich nach verschiedenen Richtungen bewegen, so erhält man eine möglichst große Verschiebung nur der einen Oberfläche, wenn man den Querschnitt des einen Schenkels so groß gegen den Querschnitt des anderen wählt, daß die Oberfläche in dem weiten Schenkel kaum sinkt, wenn die im engen Schenkel steigt. Man erhält dann  $h$  durch Mikroskopeinstellungen am engen Schenkel allein bei geschlossenem und geöffnetem Erregerstrom des Elektromagnetes. Wenn dessen Feldstärke bei geöffnetem Strom nicht gänzlich verschwindet (was infolge der Remanenz des Magnetismus des Eisens nie eintritt), sondern den Wert  $\mathfrak{H}_r$  hat, so ist auch bei geöffnetem Erregerstrom eine Niveaudifferenz  $h_r$  zwischen den Flüssigkeitsoberflächen in beiden Schenkeln vorhanden. Es ist dann nach (53')

$$h = (\mu - \mu_0) \frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi\rho g}, \quad h_r = (\mu - \mu_0) \frac{\mathfrak{H}_r^2}{8\pi\rho g},$$

und man erhält für die bei Schließen und Öffnen des Erregerstromes eintretende Niveaushiftung  $h - h_r$  im engen Schenkel, welche direkt mikroskopisch ablesbar ist:

$$h - h_r = (\mu - \mu_0) \frac{\mathfrak{H}^2 - \mathfrak{H}_r^2}{8\pi\rho g}. \quad (55)$$

Weil  $\mathfrak{H}$  und  $\mathfrak{H}_r$  nicht innerhalb größerer Gebiete konstant sind, so empfiehlt es sich, den engen Schenkel zwischen die Magnetpole zu bringen, den weiten dagegen außerhalb derselben.

Man kann die Methode empfindlicher machen, d. h. die Verschiebungen des Flüssigkeitsniveaus vergrößern, falls man den Schenkeln  $S_1$  und  $S_2$  eine nur wenig gegen den Horizont geneigte Lage gibt. Ebenfalls vergrößert sich  $h$ , wenn man ein ringförmig geschlossenes Glasrohr (vgl. Fig. 28) anwendet und zwei nur wenig in ihrer Dichtigkeit verschiedene Flüssigkeiten übereinander schichtet. Ist  $\rho_0$  die Dichtigkeit der oberen Flüssigkeit, so tritt, wie leicht ersichtlich ist,  $\rho - \rho_0$  an Stelle von  $\rho$  in Formel (53'). Ist  $\mu_0$  die Magnetisierungskonstante der oberen Flüssigkeit, so ist daher an Stelle von (54) zu setzen:

$$\mu - \mu_0 = \frac{8\pi h (\rho - \rho_0) g}{\mathfrak{H}^2}.$$

Pumpt man das Glasrohr luftleer, so ergibt sich, da  $\mu_0 = 1$ ,  $\rho_0 = 0$  ist, die Magnetisierungskonstante  $\mu$  der Flüssigkeit. Füllt man den oberen Teil des Glasrohres mit verschiedenen Gasen, so kann man jetzt ihre

Magnetisierungskonstanten finden, da man die der unteren Flüssigkeit kennt.

Man kann aber auch die Magnetisierungskonstante der Gase direkt miteinander und mit der des leeren Raumes nach gleicher Methode vergleichen; zum Erkennen des „Niveaus“ der Gase bedarf man nur zweier leicht im Glasrohr adhärirender, verschiebbarer Flüssigkeitstropfen, welche den Querschnitt des Glasrohres überspannen.

Die Methode der Steighöhen rührt von G. Quincke<sup>1)</sup> her, der für eine große Anzahl von Flüssigkeiten und Gasen nach dieser Methode die Suszeptibilitäten bestimmte. J. Königsberger<sup>2)</sup> und andere Forscher haben sich später dieser Methode bedient. Die in Fig. 28 abgebildete

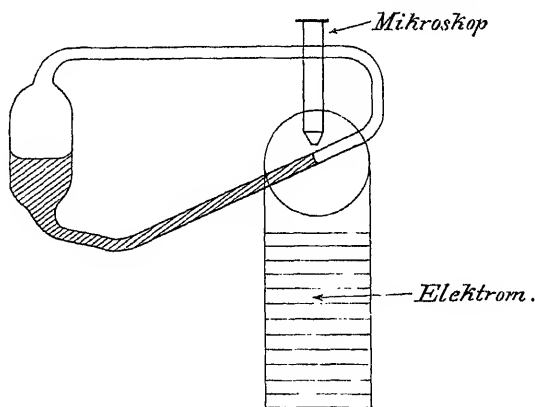


Fig. 28.

Abänderung der Methode ist ebenfalls schon von Quincke<sup>3)</sup> und dann von du Bois<sup>4)</sup> benutzt worden. Eine andere Abänderung benutzten G. Jäger und St. Meyer<sup>5)</sup>, indem sie nicht direkt die Steighöhen ablasen, sondern den Ueberdruck maßen, der erforderlich war, um den Meniskus nach Erregung des Magnetismus wieder in seine ursprüngliche Stellung zu bringen. Für Gase sind die Magnetisierungskonstanten nach der beschriebenen Methode außerdem von Töpler<sup>6)</sup> und Hennig<sup>7)</sup> bestimmt worden. Für Wasser ( $\mu = 0,999990$ ) beträgt bei der Feldstärke  $\mathfrak{H} = 10\,000$  die magnetische Drucktiefe ( $-h$ ) im leeren Raum 0,42 mm.

<sup>1)</sup> G. Quincke, Wied. Ann. **24**, S. 347, 1885.

<sup>2)</sup> J. Königsberger, Wied. Ann. **66**, S. 698, 1898.

<sup>3)</sup> G. Quincke, Wied. Ann. **34**, S. 416, 1888.

<sup>4)</sup> H. E. J. G. du Bois, Wied. Ann. **35**, S. 137, 1888.

<sup>5)</sup> G. Jäger und St. Meyer, Sitzungsber. der Wiener Akad. (2) **106**, 1897; Wied. Ann. **63**, S. 83, 1897.

<sup>6)</sup> A. Töpler und R. Hennig, Wied. Ann. **34**, S. 790, 1888.

<sup>7)</sup> R. Hennig, Wied. Ann. **50**, S. 485, 1893.

Für eine wäßrige  $\text{FeCl}_3$ -Lösung der Dichte  $\rho = 1,5$  ist  $\mu$  etwa  $= 1,00075$ , d. h. die magnetische Steighöhe für  $\xi = 10\,000$  nach (54) etwa gleich 20 mm. Da man mit einer Lupe  $\frac{1}{10}$  mm bequem ablesen kann, so bietet sich dadurch eine bequeme Methode zur Messung großer Feldstärken, falls  $\mu$  hinreichend sicher bestimmt ist.

Unter den Gasen ist Sauerstoff besonders stark magnetisch; für ihn ist  $\mu = 1,000\,0015$ , während für Luft  $\mu = 1,000\,000\,36$  ist. Diese Zahlen gelten für den Zustand der Gase bei normalem Druck (1 Atm.);  $\mu - 1$  wächst proportional dem Druck des Gases.

Nach den Ausführungen des Abschnittes 27 kann die magnetische Steighöhe in keiner Weise von der Orientierung der freien Flüssigkeitsoberfläche gegen die Kraftlinien des magnetischen Feldes abhängen. Dies hat auch die Beobachtung bestätigt<sup>1)</sup>.

Quincke hat durch Messung der Aenderung des hydrostatischen Druckes im Felde die Magnetisierungskonstante auch bei anderen Anordnungen bestimmt, indem er z. B. die Druckänderung einer Luftblase in der Flüssigkeit, welche sich im Magnetfelde befindet, maß, entsprechend den in I, 42 (S. 107) beschriebenen Versuchen im elektrostatischen Felde. Die vorher beschriebene Methode hat aber mehr experimentelle Vorteile.

Für ein elektrostatisches Feld dagegen stößt die Durchführung der hier beschriebenen Steighöhenmethode auf Schwierigkeiten, weil die Voraussetzungen der ganzen Methode nicht mehr zutreffen. Denn die Dielektrizitätskonstanten der Flüssigkeiten sind so verschieden von 1, daß die vereinfachte Formel (52) gar nicht angewandt werden kann. Außerdem aber übt die Glasröhre infolge der hohen Dielektrizitätskonstante des Glases eine der Berechnung kaum zugängliche Schirmwirkung auf das Innere der Röhre durch Brechung der Kraftlinien aus.

#### B) Für feste und flüssige Körper die Zugkraftmethode.

Das Prinzip der Steighöhenmethode läßt sich auf feste Körper übertragen, indem man diesen die Gestalt langer dünner Stäbe gibt, deren eines Ende innerhalb des kleinen homogenen Feldes sich befindet, während das andere Ende möglichst weit vom Magnet entfernt ist. Die Kraft, mit der der Stab in das Magnetfeld hineingezogen oder bei diamagnetischen Stoffen aus ihm herausgedrängt wird, kann am einfachsten mit einer Wage gemessen werden, an der der Stab in vertikaler Lage so aufgehängt wird, daß sein unteres Ende im Magnetfelde sich befindet. Auf Flüssigkeiten in langen dünnen Glasröhren ist dieses Verfahren von

<sup>1)</sup> G. Quincke, Wied. Ann. 24, S. 374 ff., 1885.



G. Jäger und St. Meyer<sup>1)</sup> angewandt worden, auf feste Körper, zum Teil aus der Gruppe der ferromagnetischen Körper, von P. Meyer<sup>2)</sup>, M. Weber<sup>3)</sup> und E. Seckelson<sup>4)</sup>.

C) Für feste Körper die Methode des magnetischen Auftriebs.

Der am Schluß des Abschnittes 27 beschriebene Versuch über den Einfluß, den eine einen festen Körper umgebende Flüssigkeit auf dessen Einstellung in einem inhomogenen magnetischen Felde ausübt, kann zur Messung der Magnetisierungskonstante des festen Körpers benutzt werden. Denkt man sich nämlich eine Lösung von passend gewählten Stoffen in ihrer Konzentration so abgeglichen, daß der feste Körper in ihr gar keinen Bewegungsantrieb durch das magnetische Feld erfährt, so stimmt offenbar die Permeabilität des festen Körpers mit derjenigen der Flüssigkeit überein; für diese aber kann die Permeabilität mittels der Steighöhenmethode genau ermittelt werden. Die Methode entspricht im Prinzip der bekannten Schwebemethode zur Bestimmung spezifischer Gewichte. Um aber das umständliche Ausgleichen der Flüssigkeit zu umgehen, hat J. Königsberger<sup>5)</sup>, der diese schon von Faraday<sup>6)</sup> vorgeschlagene Methode zu umfangreichen Messungen benutzt hat, den Körper, der an einer Torsionsvorrichtung aufgehängt war, in zwei Lösungen untersucht, in deren einer er sich paramagnetisch, in der anderen diamagnetisch verhielt; aus den Ausschlägen, die bei unveränderter Feldstärke den Differenzen der Permeabilitäten proportional sind, konnte die gesuchte Permeabilität durch Interpolation ermittelt werden.

D) Methode der Kraftmessung an kleinen Körpern im ungleichförmigen Felde.

Die Methoden A und B sind dadurch charakterisiert, daß der Versuchskörper sehr lang und dünn ist. Die nach (47) auf die Seitenwände wirkenden Kräfte heben sich dann für jeden Querschnitt des Körpers auf, und es bleiben nur die auf die Endquerschnitte wirkenden Kräfte übrig, und wenn der Körper so lang ist, daß das eine Ende ganz außerhalb des Feldes liegt, so kommt nur die Druckkraft, die auf den im Felde liegenden Endquerschnitt wirkt, zur Geltung. Die Inhomogenität des Feldes, die die bewegende Kraft bedingt, besteht in diesem Falle in

<sup>1)</sup> G. Jäger und St. Meyer, Wied. Ann. **67**, S. 707, 1899; St. Meyer, Ann. d. Phys. (4) **1**, S. 664, 1900.

<sup>2)</sup> P. Meyer, Elektrot. Zeitschr. **10**, S. 582, 1889.

<sup>3)</sup> M. Weber, Wied. Ann. **54**, S. 30, 1895.

<sup>4)</sup> E. Seckelson, Wied. Ann. **67**, S. 37, 1899.

<sup>5)</sup> J. Königsberger, Wied. Ann. **66**, S. 718, 1898.

<sup>6)</sup> M. Faraday, Exper. Res. XXI. Ser., § 2363 u. 2366; Ostwalds Klassiker, Nr. 140, S. 36.

der Differenz der Feldstärke an den beiden Endquerschnitten. Der Verlauf der Feldstärke zwischen diesen beiden Stellen fällt bei der Integration wegen der besonderen Form des Körpers heraus, vorausgesetzt, daß die Permeabilität von der Feldstärke unabhängig ist, wie man es für die Mehrzahl der para- und diamagnetischen Körper annehmen kann. Zahlreiche Untersuchungen sind dagegen in der Weise angestellt worden, daß ein kleiner Versuchskörper, eine Kugel oder ein Stück von beliebiger Form, benutzt und die bewegende Kraft, die er in einem stark inhomogenen Felde erfuhr, gemessen wurde. In diesem Falle sind die Komponenten der bewegenden Kraft durch die über die Oberfläche des Körpers erstreckten Integrale

$$X = \int p \cos (n x) \, ds,$$

$$Y = \int p \cos (n y) \, ds, \quad Z = \int p \cos (n z) \, ds$$

zu berechnen. Mit Hilfe des Gaußschen Satzes (I, 15) lassen sie sich umformen in Integrale über das Volumen des Körpers

$$X = \frac{\mu_2 - \mu_1}{8\pi} \int \frac{\partial \mathfrak{H}^2}{\partial x} \, dv, \quad Y = \frac{\mu_2 - \mu_1}{8\pi} \int \frac{\partial \mathfrak{H}^2}{\partial y} \, dv,$$

$$Z = \frac{\mu_2 - \mu_1}{8\pi} \int \frac{\partial \mathfrak{H}^2}{\partial z} \, dv,$$

unter der Voraussetzung, daß die Permeabilität des Körpers konstant ist. Die resultierende Kraft ist also so, als ob auf die Volumeneinheit des Körpers eine Kraft mit den Komponenten

$$X_1 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{8\pi} \frac{\partial \mathfrak{H}^2}{\partial x}, \quad Y_1 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{8\pi} \frac{\partial \mathfrak{H}^2}{\partial y}, \quad Z_1 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{8\pi} \frac{\partial \mathfrak{H}^2}{\partial z} \quad (56)$$

wirkte. Die Voraussetzung für die Gültigkeit dieser Formeln sind die vereinfachenden Annahmen, auf denen die Formel (52) beruht. Daß diese Einschränkung erforderlich ist, zeigt sich auch bei der Ableitung der Formeln (56) aus dem Ausdruck für die magnetische Energie, wie sie P. Drude in der ersten Auflage gegeben hat. Dabei muß man nämlich von der Voraussetzung ausgehen, daß die Feldstärke  $\mathfrak{H}$  an irgendeiner Stelle P sich nicht merklich ändern solle, falls der Körper dorthin geschoben wird. Dann tritt durch die Verschiebung von  $dv$  um  $dl$  weiter keine Aenderung ein, als daß die Induktion des Raumteiles  $dv$ , in welchem sich ursprünglich der Körper befunden hatte, von  $\mathfrak{B}_2$  zu  $\mathfrak{B}_1$  übergeht, während umgekehrt die Induktion des Raumteiles  $dv$ , in welchem sich der Körper nach der Verschiebung befindet, von  $\mathfrak{B}_1'$  zu  $\mathfrak{B}_2'$  übergeht. Setzt man daher die Feldstärke in letzterem Raumteil gleich  $\mathfrak{H}'$ , die im ersteren gleich  $\mathfrak{H}$ , so ist nach (42) die durch die Verschiebung des Körpers um  $ds$  herbeigeführte Aenderung der magnetischen Energie:

$$dW = -\frac{1}{8\pi} (\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{B}_1) \mathfrak{G} dv + \frac{1}{8\pi} (\mathfrak{B}_2' - \mathfrak{B}_1') \mathfrak{G}' dv.$$

Nun ist aber nach dem Taylorschen Lehrsatz

$$(\mathfrak{B}_2' - \mathfrak{B}_1') \mathfrak{G}' = (\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{B}_1) \mathfrak{G} + \frac{\partial [(\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{B}_1) \mathfrak{G}]}{\partial l} dl.$$

Daher wird

$$dW = \frac{1}{8\pi} \frac{\partial [(\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{B}_1) \mathfrak{G}]}{\partial l} dl dv. \quad (57)$$

Nennt man nun  $K_1$  die das Volumen  $dv$  in der Richtung  $l$  bewegende Kraft des Magnetfeldes, so muß  $dW$  gleich der Arbeit  $K_1 \cdot dl$  sein. Es ergibt sich daher:

$$K_1 = \frac{dv}{8\pi} \frac{\partial [(\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{B}_1) \mathfrak{G}]}{\partial l} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{8\pi} dv \frac{\partial \mathfrak{G}^2}{\partial l}, \quad (58)$$

woraus sich für die auf die Volumeneinheit wirkenden Kraftkomponenten ebenfalls die Ausdrücke (56) ergeben.

Mißt man daher das Magnetfeld topographisch aus, so daß man die Differentialquotienten von  $\mathfrak{G}^2$  kennt, so kann man  $\mu_2 - \mu_1$  berechnen aus Beobachtung der ponderomotorischen Wirkungen. Letztere ergeben sich entweder aus Bestimmung der Schwingungsdauer des bifilar oder an einem Torsionsdraht aufgehängten Körpers im Magnetfelde<sup>1)</sup> oder aus dem statischen Zuge des Magnetfeldes, der durch Torsion der Aufhängevorrichtung<sup>2)</sup> oder mittels der Wage<sup>3)</sup> gemessen werden kann.

Auch für Flüssigkeiten ist die Methode zur Bestimmung ihrer Permeabilität anwendbar, entweder indem man sie in ein bewegliches Gefäß eingießt oder indem man nach dem Vorgange Becquerels<sup>4)</sup> einen festen Körper abwechselnd im Vakuum und in der Flüssigkeit aufhängt.

Handelt es sich nur um die Vergleichung der Permeabilitäten  $\mu_1, \mu_2 \dots$  verschiedener Körper untereinander (nicht mit der der Luft oder des Vakuums), so braucht man das Magnetfeld nicht topographisch auszumessen, sondern erhält direkt die Verhältnisse  $\mu_1 - \mu_0 : \mu_2 - \mu_0$  usw., falls man die ponderomotorischen Wirkungen beobachtet, welche die Körper in unverändertem Magnetfeld erfahren, wenn sie immer an genau die gleichen Stellen desselben gebracht werden.

<sup>1)</sup> So sind verfahren Rowland und Jacques, Sillim. Journ. 18, S. 360, 1879; Schuhmeister, Wien. Ber. (2) 83, S. 46, 1881.

<sup>2)</sup> So verfuhr G. Wiedemann, Pogg. Ann. 126, S. 8, 1865; Schuhmeister l. c. S. 52; Eaton, Wied. Ann. 15, S. 225, 1882; v. Ettingshausen, Wied. Ann. 17, S. 304, 1882; Wien. Ber. (2) 96, S. 777, 1887; S. Henriksen, Wied. Ann. 34, S. 180, 1888.

<sup>3)</sup> Die Wage benutzte J. Plücker, Pogg. Ann. 91, S. 1, 1854, in neuerer Zeit St. Meyer, Wied. Ann. 68, S. 326, 1899.

<sup>4)</sup> E. Becquerel, Ann. de chim. et de phys. (3) 28, S. 290, 1850.

### 30. Magnetisierungskurven ferromagnetischer Stoffe.

Wir haben die ferromagnetischen Substanzen von den bisherigen Betrachtungen wiederholt ausdrücklich ausgeschlossen. Für einen Teil der Betrachtungen war dies deswegen erforderlich, weil die entwickelten Formeln auf der Voraussetzung kleiner Werte von  $\kappa$  beruhten, während die ferromagnetischen Substanzen durch außerordentlich große Werte von  $\kappa$  ausgezeichnet sind. Allein auch der Anwendung der vollständigen, keine Vernachlässigungen enthaltenden Formeln stellt sich bei den ferromagnetischen Substanzen die weitere Schwierigkeit entgegen, daß die Permeabilität dieser Substanzen überhaupt keine konstante Größe ist. Es ist seit langem bekannt, daß Eisen bei wachsender Stärke des magnetisierenden Feldes sich nicht in proportionalem Maße immer stärker magnetisieren läßt, sondern einem oberen Grenzwert, einem Maximum der Magnetisierung zustrebt. Den Zustand dieser maximalen Magnetisierung bezeichnet man als den Sättigungszustand. Die gleiche Eigenschaft zeigen die anderen Körper dieser Gruppe; sie ist offenbar mit der außerordentlich hohen Magnetisierbarkeit dieser Körper verbunden.

Zur Erzeugung magnetischer Felder von beliebig veränderlicher Stärke bedient man sich der magnetisierenden Wirkung elektrischer Ströme, deren Stromstärke sich mittels Widerständen beliebig einregulieren läßt (siehe darüber Kapitel III). Man bringt den zu magnetisierenden Körper in das Innere einer stromdurchflossenen Spule und ermittelt das in dem Körper induzierte Moment durch die Ablenkung, die der magnetisierte Körper in erster oder zweiter Hauptlage (siehe Abschnitt 15, S. 159) auf eine in angemessener Entfernung aufgestellte Magnetnadel ausübt. Ueber die genauere Ausführung dieser magnetometrischen Methode muß auf Kapitel III, Abschnitt 19 verwiesen werden. Dabei ist zu beachten, daß der Körper, damit er im Innern gleichmäßig und möglichst stark magnetisiert wird, die Gestalt eines langgestreckten Ellipsoides haben muß (siehe Abschnitt 24). Eine andere Methode beruht auf der Messung des Induktionsstromes, der bei plötzlichem Aufhören der Magnetisierung, d. h. bei Unterbrechung des Stromes in der Magnetisierungsspule, in einer zweiten den Körper umschließenden Spule erzeugt wird — ballistische Methode. Ueber die Grundlagen dieser Methode muß auf Kapitel V, Abschnitt 7 verwiesen werden.

Trägt man die aus der Stromstärke und den Spulendimensionen zu ermittelnde Stärke des magnetisierten Feldes als Abszisse, die induzierte Magnetisierung als Ordinate auf, so erhält man für eine ferromagnetische Substanz eine Kurve, die erst schwach, dann stärker ansteigt, sich dar-

auf wendet und schließlich asymptotisch einer Parallelen zur Abszissenachse zustrebt, während sich für para- oder diamagnetische Körper einfach eine gerade Linie ergeben würde. Die erhaltene Kurve stellt die Beziehung zwischen der induzierten Magnetisierung  $\mathfrak{J}$  und der äußeren Feldstärke  $\mathfrak{H}_0$  dar. In den Gleichungen:

$$\mathfrak{J} = \kappa \mathfrak{H}, \quad \mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$$

ist  $\mathfrak{H}$  nicht die Feldstärke des äußeren, sondern die des inneren Feldes  $\mathfrak{H}_i$  an der Stelle des Körpers, wo die Magnetisierung und die Induktion die Werte  $\mathfrak{J}$  und  $\mathfrak{B}$  haben. Will man den Verlauf der Größe  $\kappa$  darstellen, so muß man die gemessenen Werte der  $\mathfrak{J}$  nicht auf die zugehörigen Werte von  $\mathfrak{H}_0$ , sondern von  $\mathfrak{H}_i$  beziehen. Diese letzteren aber

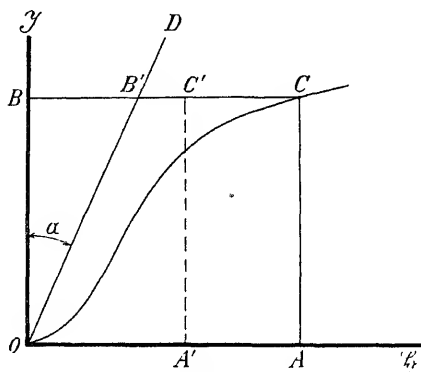


Fig. 29.

lassen sich aus den Werten von  $\mathfrak{H}_0$  mit Hilfe des Entmagnetisierungsfaktors nach Formel (33) berechnen:

$$\mathfrak{H}_0 = (1 + \kappa L) \mathfrak{H}_i = \mathfrak{H}_i + L \mathfrak{J}$$

oder

$$\mathfrak{H}_i = \mathfrak{H}_0 - L \mathfrak{J}. \quad (59)$$

Die letztere Gleichung gestattet eine sehr einfache graphische Methode, um aus der ursprünglich gewonnenen Kurve der  $\mathfrak{J}\mathfrak{H}_0$ -Werte die Kurve der  $\mathfrak{J}\mathfrak{H}_i$ -Werte, die eigentliche Magnetisierungskurve der Substanz abzuleiten. Man ziehe durch den Nullpunkt der Koordinaten eine Gerade OD unter solchem Winkel  $\widehat{BOD}$  gegen die Ordinatenachse, daß

$$\operatorname{tg} \widehat{BOD} = L$$

ist (Fig. 29). Ist OB der Magnetisierungswert, der zu einem bestimmten Punkte C der ursprünglichen Kurve OC gehört, so ist  $BB' = \mathfrak{J} \cdot \operatorname{tg} \widehat{BOD} = L \mathfrak{J}$ . Macht man auf der zur Abszissenachse parallelen Geraden BC die Strecke  $CC' = BB'$ , so ist  $OA' = \mathfrak{H}_0 - L \mathfrak{J} = \mathfrak{H}_i$ . Der Punkt C' ist also ein

Punkt der gesuchten Magnetisierungskurve. Die gleiche Konstruktion für alle Punkte von OC durchgeführt, ergibt die gesuchte Magnetisierungskurve. Man bezeichnet dieses graphische Verfahren, das von Lord Rayleigh<sup>1)</sup> herrührt, als Scherung der Kurve OC.

Man findet in der beschriebenen Weise die Abhängigkeit der Magnetisierungsintensität von der Feldstärke, und kennt man diese, so kann man auch die Abhängigkeit der Induktion  $\mathfrak{B}$  von der Feldstärke berechnen und in entsprechender Weise durch eine Kurve darstellen.

### 31. Die Integral- und die Differentialdefinition der Permeabilität.

Bei den ferromagnetischen Körpern kann man, wie die Betrachtungen des vorigen Abschnitts zeigen, nicht von einer Magnetisierungskonstanten sprechen; denn  $\mu$  und  $\kappa$  sind mit der Feldstärke veränderlich, sind Funktionen der Feldstärke. Infolgedessen kann der Begriff der Permeabilität in verschiedenem Sinne aufgefaßt und definiert werden.

Will man die Erscheinungen auch bei den ferromagnetischen Körpern durch die Gleichung (23), S. 166:

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$$

darstellen, also  $\mu$  definieren als Verhältnis der magnetischen Induktion zur vorhandenen Feldstärke, so ist dies als eine Integraldefinition von  $\mu$  zu bezeichnen. Die oben beschriebene magnetometrische Methode bestimmt diesen Integralwert von  $\mu$ .

Man könnte aber auch das Verhältnis der Zunahme  $d\mathfrak{B}$  der magnetischen Induktion zur Zunahme  $d\mathfrak{H}$  der Feldstärke als Permeabilität bezeichnen, d. h.  $\mu$  durch die Gleichung definieren:

$$d\mathfrak{B} = \bar{\mu} d\mathfrak{H}. \quad (60)$$

Dieses soll die Differentialdefinition von  $\mu$  genannt werden,  $\bar{\mu}$  selbst der Differentialwert.

Schließlich empfiehlt sich für manche Zwecke noch die Einführung einer Abkürzung für das Verhältnis der Zunahme des Produkts  $\mathfrak{B}\mathfrak{H}$  zu der Zunahme von  $\mathfrak{H}^2$ . Da dieses Verhältnis die Bedeutung  $\mu$  hat, wenn  $\mu$  konstant, d. h. von  $\mathfrak{H}$  unabhängig ist, so soll es die Differentialdefinition zweiter Art von  $\mu$  genannt werden, der ihr entsprechende Wert  $\bar{\bar{\mu}}$  der Differentialwert zweiter Art. Dieser ist also definiert durch:

$$d(\mathfrak{B}\mathfrak{H}) = \bar{\bar{\mu}} d(\mathfrak{H}^2). \quad (61)$$

<sup>1)</sup> Lord Rayleigh, Phil. Mag. (5) 22, S. 175, 1886.

Man kann für diese Gleichung schreiben:

$$\mathfrak{B} d\mathfrak{H} + \mathfrak{H} d\mathfrak{B} = 2\bar{\mu} \mathfrak{H} d\mathfrak{H}.$$

Setzt man hierin für  $\mathfrak{B}$  den Wert  $\mu \mathfrak{H}$  nach (23), für  $d\mathfrak{B}$  den Wert  $\bar{\mu} d\mathfrak{H}$  nach (60), so ergibt sich

$$\bar{\mu} = \frac{\mu + \bar{\mu}}{2}, \quad (62)$$

d. h. der Differentialwert zweiter Art ist das arithmetische Mittel aus dem Differentialwert erster Art und dem Integralwert der Magnetisierungskonstante.

Kennt man die Magnetisierungskurve eines Körpers, d. h. zu jedem Wert  $\mathfrak{H}$  der Feldstärke den Wert seiner magnetischen Induktion  $\mathfrak{B}$ , so

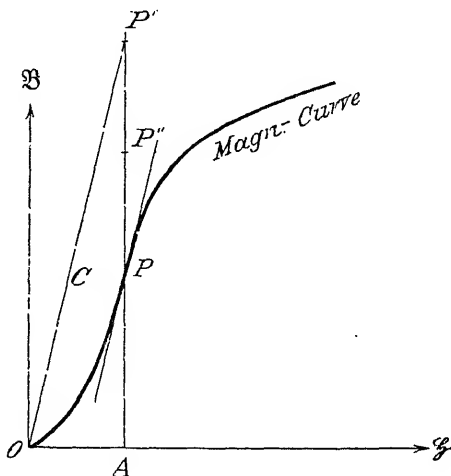


Fig. 30.

kann man für jeden Wert  $\mathfrak{H}$  der Feldstärke die nach den drei verschiedenen Definitionen sich ergebenden Werte der Permeabilität des Körpers durch folgende geometrische Konstruktion finden:

Der Integralwert  $\mu$  für die Feldstärke  $OA$  ist gleich dem Verhältnis der Strecken  $PA : AO$  (vgl. Fig. 30). Der Differentialwert erster Art  $\bar{\mu}$  wird erhalten, indem man durch den Anfangspunkt  $O$  der Magnetisierungskurve eine Parallele  $OC$  zu der geometrischen Tangente zieht, welche die Magnetisierungskurve in  $P$  besitzt. Die Linie  $OC$  mag von dem in  $A$  errichteten Lote in  $P'$  geschnitten werden. Dann ist der Differentialwert erster Art  $\bar{\mu}$  gleich dem Verhältnis der Strecken  $P'A : AO$ .

Bezeichnet sodann  $P''$  den Mittelpunkt der Strecke  $PP'$ , so ist der Differentialwert zweiter Art  $\bar{\bar{\mu}}$  gleich dem Verhältnis der Strecken  $P''A : AO$ . Es ist also:

$$\mu : \bar{\mu} : \bar{\bar{\mu}} = PA : P'A : P''A.$$

Alle drei Werte für  $\mu$  fallen zusammen, wenn die Magnetisierungskurve eine gerade Linie ist, d. h. wenn  $\mu$  von der Feldstärke  $\mathfrak{H}$  unabhängig ist.

Nach (31), S. 172 ist

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi \mathfrak{J},$$

also

$$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{H}} = 1 + 4\pi \frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{H}} \quad \text{und} \quad \frac{d\mathfrak{B}}{d\mathfrak{H}} = 1 + 4\pi \frac{d\mathfrak{J}}{d\mathfrak{H}}. \quad (63)$$

Man ersieht daraus, daß der Differentialwert erster Art  $\bar{\mu}$  gleich 1 wird, sobald das Maximum der Magnetisierung erreicht ist. Der Integralwert  $\mu$  dagegen und ebenso der Differentialwert zweiter Art  $\bar{\bar{\mu}}$  nähern sich asymptotisch dem Grenzwerte 1 für unendlich große Feldstärken.

### 32. Die magnetische Energie bei ferromagnetischen Körpern.

Alle bisherigen Berechnungen der Energie des magnetischen und des elektrischen Feldes und ebenso die auf S. 115 durchgeführte Berechnung der Polarisationsarbeit in dielektrischen Mitteln beruhen auf der Voraussetzung, daß die magnetischen und elektrischen Eigenschaften der Stoffe durch Größen definiert sind, die von der Feldstärke unabhängig sind. Für die ferromagnetischen Stoffe ist diese Bedingung nicht erfüllt, und es fragt sich, welcher Ausdruck bei ihnen an die Stelle der früher aufgestellten Energieausdrücke zu setzen ist. Der Ausdruck (41) für die Energie eines magnetischen Feldes

$$T = \frac{1}{8\pi} \int \mu \mathfrak{H}^2 d\tau \quad (41)$$

ist ein Integralausdruck, der den Gesamtbetrag der im Raum aufgespeicherten Energie bei der Magnetisierung vom Felde 0 bis zum Felde  $\mathfrak{H}$  angibt. Ist  $\mu$  mit  $\mathfrak{H}$  veränderlich, so muß man zunächst einen Differentialausdruck für die Zunahme der magnetischen Energie aufstellen, die mit einer Steigerung der Feldstärke verbunden ist. Zur Gewinnung eines solchen Ausdruckes kann man an die Betrachtungen über die Polarisationsarbeit auf S. 115 anknüpfen. Man kann nämlich die ganze Energie des Feldes in zwei Teile zerlegen; der eine Teil ist die Energie des Feldes, wie sie im leeren Raume der bestehenden Verteilung der magnetischen Kraft entspricht; der andere Teil ist der auf der Polarisation des eingelagerten Mediums beruhende Anteil der Energie. Diese Zerlegung entspricht dem Umstande, daß wir  $\mu = 1 + 4\pi \kappa$  setzen können, wodurch (41) übergeht in



$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{8\pi} \int \mathfrak{H}^2 d\mathfrak{v} + \frac{1}{2} \int \mathfrak{z} \mathfrak{H}^2 d\mathfrak{v} \\
 &= \frac{1}{8\pi} \int \mathfrak{H}^2 d\mathfrak{v} + \frac{1}{2} \int \frac{\mathfrak{H}^2}{\mathfrak{z}} d\mathfrak{v}.
 \end{aligned}$$

Legen wir diese Zerlegung der Gesamtenergie in zwei Teile auch der Betrachtung der ferromagnetischen Mittel zugrunde, so würde auch der Zuwachs der Energie, der mit einer Steigerung der Feldstärke  $\mathfrak{H}$  um  $\Delta\mathfrak{H}$  verknüpft ist, aus zwei Anteilen bestehen. Der eine Anteil würde dem Zuwachs der Energie des Feldes im leeren Raum entsprechen und auf alle Fälle durch den Ausdruck

$$\frac{1}{4\pi} \int d\mathfrak{v} \mathfrak{H} \Delta\mathfrak{H}$$

gegeben sein; denn sein Integral über  $\mathfrak{H}$  von 0 bis  $\mathfrak{H}$  müßte ja immer den ersten Summand des obigen Ausdrucks geben. Der zweite Anteil dagegen würde der auf die Steigerung der Polarisierung aufgewandten Arbeit entsprechen. Auf S. 115 war für die Arbeit, die die elektrische Kraft  $\mathfrak{E}_0$  bei der Vermehrung des elektrischen Momentes  $m$  eines elektrischen Dipols um  $\delta m$  leistet, der Ausdruck  $\mathfrak{E}_0 \delta m$  aufgestellt worden. An die Stelle der elektrischen tritt hier die magnetische Feldstärke  $\mathfrak{H}$ , an Stelle des elektrischen Momentes des Dipols das magnetische Moment  $\mathfrak{J} d\mathfrak{v}$  des Raumelementes  $d\mathfrak{v}$ . Wächst dieses um  $\Delta\mathfrak{J}$ , weil das Feld  $\mathfrak{H}$  um  $\Delta\mathfrak{H}$  wächst, so leisten die Kräfte, die das Feld steigern, zugleich die Polarisationsarbeit

$$\int \mathfrak{H} \Delta\mathfrak{J} d\mathfrak{v}.$$

Demnach ist der gesamte Zuwachs an Energie des Feldes:

$$\Delta T = \frac{1}{4\pi} \int \mathfrak{H} \Delta\mathfrak{H} d\mathfrak{v} + \int \mathfrak{H} \Delta\mathfrak{J} d\mathfrak{v}, \quad (64)$$

die Integrale genommen über das ganze Feld.

Dafür kann man schreiben:

$$\begin{aligned}
 \Delta T &= \frac{1}{4\pi} \int d\mathfrak{v} \mathfrak{H} \Delta(\mathfrak{H} + 4\pi \mathfrak{J}) \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int d\mathfrak{v} \mathfrak{H} \Delta\mathfrak{B}, \quad .
 \end{aligned}$$

und die ganze Energie, bei einer Magnetisierung vom Felde 0 bis zum Felde  $\mathfrak{H}$ , würde gegeben sein durch den Ausdruck:

$$T = \frac{1}{4\pi} \int d\mathfrak{v} \int_0^{\mathfrak{H}} \mathfrak{H} d\mathfrak{B}. \quad (65)$$

Dieser Ausdruck ist allgemeiner als die Formel (41). Er gilt für Mittel, deren Magnetisierung eine beliebige Funktion der Feldstärke ist. Ist diese Funktion eine einfache Proportionalität, d. h.  $\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$  und  $\mu$  eine Konstante, so geht der Ausdruck in den der Formel (41) über. Unter Benutzung der Bezeichnungsweise des vorigen Abschnittes können wir auch schreiben:

$$T = \frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{v} \int_0^{\mathfrak{H}} \frac{1}{\mu} \mathfrak{H} d\mathfrak{H}. \quad (66)$$

Für die Energie der Volumeinheit würde demnach allgemein, auch für ferromagnetische Medien, der Ausdruck gelten:

$$T_v = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\mathfrak{H}} \mathfrak{H} d\mathfrak{B}. \quad (67)$$

Eine entsprechende Umgestaltung haben die Formeln zu erfahren, die die ponderomotorischen Kräfte auf ferromagnetische Stoffe in einem magnetischen Felde ausdrücken. Wir können die Berechnung ebenso wie in I, 44 für die dielektrischen Körper im elektrischen Felde durchführen; nur müssen wir wieder berücksichtigen, daß die Polarisationsarbeit durch ein Integral über  $d\mathfrak{H}$  bzw.  $d\mathfrak{J}$  auszudrücken ist. Sie würde, entsprechend den obigen Darlegungen, durch den Ausdruck

$$U = \int d\mathbf{v} \int_0^{\mathfrak{J}} \mathfrak{H} d\mathfrak{J} \quad (68)$$

gegeben sein für isotrope Medien, in denen die Richtungen von  $\mathfrak{H}$  und  $\mathfrak{J}$  zusammenfallen, oder durch

$$U = \int d\mathbf{v} \int (\mathfrak{H}_x d\mathfrak{J}_x + \mathfrak{H}_y d\mathfrak{J}_y + \mathfrak{H}_z d\mathfrak{J}_z) \quad (68a)$$

im allgemeineren Falle anisotroper Medien. Die Körper würden sich dann nach I, 44 so bewegen müssen, daß dieser Ausdruck möglichst groß wird.

### 33. Hysteresis.

Die bisher behandelten Eigenschaften der ferromagnetischen Körper erschöpfen ihre Eigentümlichkeiten noch nicht. Es kommt die weitere Schwierigkeit hinzu, daß die Funktion, welche die Abhängigkeit der induzierten Magnetisierung von der Feldstärke darstellt, keine eindeutige Funktion ist. Man erhält nämlich für einen bestimmten Wert der Feldstärke verschiedene Werte der Magnetisierung, je nachdem man jenen Wert von geringeren oder von größeren Werten der Feldstärke

aus erreicht, und zwar sind die Werte der Magnetisierung größer bei absteigenden als bei aufsteigenden Feldstärken. Man bezeichnet diese Eigentümlichkeit als Hysteresis. Sie ist der allgemeinere Ausdruck

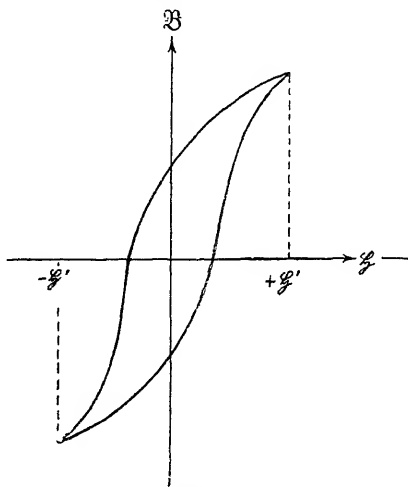


Fig. 31.

für die Eigenschaft der ferromagnetischen Körper, nach völligem Aufhören der äußeren magnetisierenden Wirkung noch eine gewisse remanente Magnetisierung zu besitzen. Die vollständige Untersuchung der Magnetisierungskurve bei aufsteigender und dann wieder absteigender Feldstärke zeigt, daß für jede Feldstärke, die kleiner ist als eine vorhergehende, ein gewisses Maß von remanentem Magnetismus existiert. Unterwirft man eine solche Substanz einer oft wiederholten zyklischen Änderung der Feldstärke zwischen den Grenz-

werten  $+H'$  und  $-H'$ , so nimmt die Magnetisierungskurve die Gestalt einer geschlossenen Kurve an (Fig. 31), die man als Hysteresisschleife bezeichnet.

### 34. Erwärmung durch Hysteresis.

Die Energieaufwendungen beim Magnetisieren und Entmagnetisieren ferromagnetischer Substanzen lassen sich mittels der Magnetisierungskurve graphisch leicht veranschaulichen. Nimmt man  $H$  als Abszisse,  $J$  als Ordinate und stellt  $AB$  ein sehr kleines Stück der Kurve bei aufsteigender Magnetisierung dar (Fig. 32), so ist die Magnetisierungsarbeit für die Feld-

änderung von  $H_1$  bis  $H_2$  für die Volumeinheit durch  $\frac{H_1 + H_2}{2} (J_2 - J_1)$  ge-

geben. Dieser Größe entspricht in der Zeichnung der Flächeninhalt des Rechteckes  $J_1 AB J_2$ . Geht man nachher von  $C$  rückwärts nach kleineren Feldstärken, so verläuft die Magnetisierung längs  $CDEF$ , und bei der Entmagnetisierung von  $H_2$  bis  $H_1$  stellt der Inhalt des Rechteckes  $J_2 ED J_1$  die Entmagnetisierungsarbeit dar. Geht man vom unmagnetischen Zustande aus bis  $C$  und dann bis zum Feld Null zurück, d. h. bis  $F$ , so ist die Differenz der Magnetisierungs- und der Entmagnetisierungsarbeit durch den Inhalt der von der Schleife  $OAB CDEF$  und der Ordinate  $OF$  eingeschlossenen Fläche gegeben.

Man kommt zu dem gleichen Resultat, wenn man, wie es Drude

in der ersten Auflage getan hat, die ponderomotorischen Kräfte betrachtet, die auf ein Eisenstück im Magnetfelde wirken. Wenn ein unmagnetisches Eisenstück aus unendlicher Entfernung dem Pole eines permanenten Magneten genähert wird, so gewinnt man eine mechanische Arbeit, die die Kräfte des Feldes leisten. Entfernt man das Eisenstück wieder bis zur Unendlichkeit, so muß man mehr Arbeit aufwenden, als man auf dem Hinwege gewonnen hatte, weil der Magnetismus des Eisens und damit die auf das Stück wirkenden Kräfte auf dem Rückwege an jeder Stelle des Feldes größer sind, als sie auf dem Hinwege waren. Der Ueberschuß der aufgewandten über die gewonnene Arbeit ist wieder durch die Fläche  $OABCEFO$  gegeben oder, wenn man  $\mathfrak{B}$  statt  $\mathfrak{J}$  als Ordinate der Zeichnung nimmt, durch den Inhalt der entsprechenden Fläche dividiert durch  $4\pi$ .

Das Aequivalent dieses Arbeitsaufwandes liegt zunächst in der magnetischen Energie, die der remanente Magnetismus des Eisens reprä-

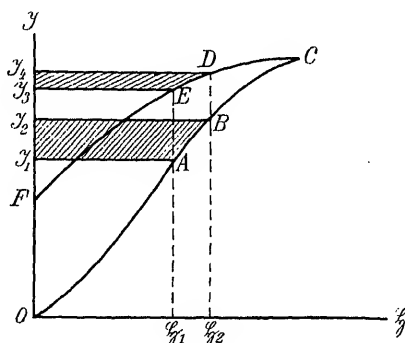


Fig. 82.

sentiert. Allein man kann nicht die Aussage machen, daß die Energie dieser Magnetisierung durch jenen Arbeitsaufwand gemessen wird. Denn sie ist nicht das einzige Aequivalent jenes Arbeitsaufwandes. Es treten vielmehr bei diesen Magnetisierungen und Entmagnetisierungen regelmäßig Erwärmungen des Eisens auf. Daß dies der Fall sein muß, folgt sofort, wenn man das Eisen einer vollständigen zyklischen Magnetisierung unterwirft. Dann ist der magnetische Zustand des Eisens am Schluß der gleiche wie am Anfang; die magnetische Energie ist also nicht geändert. Gleichwohl umschließt die Hysteresisschleife eine gewisse Fläche, die ein Maß für eine ganz bestimmte, während des Kreisprozesses geleistete Arbeit ist.

Dieser Arbeitsaufwand kann nicht verloren gehen. Als einziges Aequivalent kann aber in diesem Falle nur eine Temperaturerhöhung des Eisens gefunden werden. Dasselbe erhitzt sich daher durch zyklische Magnetisierungsprozesse nach dem Gesetz, daß die

durch einen Zyklus der Volumeneinheit zugeführte Wärmemenge gleich ist dem Flächeninhalt der dem Zyklus entsprechenden Magnetisierungskurve im Koordinatensystem  $\mathfrak{S}, \mathfrak{Q}$ . Dieser Satz ist zuerst von Warburg<sup>1)</sup> ausgesprochen.

Bei der vorstehenden Ableitung des Satzes ist angenommen worden, daß die zyklische Magnetisierung durch Bewegung des Eisenstückes im Felde hervorgebracht, die Arbeit also als mechanische Arbeit der auf das Eisenstück wirkenden ponderomotorischen Kräfte gewonnen werde. Wir werden in Kapitel V eine andere Ableitung dieses Satzes geben.

### 35. Remanenz und Koerzitivkraft.

Diejenige Magnetisierung, welche in einem Eisenstück zurückbleibt, wenn das äußere Feld nach einem aufsteigenden und wieder abfallenden Verlaufe schließlich Null geworden ist, nennt man die remanente

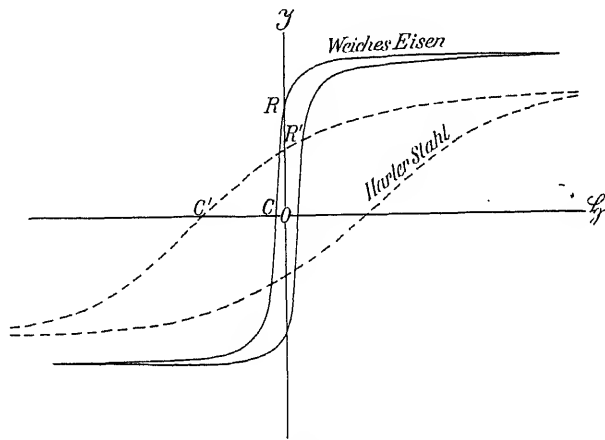


Fig. 33.

Magnetisierung oder die Remanenz. Man schreibt dieses teilweise Festhalten des induzierten Magnetismus einer besonderen Fähigkeit des Eisens zu, die man seine Koerzitivkraft nennt. Diese mißt man durch die Stärke desjenigen Feldes, das man in einer dem früheren magnetisierenden Felde entgegengesetzten Richtung auf das Eisen wirken lassen muß, um es wieder vollkommen unmagnetisch zu machen. Ist die Koerzitivkraft gering, wie bei weichem Eisen, so liegen die beiden Äste der Hysteresisschleife eng beieinander und umschließen eine kleine Fläche. Ist die Koerzitivkraft groß, wie bei hartem Stahl, so rücken die beiden Äste weit auseinander und umspannen eine große Fläche.

<sup>1)</sup> E. Warburg, Wied. Ann. 13, S. 141, 1881.

Beide Materialien unterscheiden sich aber gleichzeitig dadurch voneinander, daß der harte Stahl ein wesentlich kleineres Sättigungsmaximum der Magnetisierung besitzt als das weiche Eisen. Die in Fig. 33 dargestellten Hysteresisschleifen des weichen Eisens und des harten Stahls geben die beste Veranschaulichung dieser Verhältnisse. Die Remanenz ist durch die Ordinaten  $OR$  für das weiche Eisen und  $OR'$  für den Stahl, die Koerzitivkraft durch die Abszissen  $OC$  für das weiche Eisen und  $OC'$  für den Stahl dargestellt.

Die Tatsache der Sättigungsmagnetisierung findet ihre anschaulichste Deutung in der Vorstellung, daß der Akt der Magnetisierung nicht in einer Scheidung von Magnetismusk Mengen, sondern in einer Richtung präexistierender Molekularmagnete bestehe, die im unmagnetischen Körper mit ihren Achsen nach allen möglichen Richtungen gelagert sind und durch den Einfluß des magnetisierenden Feldes mehr oder weniger parallel gerichtet werden. Dabei muß man, um die Remanenzerscheinungen auf dieser Grundlage erklären zu können, noch die Vorstellung von Wechselwirkungen zwischen den Molekularmagneten hinzunehmen, die die Drehungen beeinflussen und die Molekularmagnete auch nach Aufhören der äußeren Richtungskraft in gewissen Lagen festzuhalten vermögen. Auf die speziellere Ausgestaltung dieser Hypothese einzugehen, ist hier nicht der Ort.

### 36. Permanente Magnete.

Die Grundlage unserer ganzen Betrachtungen über das magneto-statische Feld bildet die Annahme sog. permanenter Magnete, d. h. von Magneten, deren Polstärke auch bei gegenseitiger Beeinflussung der Magnete unverändert bleiben sollte. Wir haben wiederholt darauf hingewiesen, daß diese Annahme der Wirklichkeit nicht streng entspricht. Die Betrachtungen der letzten Abschnitte geben uns die Möglichkeit, das Problem der permanenten Magnete einer genaueren Erörterung zu unterziehen. Denn die permanenten Magnete sind ja nur ein spezieller Fall der hysteretischen Erscheinungen. Remanenter Magnetismus kommt ebensowohl beim weichen Eisen wie beim harten Stahl vor. Ja die Betrachtung der Fig. 33 zeigt, daß man mit einem Stabe aus weichem Eisen, nachdem er bis zur Sättigung magnetisiert worden ist, sogar ein stärkeres remanentes Moment erhalten würde, als mit einem Stahlstabe von gleichen Dimensionen, da  $OR > OR'$  ist. Aber dieses Moment des Eisenstabes würde nichts weniger als ein permanentes Moment sein. Denn die Hysteresiskurve verläuft im Punkte  $R$  steil nach unten; das bedeutet, daß schon geringe Beeinflussungen, schon schwache äußere

Felder das Moment dieses Eisenstabes sehr stark verändern werden. Die Konstanz des Moments wird man offenbar um so besser erreichen, je flacher die Hysteresiskurve des Materials für  $\mathfrak{H} = 0$  verläuft. Diese Bedingung ist beim Stahl offenbar sehr viel besser erfüllt, und zwar um so besser, je härter der Stahl und je größer damit seine Koerzitivkraft ist. Aber vollkommen permanente Magnete, solche, deren Moment durch äußere Felder in keiner Weise beeinflusst wird, gibt es offenbar überhaupt nicht. Auch der härteste Stahl ist durch ein äußeres Feld induzierbar. Für schwache Felder läßt sich sein magnetisches Moment alsdann darstellen in der Form

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_k \pm p\mathfrak{H}, \quad (69)$$

wo  $\mathfrak{M}_k$  das konstante Moment und  $p\mathfrak{H}$  das induzierte Moment bedeutet. Es ergeben sich daraus für genaue magnetische Messungen Korrekturen, z. B. für das magnetische Moment eines Stahlstabes, je nachdem er in ostwestlicher oder nordsüdlicher Richtung liegt<sup>1)</sup>. Aber Gleichung (69), die eine beliebig umkehrbare Änderung des magnetischen Momentes, ein Schwanken um einen konstant bleibenden Wert herum darstellt, gilt nur für schwache Felder. Bei Beeinflussung des Magneten durch stärkere Felder treten dauernde Veränderungen des Momentes auf. Die in diesem Kapitel gegebene Darstellung muß sich also unbedingt auf solche Fälle beschränken, in denen die Stahlmagnete nur der Einwirkung schwacher Felder ausgesetzt sind. Dann sind sie angenähert als Gebilde von konstanter Polstärke anzusehen.

Bei der Betrachtung des induzierten Magnetismus hatten wir von der entmagnetisierenden Wirkung der induzierten Belegungen gesprochen (s. Abschnitt 23). Eine solche Wirkung muß selbstverständlich auch für die remanente Belegung bestehen. Im Inneren eines permanenten Magnetstabes besteht daher ein magnetisches Feld, dessen Richtung derjenigen der remanenten Induktion gerade entgegengesetzt ist. Diese entmagnetisierende Wirkung hängt, wie wir früher gesehen haben, von der Form des Magneten ab. Um möglichst kräftige Magnete zu erhalten, muß man daher die Form so wählen, daß die entmagnetisierende Wirkung in ihnen möglichst klein ist. Das ist der Fall, je geringer der Querschnitt des Magneten im Verhältnis zu seiner Länge ist. Wir haben uns deswegen die Magnetstäbe, mit denen wir operierten, immer in Form sehr langer dünner Stäbe gedacht.

Verbindet man die Pole eines permanenten Magneten durch eine Armatur aus weichem Eisen, so wird die Wirkung seiner Pole durch die starken Pole, die er im anliegenden weichen Eisen induziert, kom-

<sup>1)</sup> Siehe F. Kohlrausch, Lehrbuch der praktischen Physik, 11. Aufl., Berlin 1910, S. 377.

pensiert und die entmagnetisierende Wirkung infolgedessen aufgehoben. Dadurch ist das Innere des Magneten dem schädigenden Einfluß des entmagnetisierenden Feldes entzogen, das sonst bewirkt, daß im Laufe der Zeit durch Erschütterungen und Temperaturschwankungen das magnetische Moment des Magneten zurückgeht. Hierin liegt die konservierende Bedeutung der Armatur für die Permanenz der Magnete.

Da nach dem obigen auch der magnetisierte Stahl durch ein äußeres Feld noch einer Induktionswirkung unterliegt, so muß bei einem Magneten ohne Armatur das Moment durch ein von dem entmagnetisierenden Feld induziertes Gegenmoment geschwächt erscheinen.

Daraus folgt, daß in einer Theorie, welche die Induzierbarkeit des Materials der Stahlmagnete berücksichtigt, der freie Magnetismus eines Magneten nicht mit dem wahren Magnetismus identifiziert werden darf, wie wir es oben auf S. 152 unter der stillschweigenden Voraussetzung unbeeinflussbarer Magnete getan haben. Denn wenn man eine permanente Magnetisierung eines Magneten als gegeben annimmt und sie als die wahre Magnetisierung bezeichnet, so bedingt das von dieser Magnetisierung im Inneren des Magneten hervorgerufene Feld, auch wenn ein von anderen Magneten herrührendes induzierendes Feld nicht vorhanden ist, eine induzierte Magnetisierung in der Masse des Magneten, und erst beide zusammen, die wahre und die induzierte Magnetisierung ergeben den die äußere Wirkung bestimmenden freien Magnetismus<sup>1)</sup>.

Hebt man durch Umgeben des Magneten mit weichem Eisen die entmagnetisierende Wirkung auf, so muß das magnetische Moment des Stahlstabes dadurch wachsen. Daraus ist ersichtlich, daß die permanenten Magnete auch insofern nicht in Strenge permanent sind, als ihr Moment durch die Permeabilität der Umgebung beeinflusst wird, allerdings nur dann, wenn diese Permeabilität so hoch ist wie beim Eisen (vgl. die Bemerkungen in Abschnitt 17). Auch diese Wirkung ist aber um so geringfügiger, je länger und dünner die Stäbe sind.

Welche Veränderungen in einem permanenten Magneten vor sich gehen, wenn der magnetische Widerstand seiner Umgebung geändert wird, darüber kann die Theorie zunächst keine bestimmte Aussage machen; diese Frage kann nur durch das Experiment entschieden werden. Solche Versuche sind in letzter Zeit wiederholt angestellt worden, die letzten und umfangreichsten von Kempken<sup>2)</sup>. Er stellte einem halbringförmigen Stahlmagneten einen ebenso geformten Anker aus Weicheisen

<sup>1)</sup> Die ausführlichere Darstellung dieser Verhältnisse findet man bei R. Gans, Einführung in die Theorie des Magnetismus. Leipzig, B. G. Teubner, 1908.

<sup>2)</sup> E. Kempken, Ann. der Physik 1906, 20, S. 1017, wo auch die frühere



oder einen gleichen Stahlmagneten gegenüber; zwischen den eben geschliffenen Polen blieben schmale Luftzwischenräume, deren Weite durch Verschieben der Halbringe gegeneinander geändert werden konnte. Mit Hilfe einer Induktionsspule (s. V, 7) wurde die Feldstärke in diesem Schlitz und ihre Abhängigkeit von der Schlitzweite  $\lambda$  gemessen. Die Beobachtungen ergaben, daß sich die Feldstärke in weiten Grenzen durch den Ausdruck

$$\frac{C}{a + \lambda}$$

darstellen ließ, in dem  $C$  und  $a$  Konstante waren. Das gleiche Ergebnis hat bei einer ganz ähnlichen Untersuchung Gehne erhalten<sup>1)</sup>. Dieser Ausdruck läßt sich in Parallele zur Formel (45) auf S. 184 stellen. Denn die Feldstärke ist ja durch die Zahl der Induktionslinien im Luftspalte gegeben. Der magnetische Widerstand  $\omega_m$  einer durch den Luftspalt und den Eisenanker verlaufenden Induktionsröhre aber ist, wenn  $l_i$  die Länge der Röhre im Eisen,  $q$  ihren Querschnitt bedeutet,

$$\omega_m = \frac{l_i}{\mu q} + \frac{\lambda}{q},$$

wobei für eine in der Mitte des Ringes verlaufende Röhre  $q$  als nahe konstant anzusehen ist. Berücksichtigt man diese Beziehung, so würde das Resultat der beschriebenen Versuche offenbar dahin zu deuten sein, daß die permanenten Magnete bei Veränderungen des äußeren magnetischen Widerstandes als Gebilde von konstanter magnetomotorischer Kraft aufzufassen seien. Bei Konstanz oder nur geringer Veränderlichkeit des Widerstandes würde damit natürlich auch die Konstanz des Kraftflusses oder der Polstärke gegeben sein.

Ob sich aber das Verhalten der permanenten Magnete wirklich durch die eine oder die andere dieser etwas schematischen Formulierungen in aller Strenge darstellen läßt, erscheint im letzten Grund bei der verwickelten Natur dieses Problems doch zweifelhaft. Zu einer rationellen Formulierung dürfte man wohl nur auf dem Wege der vollständigen Durchbildung molekulartheoretischer Vorstellungen gelangen. Diese aber liegen außerhalb des Rahmens derjenigen Darstellung, die in diesem Buche durchgeführt wird.

### 37. Magnetostriktion.

Wir wollen uns einen Körper der Permeabilität  $\mu$  in ein völlig gleichförmiges magnetisches Feld gebracht denken, und zwar soll diese Gleichförmigkeit der Feldstärke auch durch die Einlagerung des Körpers nicht geändert werden. Diese Voraussetzungen sind z. B. erfüllt, wenn

<sup>1)</sup> P. Gehne, Diss. Halle 1908, Ann. d. Phys., (4) 28, S. 553, 1909.

man ein magnetisches Feld durch ein ringförmig geschlossenes Solenoid herstellt und den Körper in Form eines Ringes, parallel zu den Kraftlinien des Feldes, einlagert.

In diesem Falle wirken keine ponderomotorischen Kräfte auf die Teilchen des Körpers. Derselbe kann sich daher weder als Ganzes in Bewegung setzen, wenn das Magnetfeld des Solenoids durch den elektrischen Strom erregt wird, noch auch können die Teilchen irgendwie gegeneinander bewegt werden, d. h. der Körper kann beim Erregen des Magnetfeldes nicht deformiert werden, wofern man wenigstens von einer etwaigen, durch die Deformation veranlaßten Volumenänderung des Körpers absehen kann. Denn, wie die Formel (41) auf S. 182 für die magnetische Energie  $T$  lehrt, ändert sich, falls die Feldstärke  $\mathfrak{H}$  konstant erhalten wird,  $T$  durch die Deformation nicht, wenn dabei das Volumen und die Permeabilität ungeändert bleiben. Es wird daher bei

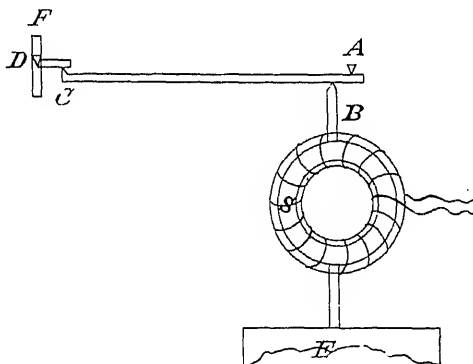


Fig. 34.

der Deformation von den magnetischen Kräften keine Arbeit geleistet, und daher ist auch bei Erregung des Feldes  $\mathfrak{H}$  kein Anlaß zu einer Störung des Gleichgewichts, d. h. zu einer Deformation gegeben.

Und doch hat Bidwell<sup>1)</sup> deutlich konstatiert, daß ein Eisenring bei Erregung des Magnetfeldes des Solenoides im allgemeinen Formänderungen erleidet. Bidwell konnte die Längenänderung des Eisenringes in Richtung der magnetischen Kraftlinien durch die Aenderung des vertikalen Durchmessers des Ringes beobachten. Diese wurde dadurch gemessen, daß der auf einem festen Widerlager E (vgl. Fig. 34) aufgestützte Eisenring S an seinem oberen Ende einen Stab B trug, welcher auf einen um A drehbaren langen Hebel AC wirkte. Die Bewegung des Endes C wurde durch Beobachtung der um den Punkt D erfolgenden Drehung des Spiegels F mit Skala und Fernrohr ermittelt.

<sup>1)</sup> S. Bidwell, Proc. Roy. Soc. 40, S. 109, 257, 1886; 47, S. 469, 1890. — Phil. Trans. 1888, S. 205.

Die Empfindlichkeit der Anordnung war so groß, daß man eine Längenänderung von ungefähr einem Zehnmilliontel der ganzen Länge nach ablesen konnte. — Um eine Erwärmung durch die Magnetisierungsspule möglichst zu vermeiden, war der Ring von einem Holzmantel umgeben; ferner wurde der Erregerstrom nie länger als Bruchteile einer Sekunde geschlossen.

Bidwell fand nun, daß der Eisenring sich infolge der Magnetisierung bei kleinen Feldstärken verlängerte. Bei wachsender Feldstärke erreicht die Verlängerung ein Maximum, vermindert sich dann und ist Null für  $\mathfrak{H} = 300$  cgs-Einheiten. In noch stärkeren Feldern verkürzt sich das Eisen, und diese Verkürzung scheint sich, wenn man die Feldstärke weiter steigert, einer bestimmten Grenze zu nähern. Letztere kann bis zu  $7 \cdot 10^{-6}$  der eigenen Länge betragen, während die größte Verlängerung (bei etwa  $\mathfrak{H} = 100$ ) je nach der Eisenprobe von  $5 \cdot 10^{-6}$  bis  $2,5 \cdot 10^{-6}$  variierte.

Diese Erscheinung kann nicht erklärt werden durch eine durch die Deformation eintretende Volumenänderung des Eisens, welche eine gewisse Aenderung der magnetischen Energie veranlassen könnte. Denn Joule<sup>1)</sup>, der zuerst Versuche über die Längenänderung des Eisens im Magnetfelde anstellte, fand gleichzeitig mit der Verlängerung eine seitliche Kontraktion, so daß sich das Volumen des Eisenkörpers nicht merklich änderte. Dies konnte Joule noch direkter dadurch nachweisen, daß er den Eisenkörper in eine mit Flüssigkeit gefüllte Röhre steckte, die mit Ausnahme eines ausgezogenen, kapillaren Teiles allseitig geschlossen war. Der Flüssigkeitsmeniskus im Kapillarrohr verschob sich nicht bei Erregung des Magnetfeldes.

Die Erklärung dieser Erscheinung ergibt sich aber durch Berücksichtigung des Umstandes, daß die Magnetisierungskonstante des Eisens durch Deformationen geändert wird, insbesondere durch die von Villari im Jahre 1868 gemachte Entdeckung, daß sich der Sinn dieser Aenderung bei einer gewissen Feldstärke umkehrt, indem für kleine Feldstärken die Magnetisierungskonstante des Eisens durch longitudinalen Zug wächst, dagegen für große Feldstärken abnimmt<sup>2)</sup>.

In der Tat läßt sich nach energetischen Prinzipien zeigen, daß sich Eisen durch die Magnetisierung verlängern muß, wenn der Differentialwert zweiter Art seiner Magnetisierungskonstante durch Zug wächst. Man würde nämlich sonst einen Kreisprozeß vollführen können, durch welchen man fortwährend Arbeit erhielte, d. h. es würde sich ein Perpetuum mobile ergeben. Die Betrachtungen, die wir hier durchzuführen hätten, sind ganz die gleichen wie diejenigen, die wir im Kapitel I,

<sup>1)</sup> Joule, Phil. Mag. 30, S. 76, 225, 1847. — Reprint of Papers, S. 235.

<sup>2)</sup> E. Villari, Pogg. Ann. 126, S. 87, 1868.

Abschnitt 47 für die Elektrisierung dielektrischer Körper durchgeführt haben. Wir können uns einen entsprechenden Kreisprozeß mit einer magnetisierbaren Platte ausgeführt denken, die vom Feld  $\mathfrak{H}_0$  in das Feld  $\mathfrak{H}_0'$  gebracht, dort gedehnt, dann in das Feld  $\mathfrak{H}_0$  zurückgebracht und dort wieder zusammengedrückt wird. Das Resultat wäre die Gleichung (154) auf S. 126, die für das magnetische Problem lauten würde:

$$\frac{1}{8\pi}(\mathfrak{H}_0'^2 - \mathfrak{H}_0^2)v \frac{\mu' - \mu}{\mu^2} = (P' - P) \Delta v. \quad (70)$$

Dabei bedeutet  $\mu'$  den Wert, den die Permeabilität  $\mu$  annimmt, wenn das Medium ohne Aenderung seiner Querdimension in Richtung der magnetischen Kraftlinien gedehnt wird, während  $P'dv$  die Arbeit darstellt, die die inneren Kräfte bei der Dehnung im Felde  $\mathfrak{H}_0'$  leisten; entsprechend ist  $-Pdv$  die Arbeit, die gegen diese inneren Kräfte bei der Zusammendrückung im Felde  $\mathfrak{H}_0$  aufgewandt werden muß. Dabei würden auch die an den Magneten angreifenden ponderomotorischen Kräfte des Feldes bei der Dehnung und Zusammendrückung wieder in derselben Weise zu berücksichtigen sein, wie auf S. 126. Die Differenz  $P' - P$  stellt dann wieder eine Spannung dar, die im Inneren des Magnetikums durch die verstärkte Magnetisierung hervorgerufen wird, und die man entsprechend als Magnetostriktionskraft bezeichnet. Nennt man sie  $k_i$ , so würde sie nach (156) und (161) (S. 127 u. 129) dargestellt sein für eine Steigerung der inneren Feldstärke  $\mathfrak{H}$  um  $d\mathfrak{H}$  durch

$$k_i = \frac{1}{8\pi} d\mathfrak{H}^2 \left( \frac{\partial \mu}{\partial \lambda} \right)_i = \mathfrak{H} d\mathfrak{H} \left( \frac{\partial \kappa}{\partial \lambda} \right)_i, \quad (71)$$

wenn  $\lambda$  wieder die relative Dehnung in Richtung der Kraftlinien bedeutet und wenn man berücksichtigt, daß  $\mu = 1 + 4\pi\kappa$  ist. Nimmt also  $\mu$  und entsprechend  $\kappa$  durch einen longitudinalen Zug zu, wie es bei Eisen für kleine Feldstärken der Fall ist, so ist  $k_i$  positiv. Die Spannung, unter der das magnetisierte Eisen steht, wächst mit der Magnetisierung und die Magnetisierung muß also eine Verlängerung des Eisens bewirken. Ist  $l$  die Länge des Eisens,  $E$  sein Elastizitätsmodul (elastischer Dehnungswiderstand), so ist die durch die Zugkraft  $k_i$  hervorgerufene Verlängerung:

$$\delta l = \frac{k_i l}{E},$$

also die relative Verlängerung:

$$\frac{\delta l}{l} = \left( \frac{\partial \kappa}{\partial \lambda} \right)_i \frac{\mathfrak{H} d\mathfrak{H}}{E}. \quad (72)$$

Denkt man sich die Verlängerung senkrecht zu den Kraftlinien ausgeführt mit der Annahme unveränderter Dimensionen in den zur Dehnung senkrechten Richtungen, so gilt entsprechend:

$$\frac{\partial l}{1} = \left( \frac{\partial \kappa}{\partial \lambda} \right)_s \frac{\oint d\oint}{E}. \quad (73)$$

Bei den para- und diamagnetischen Stoffen kommen diese Wirkungen infolge der außerordentlich geringen Beeinflußbarkeit dieser Stoffe durch das magnetische Feld nicht zur Wahrnehmung. Bei den ferromagnetischen Stoffen mit ihren hohen Magnetisierbarkeiten dagegen treten sie stark in die Erscheinung. Hier aber ist bei Magnetisierungen von endlicher Stärke zu beachten, daß  $\mu$  bzw.  $\kappa$  keine Konstanten, sondern Funktionen der Feldstärke sind <sup>1)</sup>. Daher sind die Verlängerungen für Magnetisierungen vom Felde 0 bis zum Felde  $\oint$  durch die Integrale:

$$\frac{\partial l}{1} = \frac{1}{E} \int_0^{\oint} \left( \frac{\partial \kappa}{\partial \lambda} \right) \oint d\oint \quad (74)$$

zu berechnen.

Der einfachste Fall wäre derjenige eines dünnen homogenen Eisendrahtes, der in einem homogenen Felde einer gleichmäßigen Magnetisierung in Richtung seiner Länge unterworfen wird. Um diese zu erreichen, genügt es nicht, den Draht in der Achse eines sehr viel längeren stromdurchflossenen Solenoides anzubringen, sondern man muß, um den Einfluß der freien Enden zu eliminieren, dem Draht in seiner Verlängerung beiderseits einen gleich dicken Draht aus demselben Material in ganz kurzer Entfernung gegenüberstellen. Die auf den Draht wirkenden Kräfte bestehen dann einerseits aus den Oberflächenkräften, die das Feld auf den induzierten Körper ausübt, und andererseits aus den Elektrostriktionskräften. Die ersteren berechnen sich für die Stirnflächen des zylindrischen Drahtes aus (49), S. 186 zu

$$P_n = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\oint} \frac{\mu - 1}{\mu} \mathfrak{B} d\mathfrak{B}$$

und für die Mantelfläche aus (50) zu

$$P_t = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\oint} (\mu - 1) \oint d\oint,$$

<sup>1)</sup> Drude hatte deswegen in der ersten Auflage in den Formeln (70) bis (73)  $\bar{\mu}$  und  $\bar{\kappa}$  statt  $\mu$  und  $\kappa$  geschrieben. Das setzt voraus, daß die Aenderung der Energie auch bei den ferromagnetischen Körpern durch  $d(\mathfrak{B} \oint)/8\pi$  dargestellt werden könne, während sie nach Abschnitt 32 durch  $\oint d\mathfrak{B}/4\pi$  gegeben ist. Formel (70) bis (73) gelten daher zunächst für konstante  $\mu$  und  $\kappa$ . Für ferromagnetische Körper führt die strenge Theorie auf die Integralformeln des Textes.

so daß der Gesamtzug auf die Stirnfläche durch

$$P_l = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\mathfrak{B}} \frac{\mu-1}{\mu} \mathfrak{B} d\mathfrak{B} + \frac{1}{4\pi} \int_0^{\mathfrak{H}} \left( \frac{\partial \kappa}{\partial \lambda} \right)_i \mathfrak{H} d\mathfrak{H}$$

und der Gesamtzug auf die Mantelfläche durch

$$P_r = \int \left[ \kappa + \left( \frac{\partial \kappa}{\partial \lambda} \right)_s \right] \mathfrak{H} d\mathfrak{H}$$

dargestellt ist<sup>1)</sup>. Wie sich in diesem und in anderen komplizierteren Fällen aus den Kräften die Längen- und Volumenänderungen ergeben, ist ein Problem der Elastizitätslehre, für dessen Lösung auf die Originalabhandlungen verwiesen werden muß<sup>2)</sup>. Desgleichen muß hinsichtlich der weiteren Beziehungen zwischen dem magnetischen und elastischen Verhalten der Materie, die J. J. Thomson durch thermodynamische Betrachtungen abgeleitet hat, auf das unten genannte Werk von J. J. Thomson hingewiesen werden und hinsichtlich der experimentellen Ergebnisse auf die Arbeiten von Honda und Terada<sup>3)</sup>, in denen sich auch die sonstige Literatur angeben findet.

### 38. Umkehrbare Temperaturänderung durch Magnetisierung.

Wenn die Permeabilität oder Suszeptibilität eines Körpers sich mit seiner Temperatur ändert, so muß sich umgekehrt durch Magnetisierung seine Temperatur ändern. Auch hier können wir wieder die in der Elektrostatik für den entsprechenden Satz gegebene Beweisführung auf das magnetische Problem übertragen. Ist  $\mathfrak{H}$  die magnetische Kraft im Innern des magnetisierten Körpers und wird sie um  $d\mathfrak{H}$  vermehrt, so ist zur Konstanthaltung der Temperatur die Zuführung einer Wärmemenge  $\Delta Q$  erforderlich, die, in mechanischem Maße gemessen, durch die Formel gegeben ist [vgl. I, 48, Formel (168)]:

<sup>1)</sup> R. Gans, Ann. d. Phys. (4) **13**, S. 634, 1904.

<sup>2)</sup> Von der umfangreichen Literatur, in welcher die Magnetostriktion ausführlicher behandelt ist und auch noch andere spezielle Probleme derselben gelöst sind, möge außer den in der ersten Auflage genannten älteren Arbeiten: J. D. Korteweg, Wied. Ann. **9**, S. 48, 1880; H. v. Helmholtz, Wied. Ann. **13**, S. 385, 1881; H. Lorange, Wied. Ann. **21**, S. 300, 1884; G. Kirchhoff, Wied. Ann. **24**, S. 52, 1885; J. J. Thomson, Anwendungen der Dynamik auf Physik und Chemie, autoris. Uebersetzung, Leipzig 1890, S. 53 ff.; F. Pockels, Grun. Archiv (2) **12**, S. 57, 1892, noch hingewiesen werden auf: F. Koláček, Ann. d. Phys. (4) **13**, S. 1; **14**, S. 177, 1904. — R. Gans, Ann. d. Phys. (4) **13**, S. 634, 1904. Ferner auf die Behandlung der Magnetostriktion durch F. Pockels in der Enzykl. d. math. Wiss. V **2**, S. 369 ff., 1907.

<sup>3)</sup> K. Honda und T. Terada, Phys. Zeitschr. **6**, S. 622, 1905; **7**, S. 465, 1906.

$$\Delta Q = T v \frac{\partial \kappa}{\partial T} \mathfrak{H} d\mathfrak{H}, \quad (75)$$

in der  $T$  die absolute Temperatur,  $v$  das Volumen des als gleichmäßig magnetisiert vorausgesetzten Magnetikums bedeutet. Wird keine Wärme während der Magnetisierung zugeführt, so tritt eine Temperaturänderung ein entsprechend Formel (171) in I, 48:

$$dT = - \frac{T}{A C \rho} \frac{\partial \kappa}{\partial T} \mathfrak{H} d\mathfrak{H}, \quad (76)$$

worin  $A$  das mechanische Wärmeäquivalent,  $\rho$  die Dichtigkeit des magnetisierten Körpers und  $C$  seine spezifische Wärme bei konstanter Magnetisierung bedeuten. Bei einem ferromagnetischen Körper ist dann, entsprechend dem früher Gesagten, für eine Magnetisierung von 0 bis zur Feldstärke  $\mathfrak{H}$  die ganze Temperaturänderung durch das Integral

$$\Delta T = - \frac{T}{A C \rho} \int_0^{\mathfrak{H}} \frac{\partial \kappa}{\partial T} \mathfrak{H} d\mathfrak{H} \quad (77)$$

zu berechnen. Ein Körper, dessen Permeabilität oder Suszeptibilität mit steigender Temperatur wächst, wird sich also durch Magnetisierung abkühlen, und ein Körper, dessen Suszeptibilität mit steigender Temperatur abnimmt, wird sich durch Magnetisierung erwärmen<sup>1)</sup>.

Bei den ferromagnetischen Substanzen sinkt oberhalb gewisser Temperaturen (bei Eisen z. B. zwischen 700 und 800°) die Magnetisierbarkeit auf sehr geringe, den paramagnetischen Substanzen entsprechende Werte herab. In diesem Temperaturgebiet ist also  $\frac{\partial \kappa}{\partial T}$  negativ und die Substanzen müssen sich bei Magnetisierung erwärmen. Bei tieferer Temperatur ist das Verhalten komplizierter, indem der Temperaturkoeffizient der Magnetisierung auch von der Intensität der Magnetisierung abhängt.

Die hier besprochenen Wärmewirkungen sind umkehrbar und würden daher bei einer zyklischen Magnetisierung verschwinden, im Gegensatz zu den nicht umkehrbaren Wärmewirkungen der Hysteresis, die wir oben in Abschnitt 34 behandelt haben.

<sup>1)</sup> Diese Beziehungen sind zuerst von Sir William Thomson in seiner dynamischen Theorie der Wärme entwickelt worden (Math. a. Physical Papers I, S. 314). Desgl. Phil. Mag. (5) 5, S. 25, 1878. Siehe ferner A. Waßmuth, Wien. Ber. 86, S. 539, 1882 und 87, S. 82, 1883 und das oben mehrfach genannte Werk von J. J. Thomson, S. 125 ff.

### Kapitel III.

## Elektromagnetismus.

---

### 1. Das magnetische Feld des elektrischen Stromes.

Verbindet man die Pole eines galvanischen Elementes, eines sogenannten Daniellschen oder Bunsenschen Elementes oder eines Akkumulators, durch einen metallischen Draht, so nimmt man verschiedene Wirkungen wahr, welche nicht vorhanden waren, bevor der Draht mit den Metallstücken in Berührung gebracht wurde. So z. B. erwärmt sich der Draht nach einiger Zeit. Man schließt daraus, daß durch die Verknüpfung des Drahtes mit den Metallen irgendwelche Zustandsänderungen mit ihm vorgegangen sein werden; man bringt dies dadurch zum Ausdruck, daß man sagt: Es fließt in dem Drahte ein elektrischer Strom. Mit diesem Satze ist vorläufig über die Natur oder irgendwelche andere Eigenschaften des elektrischen Stromes gar nichts gesagt; er bedeutet nur, daß man an Stelle des unbequemen Ausdrucks: „Zustandsänderungen, welche durch die angegebene experimentelle Anordnung hervorgerufen werden,“ das bequeme Wort: „Elektrischer Strom“ setzt. Man kann diesem elektrischen Strom eine gewisse Stärke  $i$  beilegen, welche man aus den Wirkungen des Stromes numerisch bestimmen kann, gerade wie man die Polstärke eines Magneten aus seinen ponderomotorischen Wirkungen auf einen anderen Magneten bestimmen kann.

So würde die Erwärmung des Drahtes ein solches Mittel bieten, die Stromstärke zu messen; indes gibt es andere Wirkungen des Stromes, welche sich besser dazu eignen, das sind die sogenannten elektromagnetischen Wirkungen. Man nimmt nämlich wahr, daß ein in die Nähe des stromdurchflossenen Drahtes gebrachter Magnetpol, d. h. das Ende eines langen und dünnen Magneten, ponderomotorische Wirkungen erfährt. Der elektrische Strom im Drahte erzeugt also ein magnetisches Feld.

Da wir im vorigen Kapitel die allgemeinen Eigenschaften des magnetischen Feldes kennen gelernt haben, so müssen wir dieselben auch jetzt in unserem Falle wieder antreffen. Für die magnetische Kraft



des Feldes müssen also dieselben Gesetze gelten wie im allgemeinen Falle, und ebenso ist der Begriff der Kraftlinienzahl auch hier anwendbar. Aus der Feldstärke an einer bestimmten Stelle könnte man dann ein Maß für die Stromstärke gewinnen, wenn man vorher noch festgestellt hat, wie die Feldstärke von der Gestalt und Lage des Drahtes abhängt. Diesem Zwecke wollen wir uns jetzt zuwenden.

Die Richtung der Kraftlinien des Feldes kann man erkennen, wenn man die Bahn verfolgt, welche ein Magnetpol bei langsamer Bewegung unter Einwirkung der elektromagnetischen Kräfte einschlägt; ein bequemeres Mittel aber ist die Benutzung von Eisenfeile. Man nehme ein Stück weißen Kartons und bohre Löcher darein in der Weise, daß der stromführende Draht durch diese hindurchtreten kann. Legt man den Karton horizontal, so zeichnet aufgestreute Eisenfeile die Kraftlinien des Feldes gut ab, wenn man vorsichtig etwas an den Karton klopft.

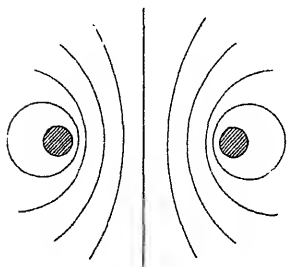


Fig. 35.

Auf diese Weise kann man nun erkennen, daß die Kraftlinien als geschlossene Kurven erscheinen, welche sämtlich den stromführenden Draht umschlingen. Ist z. B. der Draht auf einer langen Strecke gerade, so sind die Kraftlinien konzentrische Kreise, deren Ebene senkrecht zum Draht liegt. Dieses Resultat muß schon aus Symmetriegründen folgen, da außer radialen Strahlen nur jene Kreise möglich sind. Bildet der Draht einen fast geschlossenen Kreis, so haben die Kraftlinien in einer Ebene, welche senkrecht zu ihm steht und durch sein Zentrum geht, ungefähr die in der Fig. 35 gezeichnete Gestalt.

## 2. Charakteristische Eigenschaft dieses Feldes.

Die Tatsache, daß die Kraftlinien des Magnetfeldes, das ein elektrischer Strom erzeugt, in sich geschlossene Linien sind, lehrt uns einen ganz neuen Typus eines Kraftfeldes kennen. In den bisher behandelten Kraftfeldern kamen Kraftlinien, die als geschlossene Linien frei im Raum verlaufen, nicht vor. Die elektrischen Kraftlinien gehen immer von Elektrizitätsmengen aus und enden wieder an solchen. Die Kraftlinien des magnetostatischen Feldes kann man sich zwar als geschlossene Linien denken, insofern, als in den Innenraum des Magneten so viel Kraftlinien eintreten, als andererseits aus ihm austreten; aber der Schluß ist doch immer nur durch die Masse des Magneten hindurch zu denken, und selbst, wenn man sich diese aus Molekülmagneten aufgebaut denkt, würde

doch der Schluß der Kraftlinien immer durch die Masse des Moleküls hindurch erfolgen. Kraftlinien, die frei im Raume in sich zurücklaufen, gibt es also auch hier nicht. Beschränkt man aber, wie wir es im wesentlichen im vorigen Kapitel getan haben, die Betrachtung auf den Raum, der den Magneten umgibt, so kann man überhaupt nicht von geschlossenen Kraftlinien sprechen. Für beide Felder, das elektrostatische und das magnetostatische, galt die Grundformel, welche ausdrückt, daß das Linienintegral der elektrischen bzw. der magnetischen Kraft, genommen über eine beliebige geschlossene Kurve, die ganz in dem betrachteten Felde liegt, also die Arbeit bei der Bewegung des Einheitspoles längs jener Kurve, gleich Null ist.

Dieser Satz trifft nicht mehr zu für das magnetische Feld eines elektrischen Stromes. Denn wenn ich mit dem Einheitspol hier längs einer Kraftlinie fortwandere, bis ich zum Anfangspunkt zurückgekehrt bin, so habe ich dabei immer Arbeit gewonnen, und die Summe aller dieser positiven Arbeitsgrößen, genommen über die ganze geschlossene Kurve, kann niemals Null sein, sondern muß einen bestimmten positiven Wert haben. Das gilt nicht bloß für eine Bewegung längs einer Kraftlinie, sondern für jede Bewegung längs einer geschlossenen Kurve, die die Strombahn umschlingt. Dagegen lehrt die Erfahrung, daß für jede geschlossene Kurve, die die Strombahn nicht umschlingt, das Linienintegral der magnetischen Kraft, ebenso wie im magnetostatischen Felde, gleich Null ist. Der Beweis für diese wichtige Behauptung liegt in den experimentell zu bestätigenden Gesetzen über die Verteilung der magnetischen Kraft im Felde von Strombahnen bestimmter Gestalt, wie wir sie im folgenden kennen lernen werden.

### 3. Die Wirbelräume des Magnetfeldes.

Nach dem Stokesschen Satz (I, 10) läßt sich das Linienintegral der magnetischen Kraft für eine geschlossene Kurve in ein Flächenintegral über eine beliebige Fläche verwandeln, die jene Kurve zur Umgrenzung hat:

$$\int \mathfrak{H}_i dl = \int ds \left[ \left( \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z} \right) \cos (n x) + \left( \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x} \right) \cos (n y) + \left( \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y} \right) \cos (n z) \right] \quad (1)$$

Denken wir uns eine geschlossene Kurve gegeben, die die Strombahn einmal umschlingt. Wenn wir durch diese Kurve als Grenzlinie eine Fläche legen, so wird sie die Strombahn schneiden. Wir können uns

die Fläche in Elemente zerlegt denken. Eines dieser Elemente möge mit dem Querschnitt der Strombahn zusammenfallen. Dann liegen alle anderen außerhalb der Strombahn. Nach den Betrachtungen, auf denen die Ableitung des Stokesschen Satzes beruht, ist das Linienintegral über die Randkurve gleich der Summe aller Linienintegrale, die aus der Umkreisung der einzelnen Elemente hervorgehen. Für alle Elemente aber, die außerhalb der Strombahn liegen, ist nach dem im vorigen Abschnitt Gesagten der Wert des Linienintegrals gleich Null. Also reduziert sich der Wert des ganzen Flächenintegrals auf den Wert für dasjenige Element, das mit dem Querschnitt der Strombahn zusammenfällt. Nur für dieses Element ist der Ausdruck unter dem Integralzeichen des Flächenintegrals von Null verschieden. Daraus folgt, daß die Gleichungen:

$$\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y} = \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z}; \quad \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial z} = \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x}; \quad \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} = \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y}, \quad (2)$$

die die Bedingung dafür darstellen, daß die magnetische Kraft ein Potential hat, innerhalb der Strombahn nicht gültig sind.

Es handelt sich zunächst darum, aus der Gestaltung des Feldes ein Unterscheidungsmerkmal zu gewinnen zwischen Gebieten, in denen die Gleichungen (2) bestehen, und solchen, in denen sie nicht bestehen. Denken wir uns irgendein Raumelement  $dv$  abgegrenzt, so bestehen jene Formeln jedenfalls nicht an jeder Stelle von  $dv$ , wenn es Kraftlinien gibt, welche ganz innerhalb  $dv$  verbleiben, ohne seine Oberfläche zu schneiden, weil man dann innerhalb  $dv$  Kurven  $C$  angeben kann, für welche  $\oint_C d\mathfrak{H}$  nicht verschwindet. Dies kann man aber auch dann, wenn eine Kraftlinie den Raum  $dv$  zweimal in entgegengesetztem Sinne durchschreitet. Das Charakteristikum für das Verhalten der Kraftlinien in beiden Fällen ist das, daß sich innerhalb  $dv$  zwei einander benachbarte Punkte  $P$  und  $P'$  angeben lassen, für die die Richtung der magnetischen Kraft die entgegengesetzte ist. Man kann dann sagen, daß die magnetische Kraft an dem Orte der Punkte  $P, P'$  wirbelt.

Die magnetische Kraft hat also kein Potential innerhalb eines Raumes, in welchem Wirbelstellen der magnetischen Kraft vorhanden sind.

Lagern sich über eine Wirbelstelle  $dv$  die Kraftlinien eines anderen Feldes, so können diese eventuell so stark sein, daß sie ein Wirbeln der Kraftlinien in  $dv$  in dem oben beschriebenen Sinne verhindern. Es sei z. B. die Kraft in  $P: +\mathfrak{H}$ , in  $P': -\mathfrak{H}$ , und wir denken uns ein homogenes Feld  $3\mathfrak{H}$  parallel zur Krafrichtung in  $P$  darüber gelagert, so ist die Kraft in  $P: +4\mathfrak{H}$  und in  $P': +2\mathfrak{H}$ . Sie hat also jetzt in beiden Punkten die gleiche Richtung; trotzdem besitzen die Gleichungen (2) in

diesem Felde keine Gültigkeit. Das ist sofort ersichtlich, wenn wir annehmen, die Kraftlinien wären parallele gerade Linien. Wäre das Feld wirbelfrei, so könnten seine Kraftlinien nur dann parallele Gerade sein, wenn die Kraft überall konstant wäre. Hier aber würde die Kraft in  $P$  größer als in  $P'$  sein. Das würde in einem wirbelfreien Felde nur möglich sein bei einer entsprechenden Veränderlichkeit in der Krümmung der Kraftlinien (siehe S. 20). Bei geraden Kraftlinien ist es nur möglich durch das Vorhandensein von Wirbelräumen, deren Feld einem wirbelfreien Felde überlagert ist. Entsprechend kann man bei ganz allgemeiner Gestaltung des Kraftlinienverlaufs das Feld immer in zwei Anteile zerlegen, in ein wirbelfreies Feld, für das die Gleichungen (2) gelten, und in ein Wirbelfeld, für das sie nicht gelten. Die Beziehung zwischen beiden ist ähnlich, wie zwischen Kraft und Kräftepaar in der Mechanik. Wie ein Kräftepaar nicht durch eine einzelne Kraft, sondern nur durch ein anderes Kräftepaar kompensiert werden kann, so kann auch ein Wirbelfeld nur wieder durch ein Wirbelfeld und nicht durch ein wirbelfreies Feld aufgehoben werden.

Betrachten wir die Arbeit  $A = \int \mathfrak{H}_i dl$  längs einer geschlossenen Kraftlinie  $C$ , so muß, wie sich aus dem vorigen ergibt, jede beliebige Fläche  $S$ , welche man durch  $C$  hindurchlegt, Wirbelräume durchschneiden. Da also keine Fläche  $S$  durch  $C$  konstruierbar ist, welche keinen Wirbelraum trifft, so müssen die Wirbelräume die Kraftlinien ringförmig umschlingen. Es gibt also kein magnetisches Feld, in welchem der Wirbelraum z. B. die Gestalt einer Kugel oder eines Ellipsoids hätte.

Da einerseits das Linienintegral für eine gegebene den Wirbelraum umschlingende Kurve einen ganz bestimmten Wert  $A$  hat, andererseits das äquivalente Flächenintegral sich auf den Querschnitt des Wirbelraumes reduziert für alle Flächen, die man durch die Kurve legen kann, die also den Wirbelraum an den verschiedensten Stellen schneiden können, so folgt daraus, daß der Wert des Flächenintegrals für alle Querschnitte des Wirbelraumes denselben Betrag  $A$  haben muß. Daraus aber, daß sich das Flächenintegral stets auf den Betrag für den Querschnitt des Wirbelraumes reduziert, folgt des weiteren, daß sein Betrag unabhängig von der Randkurve der Fläche ist, oder daß alle Kurven, die den Wirbelraum einmal umschlingen, für das Linienintegral der magnetischen Kraft denselben Betrag  $A$  ergeben.

Die Arbeit  $A$  kann also nur abhängen von den Eigenschaften des von den betrachteten Kurven umschlungenen Wirbelraumes. Man nennt daher die Arbeit  $A$  die magnetomotorische Kraft des Wirbelraumes, welchen die Kurven umschlingen. Die Arbeit  $A$  verschwindet, falls die Kurven keinen Wirbelraum umschlingen,

oder falls die Summe der magnetomotorischen Kräfte der umschlungenen Wirbelräume verschwindet.

Innerhalb des Raumes, welchen ein System von Linien erfüllt, die alle den gleichen Wirbelraum umschlingen, gelten die Gleichungen (2). Die magnetische Kraft besitzt daher ein Potential  $\varphi$ . Dann ist aber

$$A = \int (\mathfrak{S}_x dx + \mathfrak{S}_y dy + \mathfrak{S}_z dz) = - \int \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \right) = - \int d\varphi,$$

folglich kann  $\varphi$  keine eindeutige Funktion mehr sein, da sich ihr Wert bei jedesmaligem Herumgehen um den Wirbelraum längs einer geschlossenen Kraftlinie um die konstante Größe  $A$  ändern muß. Das Potential ist also in diesem Falle eine unendlich vieldeutige Funktion und die magnetomotorische Kraft  $A$  des Wirbelraumes ist der sogenannte Periodizitätsmodul des Potentials, welches die magnetische Kraft innerhalb des betrachteten Raumes besitzt.

In Verallgemeinerung ist daher zu schließen: Werden mehrere Wirbelräume vom wirbelfreien Raum umschlungen, so besitzt die magnetische Kraft in letzterem ein vieldeutiges Potential, welches die magnetomotorischen Kräfte der Wirbelräume zu Periodizitätsmoduln hat.

Während die Wirbelräume eines Magnetfeldes dadurch charakterisiert sind, daß das erste Differentialgesetz des magnetischen Feldes [II, 8, Formel (4)] in ihnen nicht mehr gültig ist, behalten das zweite Differentialgesetz in der allgemeinen Form, die wir ihm in II, 22, Formel (6') gegeben haben, und die Grenzbedingung (24) (siehe II, 19) auch in den Wirbelräumen ihre Gültigkeit. Denn die Erfahrung lehrt, daß freie Enden von Induktionslinien auch in den Wirbelräumen eines Magnetfeldes — im Innern der von elektrischen Strömen durchflossenen Leiter — niemals vorkommen. Daraus folgt, daß auch hier die Gleichung (5') besteht, d. h. daß auch hier der Induktionsfluß durch jede geschlossene Fläche gleich Null ist, und dieser Satz hat die Gültigkeit der Grenzbedingung (24):

$$\mathfrak{B}_{n_1} = \mathfrak{B}_{n_2} \quad \text{oder} \quad \mu_1 \mathfrak{S}_{n_1} = \mu_2 \mathfrak{S}_{n_2}$$

und der Differentialgleichung (6'):

$$\frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial z} = 0$$

zur unmittelbaren Folge.

#### 4. Die Stromstärke in elektromagnetischem Maße.

Ein magnetisches Feld der im vorigen Abschnitt behandelten Art mit einem ringförmig in sich geschlossenen Wirbelraum kann man da-

durch realisieren, daß man einen Draht in der gewünschten Gestalt biegt, seine Enden aber nicht genau zusammenfügt, sondern sie nur möglichst nahe aneinander bringt, ohne daß sie sich berühren, und mit zwei langen Drahtstücken verbindet, welche zu den Metallenden eines galvanischen Elementes gehen. Wenn diese den Strom zuführenden Drahtstücke einander sehr nahe liegen, oder — was noch besser ist — wenn sie gegenseitig umeinander gewickelt sind, ohne daß sie sich metallisch berühren, so können wir von ihnen hinsichtlich der magnetischen Wirkung ganz absehen, da das Experiment zeigt, daß diese Drahtstücke nach außen kein magnetisches Feld erzeugen. Entfernen wir außerdem das galvanische Element sehr weit von der Stelle der Drahtschleife, deren magnetisches Feld wir untersuchen wollen, so wird letzteres auch durch eine eventuelle Wirkung des Elementes nicht gestört, da die Erfahrung lehrt, daß die elektromagnetischen Wirkungen mit der Entfernung von der stromführenden Stelle abnehmen. Wir können also in diesem Falle ohne merklichen Fehler annehmen, daß wir das magnetische Feld eines in einem geschlossenen Drahte fließenden Stromes untersuchen. Diese Strombahn soll mit  $D$  bezeichnet werden. Sie stellt den Wirbelraum des Magnetfeldes dar und kann unter den beschriebenen Umständen ohne merklichen Fehler als ein ringförmig geschlossener Raum angesehen werden.

Nach den Darlegungen des vorigen Paragraphen muß die Arbeit  $A$ , welche die magnetischen Kräfte leisten, wenn ein Magnetpol der Stärke  $+1$  auf einer geschlossenen Kurve  $C$  bis zum Ausgangspunkt zurückgeführt wird, für alle diejenigen Kurven  $C$ , welche den Draht  $D$  einmal umschlingen, konstant sein. Diese Konstante hatten wir die magneto-motorische Kraft des Wirbelraumes genannt. Die Stromstärke  $i$  muß nun offenbar in einer Beziehung zu  $A$  stehen; es muß jedenfalls  $A$  verschwinden, wenn  $i$  verschwindet, denn dann sind die magnetischen Kräfte Null. Diese Verknüpfung zwischen  $A$  und  $i$  kann man zur Definition der Stromstärke  $i$  benutzen, indem man  $A$  zu  $i$  proportional setzt. Aus gewissen Bequemlichkeitsgründen, welche weiter unten hervortreten werden, wählt man den Proportionalitätsfaktor zu  $4\pi$ , d. h. man setzt

$$A = 4\pi i. \quad (3)$$

Das Produkt aus  $4\pi$  in die Stromstärke  $i$  setzt man also gleich der magnetomotorischen Kraft des Wirbelraums, d. h. gleich der Arbeit, welche die magnetischen Kräfte leisten, wenn ein Magnetpol der Stärke  $+1$  auf einer Kraftlinie in ihrer positiven Richtung ganz herumgeführt wird bis zu dem Ausgangspunkt zurück.

Diese Definition der Stromstärke nennt man die nach elektromagnetischem Maße, weil die elektromagnetischen Wirkungen zur Mes-

sung des Stromes benutzt werden. Eine andere Definition dieser Größe werden wir später kennen lernen.

Man kann die magnetomotorische Kraft  $A$  und daher auch  $i$  in absolutem Maße durch  $g, cm, sek$  numerisch ausdrücken. Denn, ist die Polstärke des herumgeführten Magneten nicht 1, sondern  $m$ , so ist  $mA$  die Arbeit, welche beim Herumführen von  $m$  gewonnen wird. Diese könnte man experimentell beobachten und in absolutem Maße messen. Ermittelt man dann den numerischen Wert von  $m$  im absoluten Maße gemäß den Festsetzungen von II, 10 nach den in II, 15 behandelten Methoden, so läßt sich damit auch  $A$  und entsprechend  $i$  im  $g\text{-cm-sec}$ -System numerisch auswerten. Allein diese Arbeitsmessungen würden wenig genau sein. Die genaue Ermittlung einer Stromstärke im absoluten elektromagnetischen Maße beruht vielmehr auf der Vergleichung des magnetischen Feldes, das ein Strom in einer Bahn von bestimmter Gestalt an einem gegebenen Punkte hervorruft, mit der erdmagnetischen Horizontalintensität an demselben Punkte, deren Größe nach der in II, 15 erörterten Methode im absoluten Maße ermittelt werden kann. Die nähere Ausführung dieses Meßverfahrens werden wir später kennen lernen.

Die Dimensionsformel der Stromstärke  $i$  ergibt sich daraus, daß  $mi$  die Dimension einer Arbeit hat, d. h. gleich ist dem Produkt aus einer Kraft in eine Länge. Unter Benutzung der Symbolik in Kap. I, Abschnitt 18 ergibt sich daher:

$$[m] [i] = ML^2 T^{-2},$$

oder unter Rücksicht auf die Dimension von  $m$  (II, 10):

$$[i] = M^{1/2} L^{1/2} T^{-1}. \quad (4)$$

Als praktische Stromeinheit wählt man nun aber nicht denjenigen Strom, welcher, in  $g\text{ cm sek}$  ausgedrückt, den Wert 1, sondern denjenigen, welcher den Wert  $1/10$  besitzt. (Die Gründe hierfür werden unten besprochen werden.)

Diese Stromeinheit nennt man ein Ampere.

Es ist also:

$$1 \text{ Amp.} = \frac{1}{10} g^{1/2} \text{ cm}^{1/2} \text{ sek}^{-1}. \quad (5)$$

## 5. Das magnetische Feld eines geschlossenen linearen Stromes ist gleich dem einer magnetischen Doppelfläche.

Konstruiert man eine beliebige krumme Fläche  $S$ , welche von der Strombahn  $D$  begrenzt ist, so durchsetzen alle Kraftlinien des Feldes, da sie die Strombahn umschlingen, diese Fläche. Setzt man nun fest, daß ein Magnetpol  $P$  bei beliebigen Bewegungen im Felde nie-

mals durch diese Fläche hindurchgehen soll, so wird für jede geschlossene Kurve  $C$ , auf der  $P$  unter dieser Bedingung herumgeführt werden kann, stets die von den Kräften des Feldes geleistete Arbeit verschwinden. Denn es gibt dann keine Kurve  $C$ , welche den Wirbelraum des Feldes, d. h. den Draht  $D$ , umschlingt. In diesem Falle hat daher die magnetische Kraft nach den Auseinandersetzungen in Abschnitt 2 ein eindeutiges Potential.

Die Bedeutung der hier eingeführten Bedingung liegt in dem Umstande, daß der Raum, der die in sich geschlossene Strombahn umgibt, ein zweifach zusammenhängender Raum ist. Ein solcher Raum ist dadurch charakterisiert, daß es zwischen zwei Punkten zwei Arten von Linien gibt, die sich nicht durch stetige Veränderungen ineinander überführen lassen, ohne die Grenzen des Raumes zu durchschneiden. In der Tat, wenn die geschlossene Kurve, die durch zwei Linien zwischen den Punkten  $A$  und  $B$  gebildet wird, die Strombahn umschlingt, so ist es nicht möglich, die eine Linie in die andere überzuführen, ohne die Strombahn zu schneiden. Denkt man sich aber den Durchgang durch die Fläche  $S$  verwehrt, so ist der Zusammenhang des Raumes längs dieser Fläche gewissermaßen aufgehoben, der Raum auseinandergeschnitten und dadurch aus dem zweifach zusammenhängenden ein einfach zusammenhängender Raum gemacht. Damit ist zugleich die Vieldeutigkeit des Potentials aufgehoben.

Infolge der an die Fläche  $S$  geknüpften Bedingung hat das magnetische Feld unseres Stromes diejenige Eigentümlichkeit verloren, die es von den in Kapitel II behandelten Feldern unterschied, die Eigentümlichkeit der in sich geschlossenen Kraftlinien. Es besteht daher jetzt die Möglichkeit, es ebenso wie die früher behandelten Felder darzustellen als hervorgebracht durch Magnetismuskengen, die auf der Grenzfläche des Feldes verteilt sind (siehe II, 12). Als Grenze kann zunächst jede geschlossene Fläche  $S'$  genommen werden, welche die Strombahn  $D$  ganz einschließt. Die Fläche  $S'$  kann sich dabei bis auf die Oberfläche von  $D$  und die Fläche  $S$  zusammenziehen, indem auf der letzteren zwei Seiten von  $S'$  zum Zusammenklappen gebracht werden. Der Deutlichkeit halber wollen wir aber zunächst annehmen, daß ein wirkliches Zusammenklappen nicht stattfände, sondern daß  $S'$  sich nur bis auf sehr kleine Distanzen an die Fläche  $S$  heranzöge. Es sind dann die magnetischen Belegungen, durch deren Wirkung man das Potential der magnetischen Kraft im Außenraum von  $S'$  darstellen kann, anzubringen zu beiden Seiten der Fläche  $S$  und auf der Oberfläche des Drahtes  $D$ . Von den Belegungen auf der letzteren kann man absehen, wenn die Oberfläche sehr klein ist, d. h. der stromführende Draht sehr dünn ist, so daß man einen sogenannten linearen Strom besitzt. Dies wollen wir voraussetzen.



Die Belegungen zu beiden Seiten von  $S$ , welche in einer kleinen Distanz  $d$  anzubringen sind, müssen an gegenüberliegenden Stellen von gleichem numerischem Werte, aber verschiedenem Vorzeichen sein, da in die eine Seite von  $S$  genau so viel Kraftlinien eintreten, wie aus der anderen Seite austreten. Dies wäre nicht möglich, wenn die Ladung eines Flächenelementes  $dS$  auf der einen Seite von  $S$ , die etwa positiv sein mag, die negative Ladung der anderen Seite überwöge. Denn dann müßten nach dem Gaußschen Satze S. 32 im ganzen aus einer kleinen, das Element  $dS$  einschließenden Fläche mehr Kraftlinien austreten, als eintreten.

Eine solche Fläche  $S$ , welche auf ihren beiden Seiten mit magnetischen Belegungen versehen ist, die an gegenüberliegenden Stellen numerisch gleich, aber von entgegengesetztem Vorzeichen sind, nennt man eine magnetische Doppelfläche. Befinden sich die Belegungen in der kleinen Entfernung  $d$  gegenüber, und lagert auf jeder Seite eines Elementes  $dS$  von  $S$  die magnetische Menge (Polstärke)  $\pm \eta dS$ , so nennt man

$$\eta d = \nu \quad (6)$$

das Moment der Doppelfläche.

## 6. Das Potential einer magnetischen Doppelfläche.

Jedes Element der Doppelfläche hat die Eigenschaft eines magnetischen Dipols. Das Potential des Elementes hat daher nach I, 36 den Wert:

$$\varphi = \eta dS \cdot \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} = \nu dS \cdot \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} = - \frac{\nu dS}{r^2} \cos(nr), \quad (7)$$

wenn die Richtung der positiven Normalen von der positiven Belegung aus nach außen gerechnet wird.

Wir wollen annehmen, daß dem Punkte  $P$ , für den das Potential berechnet werden soll, die positive Seite der Fläche zugewandt sein soll (siehe Fig. 36). Denken wir uns von  $P$  aus einen Kegel von Radien nach den Punkten der Umrandung des Flächenelementes  $dS$  gezogen, so soll  $d\psi$  der räumliche Winkel dieses Kegels sein, d. h. der Winkel, unter dem  $dS$  von  $P$  aus erscheint. Dieser räumliche Winkel ist gleich der Fläche, die der Kegel aus einer um  $P$  beschriebenen Kugel vom Radius 1 ausschneiden würde. Aus einer Kugel vom Radius  $r$  würde dieser Kegel das Stück  $r^2 d\psi$  ausschneiden. Dieses Stück aber kann man als die Projektion des Elementes  $dS$  auf eine zum Radius senkrechte Ebene

ansehen; unter Berücksichtigung der Richtungen von  $n$  und  $r$  besteht also die Beziehung:

$$r^2 d\psi : dS = -\cos(nr)$$

oder

$$d\psi = -\frac{dS}{r^2} \cos(nr).$$

Folglich ist nach (2)

$$\varphi = \nu \cdot d\psi, \quad (8)$$

d. h. das Potential eines Elementes  $dS$  einer Doppelfläche in einem Punkte  $P$  ist gleich dem Produkt aus dem Moment der Doppelfläche in den räumlichen Winkel, unter dem  $dS$  von  $P$  aus erscheint. Das Vorzeichen in der Formel (8) gilt, falls die

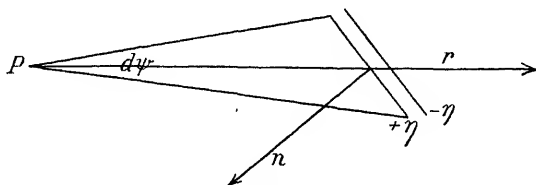


Fig. 36.

positive Belegung von  $dS$  dem Punkte  $P$  zugewandt ist; im anderen Falle würde das negative Vorzeichen gelten.

Rückt  $P$  in  $dS$  hinein, so wird der räumliche Winkel  $d\psi$  zu  $2\pi$ . Es ist daher dann

$$\varphi = \pm 2\pi\nu,$$

wobei das positive Zeichen für die Seite von  $dS$  gilt, auf welcher sich die positive Belegung befindet, dagegen das negative Zeichen für die Seite von  $dS$ , auf welcher die negative Belegung lagert.

Kennzeichnet man die auf diese beiden Seiten von  $dS$  bezüglichen Werte des Potentials durch  $\varphi_+$  und  $\varphi_-$ , so ist also

$$\varphi_+ - \varphi_- = 4\pi\nu, \quad (9)$$

d. h. das Potential ändert sich beim Durchgang durch  $dS$  unstetig.

Hat man es mit einer endlich ausgedehnten magnetischen Doppelfläche  $S$  zu tun, deren Moment  $\nu$  an verschiedenen Stellen verschieden sein kann, so wird sich  $\varphi$  beim Durchgang durch  $S$  ebenfalls unstetig ändern. Zu dieser Unstetigkeit kann offenbar nur dasjenige Flächenelement  $dS$  Veranlassung geben, durch welches der Durchgang vollzogen wird, da alle anderen Flächenelemente in endlicher Entfernung  $r$  vom betrachteten Punkte  $P$  liegen, für welchen man den Wert des Potentials berechnet.

Die Formel (7) gilt daher auch für diesen Fall.  $\nu$  bezeichnet dabei das Moment an der Durchgangsstelle auf  $S$ . Wir gewinnen daher das Resultat:

Das Potential einer magnetischen Doppelfläche  $S$  wächst beim Durchgang durch  $S$  von der Seite der negativen Belegung zur positiven sprungweise um  $4\pi v$ , wobei  $v$  das Moment der Doppelfläche an der Durchgangsstelle bedeutet.

Verschiebt man einen Magnetpol der Stärke  $+1$  von der positiv belegten Seite der Doppelfläche  $S$  auf irgendeinem (außerhalb  $S$  verlaufenden) Wege bis zum gegenüberliegenden Punkte auf der negativ belegten Seite von  $S$ , so wird dabei von den magnetischen Kräften eine Arbeit  $A$  geleistet, welche gleich der Abnahme des Potentials ist. Diese Arbeit  $A$  ist also  $4\pi v$ .

Lagert die magnetische Doppelfläche in einem Raume der Magnetisierungskonstanten  $\mu$ , so sind die rechten Seiten der Formeln (8) und (9) durch  $\mu$  zu dividieren (nach den Ausführungen in II, 16).

## 7. Das Potential eines geschlossenen linearen Stromes.

Da nach Abschnitt 5 das Potential eines geschlossenen linearen Stromes  $D$  gleich ist dem Potential einer Doppelfläche  $S$ , welche von  $D$  begrenzt wird, so ist nach dem letzten Paragraphen die magnetomotorische Kraft  $A$  von  $D$  gleich  $4\pi v$ , wo  $v$  das Moment der äquivalenten Doppelfläche bezeichnet. Da nun  $A$  für alle  $D$  umschlingenden Kurven konstant ist, und zwar gleich  $4\pi i$ , so muß auch das Moment  $v$  auf der ganzen Fläche  $S$  konstant sein, und zwar gleich  $i$ . Das Potential  $\varphi$  einer beliebigen Doppelfläche  $S$  von konstantem Moment wird nun nach Formel (6) durch das Produkt aus dem Moment in den räumlichen Winkel  $\psi$  gemessen, unter dem  $S$  von dem betrachteten Punkte  $P$  aus erscheint, für den man das Potential berechnen will. In unserem Falle ist also

$$\varphi = i\psi, \quad (10)$$

wo  $\psi$  der räumliche Winkel ist, unter welchem der stromführende Draht  $D$  von  $P$  aus erscheint.

Wir haben so das Resultat erhalten:

Die magnetische Wirkung eines geschlossenen linearen Stromes  $D$  ist der Wirkung einer beliebig gekrümmten magnetischen Doppelfläche äquivalent, welche von der Stromlinie  $D$  begrenzt wird. Das Moment der Doppelfläche muß überall konstant sein, und zwar gleich der Stromstärke. Das Potential des Stromes  $D$  in einem beliebigen Punkte  $P$  ist gleich dem Produkt aus der Stromstärke in den räumlichen Winkel, unter dem  $D$  von  $P$  aus erscheint.

Dies letztere Resultat gilt auch noch, wenn man dem Punkte  $P$  den

Durchgang durch  $S$  nicht mehr verwehrt und den räumlichen Winkel  $\varphi$  stetig variabel annimmt. Das Potential ist dann eine vieldeutige Funktion, welche die Stromstärke zum Periodizitätsmodul hat.

## 8. Unabhängigkeit der magnetischen Kraft eines Stromes von der Natur des umgebenden Mediums.

Im vorangegangenen haben wir stillschweigend angenommen, daß die Umgebung des linearen Stromes Luft oder freier Aether sei. Bei der Besonderheit des Verlaufes der Kraftlinien, die einen elektrischen Strom umgeben, ist es nun möglich, ein Medium mit einer Magnetisierungskonstante  $\mu$ , welche merklich von 1 verschieden ist, z. B. Eisen, derartig in das Feld zu bringen, daß die Begrenzung dieses Mediums den Kraftlinien des Feldes überall parallel liegt; das Medium braucht zu diesem Zwecke nur ein System von Kraftrohren auszufüllen, die ja in geschlossenen Ringen die Strombahn umgeben. Dann wird nach II, 23 die Feldstärke nirgends geändert, nur die Dichte der Induktionslinien in dem eingeführten Medium würde sich ändern. Bei der angegebenen Gestalt der Kraftlinien kann man nun das Medium  $\mu$  sich allmählich bis auf die Oberfläche des linearen Stromes  $D$  ausgedehnt denken, ohne daß eine Kraftlinie die Begrenzung des Mediums  $\mu$  schneidet. In diesem Falle erfüllt dann aber das betreffende Medium den ganzen Raum (abgesehen von dem unendlich dünnen Draht  $D$ ), so daß der lineare Strom  $i$  dann ganz in das homogene Medium der Permeabilität  $\mu$  eingebettet erscheint. Die magnetische Kraft eines linearen Stromes ist daher von der Permeabilität  $\mu$  seiner Umgebung unabhängig. Der numerische Wert der Stromstärke fällt daher ganz gleich aus, ob man die Wirkung des Stromes auf einen Magnetpol im freien Aether, in Luft oder in irgendeinem anderen Medium, welches den Strom ganz umgibt, untersucht.

Wir sahen früher (II, 16), daß ein derartiges Verhalten für den numerischen Wert der Polstärke eines Magneten sich nicht ergibt. Stellt man daher das Potential eines geschlossenen Stromes durch das einer Doppelfläche dar, so ist das Moment der äquivalenten Doppelfläche eines Stromes der Stärke  $i$ , der von einem Medium der Magnetisierungskonstante  $\mu$  umgeben ist, nicht gleich  $i$ , sondern gleich  $\mu i$ , weil ein Magnetpol der Stärke  $m$  in dem Medium im Verhältnis  $1:\mu$  schwächer wirkt auf einen Pol der Stärke 1, als wenn die Umgebung der freie Aether wäre.

Dieser Satz bleibt auch bestehen, wenn die Permeabilität in denjenigen Raumteilen verschieden von  $\mu$  ist, welche angrenzen an den den

Strom  $i$  umschließenden Raumteil. Denn die Gleichung (9) für den Potentialsprung an einer magnetischen Doppelfläche vom Moment  $\nu$  ist zu vervollständigen in

$$\varphi_+ - \varphi_- = \frac{4\pi\nu}{\mu},$$

falls die Magnetisierungskonstante am Orte der Doppelfläche den Wert  $\mu$  hat, einerlei, welche Werte sie in benachbarten Raumteilen besitzt. Da nun jener Potentialsprung, ganz unabhängig von dem Wert der Magnetisierungskonstante, stets gleich  $4\pi i$  sein muß, falls die Doppelfläche die magnetische Wirkung des Stromes ersetzen soll, so muß  $\nu$  gleich  $\mu i$  sein, auch wenn die Magnetisierungskonstante in benachbarten Raumteilen von  $\mu$  verschieden ist.

## 9. Die Maxwellschen Gleichungen für die magnetische Kraft im Inneren eines stromführenden Systems.

Wir haben bisher mit dem Ausdruck: „Stromstärke im Draht“ irgendwelche, ihrer tieferen Natur nach unbekannte Zustandsänderungen in der Gesamtheit desselben verstanden, die durch die magnetischen Wirkungen in der Umgebung des Drahtes definiert sind. Die Dicke des Leiters, der den Wirbelraum unseres Magnetfeldes darstellt, haben wir dabei vorläufig als unendlich dünn angenommen. Denken wir uns viele solcher Wirbelräume nebeneinander gelagert, so daß sie in ihrer Gesamtheit einen Wirbelraum von endlichem Querschnitt bilden, so werden sich die von ihnen erzeugten magnetischen Felder übereinander lagern und die Arbeit  $A$ , für einen Einheitspol, der auf einer geschlossenen Kurve in diesem Felde herumgeführt wird, ist für eine Kurve, die alle Wirbelräume umschließt, gleich  $4\pi$  mal der Summe der Stromstärken in den einzelnen Wirbelräumen. Bezeichnen wir aber mit  $dq$  ein Element des endlichen Querschnittes des ganzen Wirbelraumes und denken wir uns den Pol nur auf der Umgrenzungslinie dieses Flächenelementes herumgeführt, so wird die Arbeit nur gleich  $4\pi$  mal der Summe der durch dieses Element hindurchgehenden Stromstärke sein. Je größer aber das Flächenelement  $dq$  ist, um so mehr von den elementaren Wirbelräumen werden von  $dq$  geschnitten, und um so größer wird also die durch  $dq$  hindurchgehende Stromstärke sein. Wir werden daher die durch das Element hindurchgehende Stromstärke ausdrücken können durch

$$j dq.$$

Dabei ist, indem wir uns den ganzen Wirbelraum in stetiger Weise durch die elementaren Wirbelräume vollständig ausgefüllt denken,  $j$  eine endliche Größe, das Verhältnis der Stromstärke zur Fläche, durch die sie

hindurchgeht, oder die Stromstärke für  $dq = 1$ , d. h. für einen Querschnitt von 1 qcm. Man nennt  $j$  die Stromdichte. Die Arbeit für den Magnetpol von der Stärke 1 bei dem Umlauf um die Begrenzungskurve der Fläche  $dq$  ist dann nach (3)

$$A = 4\pi j dq. \quad (11)$$

Wir müssen uns nun vor allem klarmachen, daß die Größe  $i$  bzw.  $j$  nicht ein Skalar, sondern eine Vektorgröße ist. Denn wenn wir ein kleines Stück  $dl$  eines elementaren Wirbelraumes, eines Leiters von sehr kleinem Querschnitt betrachten, so hängen die Wirkungen, die infolge der Stromstärke  $i$  in  $dl$ , d. h. infolge der in  $dl$  stattfindenden Zustandsänderungen, von  $dl$  ausgehen, nicht bloß von der Größe von  $i$ , sondern auch von seiner Orientierung im Raum, von seiner Richtung ab. Man kann daher von den Komponenten der Stromstärke nach irgendwelchen Achsen geradeso reden und sie berechnen, wie dies bei den Komponenten einer Kraft oder einer Geschwindigkeit oder einer Strecke der Fall ist. Aus Symmetrierücksichten folgt, daß bei einem linearen Strome die Richtung des Vektors „Stromstärke“ parallel zur Achse des stromführenden Drahtes liegen muß. Für die Stromdichte  $j$  wollen wir die Komponenten nach den drei Koordinatenachsen künftig mit  $j_x, j_y, j_z$  bezeichnen.

Es möge nun  $ds$  ein Flächenelement von beliebiger Orientierung im Innern eines Leiters von endlichem Querschnitt bedeuten;  $dq$  aber die Projektion dieses Flächenstückes auf eine Ebene, die senkrecht zur Richtung der Strömung an dem Ort von  $ds$  liegt. Bedeutet dann  $(ln)$  den Winkel, welchen die Normale  $n$  auf  $ds$  mit der Achse  $l$  des senkrecht durch  $dq$  gehenden elementaren Wirbelraumes bildet, so ist offenbar  $ds \cos (ln) = dq$  und Gleichung (11) geht über in

$$A = 4\pi j \cos (ln) ds. \quad (12)$$

Es bezeichnet nun  $j \cos (ln)$  die Komponente der Stromdichte nach der Normale  $n$  von  $ds$ , da die resultierende Richtung der Stromdichte parallel  $l$  liegt. Aus dem bekannten Bildungsgesetze der Komponente eines Vektors  $j$  nach einer beliebigen Richtung  $n$  aus den Komponenten  $j_x, j_y, j_z$  nach den Koordinatenachsen folgt daher

$$j \cos (ln) = j_x \cos (nx) + j_y \cos (ny) + j_z \cos (nz). \quad (13)$$

Andererseits haben wir bereits in Abschnitt 3 dieses Kapitels gesehen, daß sich das Linienintegral der magnetischen Kraft für eine geschlossene Kurve in ein Integral über eine beliebige von dieser Kurve begrenzte Fläche verwandeln läßt. Wenden wir den Stokesschen Satz in derselben Weise auf unser Flächenelement  $ds$  an, so nimmt das Linienintegral der magnetischen Kraft für die Umrandung von  $ds$ , d. h. die Größe  $A$  die Form an [vgl. Formel (1)]:

$$A = \left[ \left( \frac{\partial \tilde{\mathfrak{H}}_z}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{\mathfrak{H}}_y}{\partial z} \right) \cos(nx) + \left( \frac{\partial \tilde{\mathfrak{H}}_x}{\partial z} - \frac{\partial \tilde{\mathfrak{H}}_z}{\partial x} \right) \cos(ny) + \left( \frac{\partial \tilde{\mathfrak{H}}_y}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{\mathfrak{H}}_x}{\partial y} \right) \cos(nz) \right] ds.$$

Dabei ist die Normale von  $ds$  positiv genommen in dem Sinne, daß um sie die positive Richtung der magnetischen Kraft im positiven Drehsinne verläuft (vgl. S. 24).

Setzt man diesen Wert von  $A$  in die Gleichung (12) ein und berücksichtigt die Gleichung (13), so kann man (12) in drei Gleichungen zerfallen, da die entstandene Beziehung für jede beliebige Orientierung von  $ds$  gültig sein muß, d. h. für alle Werte von  $\cos(nx)$ ,  $\cos(ny)$ ,  $\cos(nz)$ . Diese drei Gleichungen lauten dann <sup>1)</sup>:

$$\left. \begin{aligned} 4\pi j_x &= \frac{\partial \tilde{\mathfrak{H}}_z}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{\mathfrak{H}}_y}{\partial z} \\ 4\pi j_y &= \frac{\partial \tilde{\mathfrak{H}}_x}{\partial z} - \frac{\partial \tilde{\mathfrak{H}}_z}{\partial x} \\ 4\pi j_z &= \frac{\partial \tilde{\mathfrak{H}}_y}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{\mathfrak{H}}_x}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Diese Gleichungen wollen wir die Maxwellschen nennen. Sie sprechen eine Beziehung aus zwischen dem elektrischen Strom und der Anordnung der magnetischen Kraft an derselben Stelle, an der der Strom fließt. Sie stellen also wieder ein eigentliches Nahwirkungsgesetz dar.

Unserer Ableitung gemäß gelten sie für ein durchströmtes Raumelement ganz unabhängig davon, ob die benachbarten Raumteile ebenfalls Ströme enthalten oder nicht. Sie gelten allgemein in jedem körperlichen Medium, welches Ströme enthält. In stromlosen Gebieten verschwinden die linken Seiten der Gleichungen (14). Diese gehen dann, in Uebereinstimmung mit den Ausführungen des Abschnittes 3 dieses Kapitels, in die Gleichungen (2) über, welche aussprechen, daß in diesen Gebieten die magnetische Kraft ein Potential besitzt.

Die Gleichungen (14) sind ganz unabhängig von der Magnetisierungskonstante an derjenigen Stelle des Raumes, auf welche sie sich beziehen, da nach Abschnitt 9 die magnetische Kraft des Stromes von der Natur des Mediums unabhängig ist. Sie gelten daher ebenso, falls die Permeabilität in benachbarten Raumteilen verschieden ist, d. h. in inhomogenen Medien.

Das Nahwirkungsgesetz (14) in Verbindung mit dem in homogenen Medien stets gültigen zweiten Differentialgesetz der magnetischen Kraft:

$$\frac{\partial \tilde{\mathfrak{H}}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\mathfrak{H}}_y}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{\mathfrak{H}}_z}{\partial z} = 0$$

<sup>1)</sup> In der Schreibweise der Vektorenrechnung:  $4\pi \mathbf{j} = \text{rot } \tilde{\mathfrak{H}}$ .

(siehe II, 9, Gleichung 6), sowie der Uebergangsbedingung (24) des Kapitels II, Abschnitt 19, an der Grenze zweier verschiedener Medien, nämlich:

$$\mu_1 (\mathfrak{H}_n)_1 = \mu_2 (\mathfrak{H}_n)_2,$$

bestimmt die magnetischen Kräfte vollständig, wie auf dem in der Elektrostatik in Abschnitt 20—22 des Kapitels I eingeschlagenen Wege auch für das magnetische Feld leicht zu beweisen ist. Die magnetischen Kräfte sind also völlig bestimmt, falls man die Stromdichte an jeder Stelle des Raumes nach Größe und Richtung kennt. Umgekehrt ist natürlich auch letztere durch die Formeln (14) überall bestimmt, falls man überall die magnetische Kraft nach Größe und Richtung angeben kann.

## 10. Die positive Richtung des Stromes. — Die Ampèresche Regel.

In dem vorigen Paragraphen ist stillschweigend eine Verfügung über die positive Richtung der Stromstärke gemacht. Wir haben nämlich  $j \cos(\ln)$  die Komponente der Stromdichte nach der Normale  $n$  auf  $ds$  genannt. Diese muß daher nach Gleichung (12) positiv ausfallen, falls  $A$  positiv ist, d. h. wenn die Integration über die Umrandung des Flächenelements  $ds$  längs der positiven Richtung der magnetischen Kraft vorgenommen wird. In diesem Falle ist die positive Richtung von  $n$  nach der im vorigen Paragraphen angegebenen Weise bestimmt. Es folgt daher, daß eine Stromkomponente, welche mit der so definierten Richtung von  $n$  einen spitzen Winkel macht, positiv sein muß. Lassen wir speziell  $n$  mit der Achse der resultierenden Stromrichtung zusammenfallen, so erhalten wir daher das Resultat, daß die positive Richtung der magnetischen Kraft, die den Strom umschließt, der positiven Stromrichtung in demselben Sinne zugeordnet ist, in dem nach Abschnitt 10 des Kapitels I die positive Drehung um eine Achse definiert worden ist.

Es folgt hieraus die Ampèresche Regel, daß für einen Beobachter, welcher sich in einen stromführenden Draht so versetzt denkt, daß die positive Richtung des elektrischen Stromes von seinen Füßen zu seinem Kopf geht, und welcher einen Magneten ansieht, der Nordpol desselben nach links, der Südpol nach rechts getrieben werden muß.

Ebenso folgt, daß diejenige magnetische Doppelfläche  $S$ , deren Wirkung die des Stromes für außerhalb liegende Punkte ersetzen kann, positiv belegt sein muß auf der Seite, von welcher aus gesehen die positive Richtung des Stromes entgegen dem Uhrzeiger rotiert. Wir wollen diese Seite die positive Seite der Stromfläche  $S$  nennen.



## 11. Es gibt nur geschlossene Ströme.

Wie in Abschnitt 3 dieses Kapitels, S. 221, nachgewiesen ist, müssen die Wirbelräume eines Magnetfeldes stets ringförmig geschlossen sein. Wir schließen daraus, daß auch die stromführenden Räume stets ringförmig geschlossen sein müssen, d. h. daß es nur geschlossene Ströme gibt. Lassen wir daher einen Draht in beliebiger Gestalt die Enden eines galvanischen Elementes berühren, so müssen wir auch im letzteren die Existenz des elektrischen Stromes annehmen, so daß durch das Element der Strom in sich geschlossen erscheint<sup>1)</sup>.

Der mathematische Ausdruck für diese Tatsache ergibt sich leicht aus der Betrachtung eines röhrenförmigen Raumes — Stromröhre — dessen Seitenwände ganz von Stromlinien gebildet sind, d. h. solchen Kurven, deren Tangente in jedem Punkte parallel der resultierenden Stromdichte ist.

Nach Formel (12) muß für jeden beliebig schief liegenden Schnitt  $df$  einer Stromröhre das Produkt aus  $df$  in die Normalkomponente  $j_n$  der Stromdichte konstant sein, da  $A$  konstant ist. Dies Produkt  $j_n \cdot df$  wollen wir den Stromfluß durch  $df$  nennen. Rechnet man  $n$  konsequent als äußere Normale der Oberfläche eines begrenzten Raumes, so folgt also für eine Stromröhre:

$$\int j_n \cdot df = 0. \quad (15)$$

Dieselbe Gleichung gilt auch für jedes Stück eines beliebig dicken, vom Strom durchflossenen Mediums, da man dasselbe aus einzelnen Stromröhren zusammengesetzt denken kann. Aus der Formel (15) ergibt sich mit Hilfe des Gaußschen Satzes in derselben Anwendung, wie in Kapitel I, Abschnitt 15, die Formel:

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = 0, \quad (16)$$

eine Beziehung, welche wir andererseits aus den Maxwellschen Gleichungen (14) der S. 232 direkt hätten gewinnen können.

Man erhält also ein anschauliches Bild des Vorgangs beim elektrischen Strome, wenn man annimmt, derselbe sei wirklich die Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit. Denn dann muß in jeden Raumteil ebensoviel Flüssigkeit einströmen, wie ausströmen; der mathematische Ausdruck dafür ist aber die Formel (15), oder die gleichbedeutende (16).

<sup>1)</sup> Einen guten Versuch zum Nachweis des Stromes im Element hat O. Eckstein beschrieben, J. Amer. chem. soc. **27**, S. 759, 1905; Beibl. **29**, S. 1126, 1905; desgl. H. Lohmann, Zeitschr. f. d. phys. u. chem. Unterr. **13**, S. 313, 1900.

Es mag aber betont werden, daß nur die Gemeinsamkeit dieser Formeln die Vorgänge der elektrischen Strömung mit denen der Strömung einer ponderablen, inkompressiblen Flüssigkeit verbindet. In anderen Punkten, z. B. hinsichtlich der Trägheitsverhältnisse und der Energie der Strömung, versagt die Analogie beider Vorgänge.

Wie eine Vergleichung mit den Formeln (5') und (6') des II. Kapitels (s. S. 174) ergibt, welche den Formeln (15) und (16) dieses Kapitels ganz analog sind, könnte man dasselbe Bild der Strömung eines inkompressiblen Fluidums auch für die Deutung der Eigenschaften des Magnetfeldes außerhalb eines elektrisch durchströmten Systems verwenden, falls man  $\mathfrak{B}_x$ ,  $\mathfrak{B}_y$ ,  $\mathfrak{B}_z$  als Komponenten der Strömung interpretierte. Jedoch muß bemerkt werden, daß nicht nur die Strömung, sondern schon die Verschiebung eines inkompressiblen Fluidums aus der Gleichgewichtslage den betreffenden Formeln genügt. Dieses letztere Bild braucht man nun tatsächlich, wenn man von den Komponenten der magnetischen Verschiebung spricht, welche durch  $\frac{\mathfrak{B}_x}{4\pi}$ ,  $\frac{\mathfrak{B}_y}{4\pi}$ ,  $\frac{\mathfrak{B}_z}{4\pi}$  gemessen werden.

In der gleichen Weise ist das Bild von Maxwell auf das elektrostatische Feld angewandt worden. Für die elektrische Erregung  $\mathfrak{D}$  gelten in einem Raum, der keine wahren Elektrizitätsmengen enthält, Formeln, die ebenfalls den Formeln (15) und (16) ganz analog sind [I, 31, Formel (63') und (64')]. Der Vorgang der elektrischen Erregung in einem Isolator kann daher ebenfalls mit der Verschiebung eines inkompressiblen Fluidums verglichen werden. In diesem Sinne spricht Maxwell von der elektrischen Verschiebung in einem Dielektrikum. Denken wir uns eine Kraftröhre oder richtiger Erregungsröhre, die von einem Leiter ausgeht, und sei  $e$  die Elektrizitätsmenge, die den Endquerschnitt der Röhre auf dem Leiter bedeckt, so ist  $4\pi e$  der durch die Röhre hindurchgehende Erregungsfluß. Andererseits würde jeder beliebige Querschnitt der Röhre, wenn wir ihn uns als eine dünne leitende Schicht denken, sich auf der einen Seite mit der Elektrizitätsmenge  $-e$ , auf der andern mit  $+e$  bedecken. Durch jeden Querschnitt der Röhre hindurch wird gewissermaßen  $+e$  nach der einen,  $-e$  nach der entgegengesetzten Richtung verschoben. Versteht man unter der elektrischen Verschiebung die auf die Querschnittseinheit fallende influenzierte Elektrizitätsmenge, so ist die Größe der elektrischen Verschiebung:  $\frac{\mathfrak{D}}{4\pi}$

und die Komponenten der Verschiebung nach den Achsen sind:  $\frac{\mathfrak{D}_x}{4\pi}$ ,

$$\frac{\mathfrak{D}_y}{4\pi}, \frac{\mathfrak{D}_z}{4\pi}.$$

Die aufgestellten Formeln gelten ganz unabhängig von den soeben

besprochenen mechanischen Bildern, letztere leisten nur oft gute Dienste zur Veranschaulichung der Gesetze. So folgt z. B. aus dem Bilde einer elektrischen Strömung direkt, daß die Stromstärke in jedem Teile eines Stromkreises, der als Stromröhre aufgefaßt werden kann, konstant ist, d. h. daß die Stromdichte umgekehrt proportional dem Querschnitt ist, wie sich dies auch rein formell aus (15) ergibt. Ein in Luft liegender, vom Strom durchflossener Draht ist eine solche Stromröhre, da die Begrenzungen des Drahtes Stromlinien sind. Auch folgt sofort, daß, falls mehrere stromführende Drähte in einem Punkte P zusammenstoßen, die Summe der nach P hinströmenden Stromstärken gleich ist der Summe der von P abfließenden (sogenanntes erstes Kirchhoffsches Gesetz).

Es ist wichtig, zu bemerken, daß der in diesem Paragraphen besprochene Satz, daß es nur geschlossene Ströme gibt, nicht eine neue Hypothese ist, welche man der Theorie des elektromagnetischen Feldes hinzufügt, sondern daß sich dieser Satz mit Notwendigkeit aus den allgemeinen Eigenschaften des magnetischen Feldes ergibt.

## 12. Darstellung der magnetischen Kraft durch Integrale über die Strombahn. Vektorpotential.

Nach den Ausführungen in den Abschnitten 5, 6 und 7 sind die magnetischen Kräfte, die ein elektrischer Strom hervorruft, als die negativen Ableitungen eines Potentials darstellbar, das die Form eines Integrals über eine durch die Strombahn begrenzte Fläche hat:

$$\mathfrak{G}_x = -i \int ds \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial n \partial x}, \quad \mathfrak{G}_y = -i \int ds \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial n \partial y}, \quad \mathfrak{G}_z = -i \int ds \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial n \partial z}. \quad (17)$$

Für die Berechnung des Feldes spezieller Strombahnen ist es bequemer, die Flächenintegrale in Linienintegrale über die Randkurve der Fläche umzuwandeln. Eine solche Umwandlung haben wir in dem bereits mehrfach benutzten Stokesschen Satze kennen gelernt. Man kann aus ihm für den vorliegenden Fall, wo es sich um Ableitungen der Funktion  $\frac{1}{r}$  unter dem Integralzeichen handelt, unter Berücksichtigung des

Umstandes, daß  $\Delta \frac{1}{r} = 0$  ist, folgende Beziehungen ableiten.

Setzt man für die allgemeinen Funktionen  $\alpha \beta \gamma$ , für die wir in Kapitel I, Abschnitt 10 den Stokesschen Satz abgeleitet hatten, die Spezialwerte:

$$\alpha = 0, \quad \beta = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}, \quad \gamma = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y},$$

die mit Ausschluß des Aufpunktes P selbst im ganzen Raume der Bedingung, eindeutig, stetig und endlich zu sein, genügen, so nimmt die Stokessche Gleichung Formel (8) auf S. 24 die Formen an:

$$\begin{aligned} & \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} dy - \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} dz \\ &= \int ds \left[ - \left( \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} \right) \cos(nx) + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y} \cos(ny) + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z} \cos(nz) \right] \\ &= \int ds \left[ \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} \cos(nx) + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y} \cos(ny) + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z} \cos(nz) \right] \\ &= \int ds \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial n \partial x}. \end{aligned}$$

Entsprechend erhält man, indem man einsetzt:

$$\alpha = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}, \quad \beta = 0, \quad \gamma = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x},$$

die Beziehung:

$$\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dz - \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} dx = \int ds \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial n \partial y}$$

und durch

$$\alpha = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}, \quad \beta = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}, \quad \gamma = 0$$

die Beziehung:

$$\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} dx - \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dy = \int ds \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial n \partial z}.$$

Mit Hilfe dieser Beziehungen lassen sich die Formeln (17) folgendermaßen schreiben:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{D}_x &= i \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} dz - i \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} dy = \frac{\partial}{\partial y} \int \frac{idz}{r} - \frac{\partial}{\partial z} \int \frac{id y}{r}, \\ \mathfrak{D}_y &= i \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} dx - i \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial z} \int \frac{id x}{r} - \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{id z}{r}, \\ \mathfrak{D}_z &= i \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dy - i \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} dx = \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{id y}{r} - \frac{\partial}{\partial y} \int \frac{id x}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Ist das Feld von einem Medium mit der überall gleichen Permeabilität  $\mu$  erfüllt, so gelten für die Komponenten der Induktion  $\mathfrak{B}$  entsprechend die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{B}_x &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \int \frac{idz}{r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \int \frac{id y}{r} \right), \\ \mathfrak{B}_y &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \int \frac{id x}{r} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \int \frac{id z}{r} \right), \\ \mathfrak{B}_z &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \int \frac{id y}{r} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \int \frac{id x}{r} \right). \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Führen wir statt der Stromstärke  $i$  wieder das Produkt aus Stromdichte und Querschnitt des Leiters,  $j dq$  ein und ferner für die Komponenten  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  des Elements  $dl$  der Strombahn die Ausdrücke  $dl \cos(lx)$ ,  $dl \cos(ly)$ ,  $dl \cos(lz)$ , so kann man  $id x$ ,  $id y$ ,  $id z$  ersetzen durch  $j_x dq dl$ ,  $j_y dq dl$  und  $j_z dq dl$ . Endlich möge das Raumelement  $dq dl$  des stromführenden Leiters mit  $dv$  bezeichnet werden. Führen wir nun für die drei Funktionen, die in den Gleichungen (18) und (19) rechts unter den Differentialzeichen vorkommen, die Symbole  $\mathfrak{A}_x$ ,  $\mathfrak{A}_y$ ,  $\mathfrak{A}_z$  ein, so lassen sich die Definitionen für diese neuen Zeichen in folgender Form schreiben:

$$\mathfrak{A}_x = \mu \int \frac{j_x dv}{r}, \quad \mathfrak{A}_y = \mu \int \frac{j_y dv}{r}, \quad \mathfrak{A}_z = \mu \int \frac{j_z dv}{r}. \quad (20)$$

Dabei bedeutet  $r$  die Entfernung des Aufpunktes, für den die Werte der Funktion berechnet werden sollen, von dem Raumelement  $dv$ , in dem die Komponenten der Stromdichte die Werte  $j_x$ ,  $j_y$ ,  $j_z$  besitzen. Diese Funktionen haben genau die gleiche Form, wie die Potentiale einer räumlichen Verteilung elektrischer oder magnetischer Massen, wie wir sie früher kennen gelernt haben. Aber sie unterscheiden sich von ihnen dadurch, daß die räumliche Dichte einer elektrischen oder magneti-

schen Massenverteilung eine richtungslose Größe, ein Skalar, die hier vorkommende Stromdichtigkeit dagegen eine gerichtete Größe, ein Vektor ist. Daher treten hier drei derartige Funktionen auf, von denen jede für eine der drei Komponenten dieses Vektors gebildet ist. Man bezeichnet sie daher als Vektorpotentiale oder, da sie selbst als Komponenten eines Vektors  $\mathfrak{B}$  angesehen werden können, als die Komponenten des Vektorpotentials.

Mit Hilfe dieser neuen Funktionen nehmen die Gleichungen (19) die Form an<sup>1)</sup>:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{B}_x &= \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial z}, \\ \mathfrak{B}_y &= \frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial x}, \\ \mathfrak{B}_z &= \frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Daß die beiden Gleichungssysteme (20) und (21) einen Ansatz für die Größe  $\mathfrak{B}$  bilden, der die Bestimmungsgleichungen unseres elektromagnetischen Feldes erfüllt, folgt zwar von vornherein aus dem Umstande, daß sie ja direkt aus einer anderen Form der Lösung jener Bestimmungsgleichungen hergeleitet sind. Aber wir wollen diesen Nachweis<sup>2)</sup> noch einmal unabhängig von jener Ableitung führen, indem wir die<sup>3)</sup> Ausdrücke (21) für die Komponenten von  $\mathfrak{B}$  direkt in die Bestimmungsgleichungen einführen. Die Grundgleichung:

$$\frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial z} = 0 \quad (22)$$

ist durch (21) unmittelbar erfüllt. Die Gleichungen (14) ergeben Gleichungen von der Form:

$$\begin{aligned} 4\pi\mu j_x &= \frac{\partial^2 \mathfrak{B}_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \mathfrak{B}_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \mathfrak{B}_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{B}_z}{\partial x \partial z} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial z} \right) - \Delta \mathfrak{B}_x. \end{aligned}$$

Es läßt sich nun zunächst beweisen, daß die Funktionen  $\mathfrak{B}_x, \mathfrak{B}_y, \mathfrak{B}_z$  der Gleichung genügen:

$$\frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial z} = 0. \quad (23)$$

Führt man nämlich in die linke Seite dieser Gleichung die Raum-

<sup>1)</sup> Vektoranalytisch:  $\mathfrak{B} = \text{rot } \mathfrak{A}$ .

integrale (20) ein, so lassen sie sich durch Anwendung des Gaußschen Satzes (I, 15) unmittelbar in das Integral

$$\int \frac{j_n ds}{r}$$

umwandeln, das über die Oberfläche des gesamten Wirbelraumes des Feldes zu erstrecken ist. Dabei bedeutet  $j_n$  die auf der Oberfläche des Wirbelraumes senkrecht stehende Komponente der elektrischen Strömung. Diese aber ist stets gleich Null, da wir nur geschlossene Ströme haben und daher die ganze Oberfläche von Stromlinien gebildet sein muß. Demnach ist Gleichung (23) immer erfüllt und die aus den Gleichungen (19) sich ergebenden Gleichungen reduzieren sich auf die Form:

$$\begin{aligned}\Delta \mathfrak{B}_x &= -4\pi\mu j_x, \\ \Delta \mathfrak{B}_y &= -4\pi\mu j_y, \\ \Delta \mathfrak{B}_z &= -4\pi\mu j_z.\end{aligned}\tag{24}$$

Durch diese Gleichungen, sowie durch die Bedingung, daß  $\mathfrak{B}_x, \mathfrak{B}_y, \mathfrak{B}_z$  nebst ihren ersten Differentialquotienten nach den Koordinaten endlich und stetig sind, welche Bedingung jedenfalls erfüllt sein muß, da sonst  $\mathfrak{B}_x, \mathfrak{B}_y, \mathfrak{B}_z$  nicht endlich und stetig wären, sind die Funktionen  $\mathfrak{B}_x, \mathfrak{B}_y, \mathfrak{B}_z$  nach I, 22 vollständig bestimmt.

Diese Gleichungen aber haben die Form derjenigen Gleichung, der das Potential einer räumlichen Verteilung von Massen (gravitierenden, elektrischen oder magnetischen) genügt, und ihre Integrale können daher in der Form solcher Massenpotentiale geschrieben werden, indem  $\mu j_x, \mu j_y, \mu j_z$  die Dichtigkeiten darstellen, wie es in den Gleichungen (20) der Fall ist.

Die magnetischen Wirkungen eines Stromes lassen sich also aus Integralen ableiten, die über die Strombahn sich erstrecken und die Form von Potentialen haben. Diese Art der Formulierung ist es, die man als Darstellung der magnetischen Kraft durch Fernwirkung des Stromes im Sinne der älteren Theorie bezeichnen kann. Es ist aber wohl zu beachten, daß die magnetische Kraft im Felde eines Stromes zu dem Vektorpotential in einer ganz anderen Beziehung steht, als die magnetische Kraft des magnetostatischen Feldes zu dessen skalarem Potential. Denn die letztere ist der Gradient des skalaren Potentials, die erstere dagegen der Wirbel (rot) des Vektorpotentials.

Die obigen Ableitungen gelten, da  $\mu$  in die Gleichungen (18) als Faktor eingeführt und direkt unter das Differentialzeichen gesetzt ist, nur für Felder, in denen  $\mu$  konstant ist. Wenn die Magnetisierungskonstante nicht überall den Wert  $\mu$  besitzt, so ist immer noch

der Ansatz (21) gestattet.  $\mathfrak{B}_x$ ,  $\mathfrak{B}_y$ ,  $\mathfrak{B}_z$  sind dann aber nicht durch die Formeln (20) darstellbar. Bequemer ist für diese Fälle folgender Ansatz:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{S}_x &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{B}_z'}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{B}_y'}{\partial z}, \\ \mathfrak{S}_y &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{B}_x'}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{B}_z'}{\partial x}, \\ \mathfrak{S}_z &= -\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{B}_y'}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{B}_x'}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Da (22) allgemein auch in einem inhomogenen Medium gilt, so ergibt die Einführung der Gleichungen (25) in (22) die Gleichung:

$$\Delta \varphi = \frac{1}{\mu} \left( \mathfrak{S}_x \frac{\partial \mu}{\partial x} + \mathfrak{S}_y \frac{\partial \mu}{\partial y} + \mathfrak{S}_z \frac{\partial \mu}{\partial z} \right) \quad (26)$$

und die Einführung in (14) die Gleichungen:

$$\Delta \mathfrak{B}_x' = -4\pi j_x, \quad \Delta \mathfrak{B}_y' = -4\pi j_y, \quad \Delta \mathfrak{B}_z' = -4\pi j_z, \quad (27)$$

falls man auch von  $\mathfrak{B}'_x$ ,  $\mathfrak{B}'_y$ ,  $\mathfrak{B}'_z$  noch voraussetzt, daß sie die Bedingung erfüllen:

$$\frac{\partial \mathfrak{B}_x'}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{B}_y'}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{B}_z'}{\partial z} = 0.$$

Aus den Formeln (26) und (27) erkennt man, daß die magnetische Kraft in diesem Falle darstellbar ist durch Fernwirkung, welche einerseits von den stromdurchflossenen Gebieten ausgeht und andererseits von denjenigen Raumteilen, in welchen  $\mu$  variiert. Sind diese Raumteile unendlich dünn, wie es bei zwei aneinander grenzenden verschiedenen homogenen Medien der Fall ist, deren Grenzfläche als ein solcher dünner Raumteil anzusehen ist, so geht die räumliche Belegung dieser Raumteile, welche scheinbare Fernkräfte äußern, in eine Flächenbelegung auf der Grenzfläche der beiden Medien über, deren Dichte aus (26) leicht zu berechnen ist.

### 13. Die magnetischen Kraftlinien eines Stromes.

Die im vorigen Abschnitt gegebene Darstellung setzt uns in den Stand, in anschaulicher Weise die Kraftlinien eines Stromes zu konstruieren. Knüpfen wir zur Vereinfachung nur an den Fall an, es sei  $\mu$  im ganzen Raume konstant. Wir wollen ferner zunächst annehmen, es sei  $j_x = j_y = 0$  und nur  $j_z$  von Null verschieden; dies kann bei einem sehr langen zylindrischen Metallkörper realisiert werden. Dann folgt aus (20) und (21):



$$\mu \mathfrak{G}_x = \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial y}, \quad \mu \mathfrak{G}_y = - \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial x}, \quad \mu \mathfrak{G}_z = 0. \quad (28)$$

$$\mathfrak{B}_z = \mu \int \frac{j_z dv}{r}. \quad (29)$$

Betrachten wir den Schnitt der  $xy$ -Ebene mit einer Fläche, für welche  $\mathfrak{B}_z = \text{Konst.}$  ist — wir wollen eine solche Fläche eine Niveaufläche nennen — so hat  $\mathfrak{B}_z$  auf dieser Kurve überall denselben Wert. Wenn wir daher von einem Punkte der Kurve zu einem benachbarten Punkte derselben übergehen, der um die Länge  $dl$  vom ersten entfernt ist, so ist

$$\frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial y} dy = 0,$$

falls  $dx$  und  $dy$  die Projektionen von  $dl$  auf die  $x$ - und  $y$ -Achse bedeuten. Eine Vergleichung dieser Formel mit (28) ergibt nun

$$\frac{\mathfrak{G}_x}{\mathfrak{G}_y} = \frac{dx}{dy},$$

d. h. die Richtung der Kraftlinie, welche durch das Verhältnis  $\mathfrak{G}_x : \mathfrak{G}_y$  gegeben wird, fällt mit der Richtung von  $dl$  zusammen, da diese sich durch  $dx : dy$  bestimmt. Mit anderen Worten: Die magnetischen Kraftlinien sind die Schnittkurven, welche eine Schar Ebenen, die der  $xy$ -Ebene parallel sind, mit der Schar der Niveauflächen bilden. Der positive Sinn der Kraftlinien bestimmt sich nach der Ampèreschen Regel. Die Größe der resultierenden magnetischen Kraft, d. h. die Feldstärke, folgt aus (28) zu:

$$\mathfrak{G} = \sqrt{\mathfrak{G}_x^2 + \mathfrak{G}_y^2} = \frac{1}{\mu} \sqrt{\left(\frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial y}\right)^2}. \quad (30)$$

Nun bezeichnet aber die Quadratwurzel der rechten Seite den Differentialquotienten  $\frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial n}$  genommen nach einer Richtung  $n$ , welche senkrecht auf den Niveauflächen steht. Man erkennt dies am einfachsten durch die Ueberlegung, daß, wenn  $\mathfrak{B}_z$  das Potential einer Kraft im gewöhnlichen Sinne ist, dann die Resultante der Kraft in der Richtung  $n$  liegt, da alle Komponenten senkrecht zu  $n$  verschwinden. Die Resultante der Kraft muß also durch  $\frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial n}$  gemessen werden. Andererseits ist die Resultante gleich der Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der Komponenten der Kraft nach den Koordinatenachsen, d. h. es ist

$$\frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial n} = \sqrt{\left(\frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial y}\right)^2}. \quad (31)$$

Konstruieren wir einerseits eine Schar von Ebenen, welche der  $xy$ -Ebene parallel sind, in gleichen Abständen  $dz$  voneinander und andererseits die Niveauflächen  $\mathfrak{B}_z = C$  derart, daß sie gleichen Zuwüchsen  $d\mathfrak{B}_z$  der Konstanten  $C$  entsprechen, so ist der Induktionsfluß durch ein senkrecht zu den Kraftlinien liegendes Flächenelement, welches von je zwei benachbarten Flächen der Ebenenschar und der Niveauflächen begrenzt wird und daher die Größe  $dzdn$  hat, da die Niveauflächen senkrecht zu der  $XY$ -Ebene sind, gegeben durch

$$\mu \sqrt{\mathfrak{B}_x^2 + \mathfrak{B}_y^2} dzdn,$$

d. h. nach (30) und (31) durch

$$dz \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial n} dn = dz \cdot d\mathfrak{B}_z.$$

Der Induktionsfluß ist daher durch alle diese Flächenelemente konstant. Da nach der angegebenen Konstruktion auf jedes Flächenelement der Größe  $dzdn$  die gleiche Zahl von Induktionslinien kommt, so ist daher für ein beliebiges größeres Flächenstück  $dS$  (welches allerdings nicht zu groß sein darf) die Zahl der Flächenelemente, in die  $dS$  durch die angegebene Konstruktion zerlegt wird, dem Induktionsfluß durch  $dS$  proportional. Durch die angegebene Konstruktion erhalten wir also auch die richtige Anzahl von Röhren gleichen Induktionsflusses oder von Induktionslinien (vgl. II, 11 und 22), so daß man aus ihrer Dichte die Größe der magnetischen Induktion an jeder Stelle unmittelbar bestimmen kann.

#### 14. Die Ströme sollen in parallelen, kreiszylinderförmigen, langen Drähten fließen.

Es sei zunächst nur ein einziger langer Draht im Felde vorhanden, welcher die Gestalt eines Kreiszylinders vom Radius  $R$  besitzt. Die Permeabilität besitze im ganzen Felde denselben Wert  $\mu$ . Legt man die  $z$ -Achse in die Zylinderachse, so ist, wie im vorigen Abschnitt,  $j_x = j_y = 0$ . Ebenso verschwinden die Komponenten  $\mathfrak{B}_x, \mathfrak{B}_y$  des Vektorpotentials. Die Komponente  $\mathfrak{B}_z$  hat nach (24), S. 240, der Bedingung zu genügen:

$$\Delta \mathfrak{B}_z = -4\pi \mu j_z. \quad (24)$$

Wir wollen annehmen, daß die Stromdichte  $j_z$  in konzentrischen Schichten des Drahtes denselben Wert hat. Aus Symmetriegründen hängt dann  $\mathfrak{B}_z$  nur von der senkrechten Entfernung  $r$  eines Punktes von der  $z$ -Achse ab.

Es soll zunächst die Differentialgleichung (24) so transformiert werden, daß als unabhängige Variable nur  $r$  auftritt. Dies gelingt entweder

durch Einführung von Polarkoordinaten oder einfacher, wenn wir auf die Funktion  $\mathfrak{B}_z$  den Gaußschen Satz anwenden.

In Kapitel I, Abschnitt 15 (S. 32) war dieser Satz in der Form ausgesprochen worden:

$$\int \left( \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial z} \right) dv = \int \mathfrak{E}_n ds.$$

Nimmt man an, daß die  $\mathfrak{E}_x$ ,  $\mathfrak{E}_y$ ,  $\mathfrak{E}_z$  die Ableitungen einer Funktion  $U$  sind, so geht diese Form über in

$$\int \Delta U dv = \int \frac{\partial U}{\partial n} ds.$$

In dieser Form läßt sich der Satz auf jede Funktion anwenden, die durch eine Differentialgleichung vom Typus der Gleichung (24) definiert ist. Auf  $\mathfrak{B}_z$  angewandt, nimmt er die Form an:

$$\int \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial n} ds = -4\pi\mu \int j_z dv. \quad (32)$$

Wendet man diesen Satz an auf einen um die  $z$ -Achse beschriebenen Ring, dessen Höhe  $dz$  ist und dessen innerer Radius den Wert  $r$  besitzt, während der äußere um  $dr$  größer als  $r$  ist, so erhält man:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\mathfrak{B}_z}{dr} \right]_{r+dr} 2\pi(r+dr) dz - \left[ \frac{d\mathfrak{B}_z}{dr} \right]_r 2\pi r dz \\ = -4\pi\mu j_z \cdot 2\pi r dr dz. \end{aligned} \quad (32')$$

Nun ist aber nach dem Taylorschen Lehrsatz:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\mathfrak{B}_z}{dr} \right]_{r+dr} \cdot (r+dr) &= \left[ r \frac{d\mathfrak{B}_z}{dr} \right]_{r+dr} = \left[ \frac{d\mathfrak{B}_z}{dr} \right]_r \cdot r \\ &+ \frac{d}{dr} \left[ r \frac{d\mathfrak{B}_z}{dr} \right] \cdot dr, \end{aligned}$$

folglich wird (32') zu:

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{d\mathfrak{B}_z}{dr} \right) = -4\pi\mu j_z. \quad (33)$$

Dies ist die gesuchte Umgestaltung der Gleichung (24).

Für stromlose Punkte ( $j_z = 0$ ) ist das allgemeine Integral von (33):

$$\mathfrak{B}_z = C_1 \lg r + C_2, \quad (34)$$

wo  $C_1$  und  $C_2$  willkürliche Konstanten bedeuten. Die Konstante  $C_1$  muß verschwinden, wenn der Wert  $r = 0$  vorkommen kann, da sonst  $\mathfrak{B}_z$  und ebenso die magnetische Kraft unendlich groß werden. Für das Innere eines vom Strom durchflossenen Hohlzylinders ist also

$\mathfrak{B}_z$  konstant, mithin verschwindet die magnetische Kraft, da die Stärke  $\mathfrak{H}$  des magnetischen Feldes nach (30) und (31), S. 242, gegeben ist durch:

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{d\mathfrak{B}_z}{dr}. \quad (35)$$

Für das Äußere eines stromdurchflossenen Kreiszylinders bleibt die allgemeine Form (34) bestehen. Die Konstante  $C_1$  ergibt sich, wenn man den Gaußschen Satz (32) auf die Oberfläche eines zu dem Draht konzentrischen Zylinders anwendet. Ist seine Länge gleich 1, so folgt aus (32) und (34), falls  $i$  die Stromstärke bedeutet:

$$\frac{C_1}{r} 2\pi r = -4\pi\mu \int j_z dq = -4\pi\mu i,$$

daher ist

$$C_1 = -2\mu i$$

und

$$\mathfrak{B}_z = -2\mu i \lg r + C_2 \quad (36)$$

gilt allgemein für jeden Zylinder, in welchem die Stromdichte eine beliebige Funktion des Abstandes von seiner Achse ist. Der Zylinder wirkt also auf äußere Punkte so, als ob sein ganzer Strom in seiner Achse konzentriert wäre.

Während die beiden ausgesprochenen Sätze allgemein für den Fall gelten, daß  $j_z$  eine beliebige Funktion von  $r$  ist, wollen wir nunmehr den Fall betrachten, daß  $j_z$ , falls es überhaupt von Null verschieden ist, nicht mehr von  $r$  abhängt. Das allgemeine Integral der Gleichung (33) lautet dann für stromdurchflossene Punkte:

$$\mathfrak{B}_z = C_1 \lg r + C_2 - \pi\mu j_z r^2, \quad (37)$$

wie man sofort durch Integration aus (33) finden kann.

Wir behandeln nun den Fall eines gleichförmig durchströmten Vollzylinders.

Für äußere Punkte muß  $\mathfrak{B}_z$  die Gestalt von (34) besitzen. Die Konstante  $C_1$  bestimmt sich nach Formel (36) zu:

$$C_1 = -2\pi\mu j_z R^2.$$

Folglich ist für äußere Punkte:

$$\mathfrak{B}_{za} = -2\pi\mu j_z R^2 \lg r + C. \quad (38)$$

Für innere Punkte muß  $\mathfrak{B}_z$  die Form von (37) besitzen, jedoch muß dort  $C_1$  verschwinden, weil der Wert  $r = 0$  vorkommt. Es ist also für innere Punkte:

$$\mathfrak{B}_{zi} = C_2 - \pi\mu j_z r^2. \quad (38')$$

An der Oberfläche des Zylinders ( $r = R$ ) muß nach S. 240  $\mathfrak{B}_{za}$  stetig

in  $\mathfrak{B}_{zi}$  übergehen, ebenso wie  $\frac{d\mathfrak{B}_{za}}{dr}$  in  $\frac{d\mathfrak{B}_{zi}}{dr}$ . Ersteres gibt die Bedingung:

$$-2\pi\mu_j R^2 \lg R + C = C_2 - \pi\mu_j R^2, \quad (39)$$

letzteres liefert:

$$-2\pi\mu_j R = -2\pi\mu_j R.$$

Dieses ist identisch erfüllt, dagegen kann man mit Hilfe von (39) und (38')  $C_2$  eliminieren und erhält:

$$\mathfrak{B}_{zi} = -2\pi\mu_j R^2 \lg R + \pi\mu_j (R^2 - r^2) + C. \quad (40)$$

Da  $\mathfrak{B}_{za}$  und  $\mathfrak{B}_{zi}$  jetzt allen an sie zu stellenden Bedingungen genügen, so stellen (38) und (40) die Lösung dar. Die noch übrigbleibende Konstante  $C$  bestimmt sich aus den Bedingungen, welchen  $\mathfrak{B}_{za}$  in der Unendlichkeit ( $r = \infty$ ) zu genügen hat. Sind dort keine Ströme vorhanden, so muß  $\mathfrak{B}_z$  dort verschwinden. Bei der bisher behandelten Aufgabe müssen aber Ströme in der Unendlichkeit vorhanden sein, durch welche der im Draht fließende Strom als ein geschlossener auftritt. Denn es gibt nur geschlossene Ströme. Auf den Wert der magnetischen Kraft hat indes die Konstante  $C$  keinen Einfluß, da sich die magnetische Kraft nur aus den Differentialquotienten von  $\mathfrak{B}_z$  berechnet.

Da  $\pi R^2$  der Querschnitt des Zylinders ist, so ist  $\pi R^2 j_z = i$ , falls  $i$  die Stromstärke bezeichnet. Man kann daher die Formeln (38) und (40) auch in der Gestalt schreiben:

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_{za} &= -2\mu_i (\log r + C), \\ \mathfrak{B}_{zi} &= -2\mu_i \left[ \lg R + C - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (41)$$

Aus Symmetrie folgt, daß die Kraftlinien konzentrische Kreise sind. Konstruiert man die Dichte der Kraftlinien durch die im vorigen Abschnitt gegebene Regel, daß man für alle Niveauflächen  $\mathfrak{B}_z = \text{Konst.}$  die Konstante um denselben Wert zunehmen läßt, so erhält man das in der Fig. 37 gezeichnete Bild, aus welchem folgt, daß an der Oberfläche des Zylinders (dicken Drahtes) die magnetische Kraft am größten ist, und von dort aus sowohl nach dem Innern wie nach dem Äußeren zu allmählich abnimmt. Dasselbe kann man auch analytisch aus den Formeln (41) ableiten. Denn nach (35) und (41) ist die Feldstärke

$$\left. \begin{aligned} \text{im Außenraume: } \mathfrak{H}_a &= \frac{2i}{r}, \\ \text{im Innenraume: } \mathfrak{H}_i &= \frac{2ir}{R^2}. \end{aligned} \right\} \quad (41a)$$

Es möge nun ein gleichmäßig durchströmter Hohlzylinder betrachtet werden. Sein äußerer Radius sei  $R$ , sein innerer  $R'$ . Für den Außenraum gilt nach (36):

$$\mathfrak{B}_{za} = -2 \mu_i \lg r + C = -2 \pi \mu_{jz} (R^2 - R'^2) \lg r + C. \quad (42)$$

Für den inneren Hohlraum muß nach dem oben S. 244 ausgesprochenen Satze sein:

$$\mathfrak{B}_{za}' = C', \quad (43)$$

dagegen muß für den durchströmten Raum sein nach (37):

$$\mathfrak{B}_{zi} = C_1 \lg r + C_2 - \pi \mu_{jz} r^2. \quad (44)$$

Die Stetigkeit von  $\frac{d\mathfrak{B}_z}{dr}$  an der Innenfläche des Zylinders ( $r = R'$ ) gibt die Bedingung:

$$0 = \frac{C_1}{R'} - 2 \pi \mu_{jz} R',$$

d. h.

$$C_1 = 2 \pi \mu_{jz} R'^2, \quad (45)$$

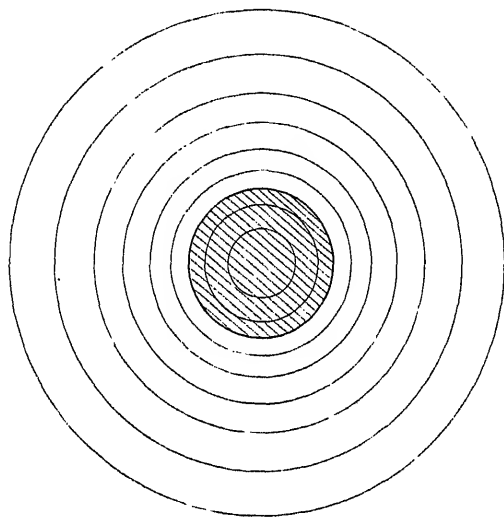


Fig. 37.

an der Außenfläche des Zylinders ( $r = R$ ) dagegen:

$$-2 \pi \mu_{jz} \frac{R^2 - R'^2}{R} = 2 \pi \mu_{jz} \left( \frac{R'^2}{R} - R \right).$$

Diese Gleichung ist identisch erfüllt.

Ferner ergibt die Stetigkeit von  $\mathfrak{B}_z$  selber an der Innen- und Außenfläche des Zylinders die beiden Bedingungen:

$$\begin{aligned} C' &= 2 \pi \mu_{jz} R'^2 \lg R' + C_2 - \pi \mu_{jz} R'^2, \\ -2 \pi \mu_{jz} (R^2 - R'^2) \lg R + C &= 2 \pi \mu_{jz} R'^2 \lg R + C_2 - \pi \mu_{jz} R^2. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ergibt:

$$C_2 = -2 \pi \mu_{jz} R^2 \lg R + \pi \mu_{jz} R^2 + C, \quad (46)$$

die vorletzte:

$$\mathfrak{B}_{za}' = C' = 2 \pi \mu j_z (R'^2 \lg R' - R^2 \lg R) + \pi \mu j_z (R^2 - R'^2) + C. \quad (47)$$

Es wird daher nach (44), (45) und (46):

$$\mathfrak{B}_{zi} = 2 \pi \mu j_z (R'^2 \lg r - R^2 \lg R) + \pi \mu j_z (R^2 - r^2) + C. \quad (48)$$

Nach (35), S. 245, folgt für die magnetische Feldstärke im Außenraume:

$$\mathfrak{H}_a = \frac{2i}{r} = \frac{2 \pi j_z (R^2 - R'^2)}{r},$$

im durchströmten Raume:

$$\mathfrak{H}_i = 2 \pi j_z \left( r - \frac{R'^2}{r} \right),$$

im Innenraume:

$$\mathfrak{H}_a' = 0.$$

Auch hier nimmt  $\mathfrak{H}_i$  mit abnehmendem  $r$  stetig ab. Die Feldstärke ist am größten an der Außenfläche des Zylinders. An der Innenfläche hat sie den Wert Null.

Wir wollen jetzt noch betrachten einen gleichmäßig durchströmten Hohlzylinder, in dessen Innerem sich ein gleichmäßig durchströmter Vollzylinder koaxial befindet. Dieser Fall hat, gerade wie die vorigen, ein gewisses praktisches Interesse, das wir beim Kapitel „Induktion und Elektrokine matik“ kennen lernen werden.

Der jetzt zu betrachtende Fall kann offenbar als eine Superposition der beiden vorhin betrachteten Fälle angesehen werden. Für den Außenraum ergibt sich nach der allgemeinen Formel (36):

$$\mathfrak{B}_{za} = -2 \mu (i_1 + i_2) \lg r + C,$$

falls  $i_1$  die Stromstärke im Hohlzylinder,  $i_2$  im eingeschlossenen Vollzylinder bedeutet.

Ist  $i_1 = -i_2$ , was der Fall ist, wenn der Vollzylinder als einzige Rückleitung für den Hohlzylinder dient, so ergibt sich

$$\mathfrak{B}_{za} = C.$$

Die Konstante  $C$  ist in diesem Falle gleich Null zu setzen, da in der Unendlichkeit (für  $r = \infty$ ) keine Ströme fließen, d. h.  $\mathfrak{B}_{za}$  dort verschwindet. Wir wollen jetzt allein diesen Fall näher betrachten, daß  $i_1 + i_2 = 0$  ist. Es ist also

$$\mathfrak{B}_{za} = 0. \quad (49)$$

Für den durchströmten Innenraum des Hohlzylinders ergibt sich durch Addition von (48) und (38):

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_{zi}^{(1)} = & +2 \pi \mu j_{z1} (R_1'^2 \lg r - R_1^2 \lg R_1) + \pi \mu j_{z1} (R_1^2 - r^2) \\ & - 2 \pi \mu j_{z2} R_2^2 \lg r, \end{aligned} \quad (50)$$

falls  $j_{z1}$  die Stromdichte im Hohlzylinder,  $j_{z2}$  im Vollzylinder, ferner  $R_2$  den Radius des letzteren,  $R_1$  und  $R_1'$  den äußeren und inneren Radius des ersteren bedeuten. Wegen der Beziehung  $i_1 + i_2 = 0$  ist

$$j_{z1} (R_1^2 - R_1'^2) + j_{z2} R_2^2 = 0. \quad (51)$$

Wegen dieser Beziehung schreibt sich

$$\mathfrak{B}_{zi}^{(1)} = \pi \mu j_{z1} (R_1^2 - r^2) + 2 \pi \mu j_{z1} R_1^2 \cdot \lg \frac{r}{R_1}. \quad (50')$$

Eine Konstante ist in der Formel (50) nicht mehr zu addieren, denn für  $r = R_1$  wird  $\mathfrak{B}_{zi}$  zu Null, d. h. geht stetig in den Wert  $\mathfrak{B}_{za}$  nach (49) über.

Für den stromfreien Innenraum zwischen Hohl- und Vollzylinder ergibt sich durch Addition von (47) und (38):

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_{za}' = & + 2 \pi \mu j_{z1} (R_1'^2 \lg R_1' - R_1^2 \lg R_1) + \pi \mu j_{z1} (R_1^2 - R_1'^2) \\ & - 2 \pi \mu j_{z2} R_2^2 \lg r. \end{aligned} \quad (52)$$

Eine Konstante ist auch hier nicht zu addieren, da für  $r = R_1'$  die Formel (50) in die Formel (52) übergeht.

Für den durchströmten Innenraum des Vollzylinders ergibt sich durch Addition von (47) und (40):

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_{zi}^{(2)} = & + 2 \pi \mu j_{z1} (R_1'^2 \lg R_1' - R_1^2 \lg R_1) + \pi \mu j_{z1} (R_1^2 - R_1'^2) \\ & - 2 \pi \mu j_{z2} R_2^2 \lg R_2 + \pi \mu j_{z2} (R_2^2 - r^2). \end{aligned} \quad (53)$$

Eine Konstante ist wiederum nicht zuzufügen, da für  $r = R_2$  der Wert  $\mathfrak{B}_{zi}^{(2)}$  stetig in  $\mathfrak{B}_{za}'$  übergeht. Wegen der Beziehung (51) wird die letzte Gleichung zu:

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_{zi}^{(2)} = & - \pi \mu j_{z2} r^2 + 2 \pi \mu j_{z1} (R_1'^2 \lg R_1' - R_1^2 \lg R_1) \\ & - 2 \pi \mu j_{z2} R_2^2 \lg R_2. \end{aligned} \quad (53')$$

Die Feldstärken werden in den betrachteten vier Räumen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_a &= 0, \\ \mathfrak{G}_i^{(1)} &= 2 \pi j_{z1} \left( \frac{R_1^2}{r} - r \right), \\ \mathfrak{G}_a' &= - 2 \pi j_{z2} \frac{R_2^2}{r}, \\ \mathfrak{G}_i^{(2)} &= - 2 \pi j_{z2} r. \end{aligned} \quad (54)$$

Da die Feldstärken an den Grenzen der Räume, für welche sie gelten, stets ineinander übergehen, so sind alle Bedingungen des Problems erfüllt, und die Formeln (54) enthalten also seine Lösung.

Aus (54) ist abzuleiten:

$$\frac{d\mathfrak{G}_i^{(1)}}{dr} = - 2 \pi j_{z1} \left( \frac{R_1^2}{r^2} + 1 \right),$$



d. h.  $\mathfrak{H}^{(1)}$  nimmt mit wachsendem  $r$  beständig ab, falls man  $j_{z1}$  positiv, daher  $j_{z2}$  negativ rechnet; ebenso  $\mathfrak{H}_a'$ . Dagegen wächst  $\mathfrak{H}_i^{(2)}$  mit  $r$ . Man erhält daher das in der Fig. 38 angedeutete Bild für den Verlauf der magnetischen Feldstärke. Sie ist am größten an der Oberfläche des Vollzylinders.

In den bisher betrachteten Fällen sind die Oberflächen der stromführenden Körper Niveaulächen des Vektorpotentials  $\mathfrak{B}_z$ . Daher liegen die Oberflächen parallel den magnetischen Kraftlinien. Nach den Auseinandersetzungen in Kap. II, Abschnitt 23, S. 177 macht es daher auch in diesen Fällen, wo es sich nicht mehr um unendlich dünne (lineare) Ströme handelt, keinen Unterschied für die Größe der magnetischen Kraft, ob die Permeabilität überall denselben Wert besitzt, oder ob sie in den durchströmten Körpern abweicht von der Permeabilität der Umgebung. Die entwickelten Formeln für  $\mathfrak{H}$  bleiben daher in beiden

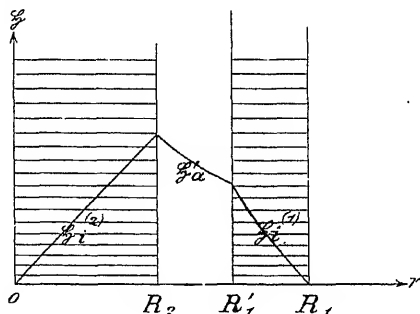


Fig. 38.

Fällen ganz dieselben. Die Formeln für das Vektorpotential  $\mathfrak{B}_z$  erleiden dagegen eine kleine Veränderung, und wir wollen dieselbe etwas näher betrachten, da für spätere Zwecke nicht nur die Kenntnis der magnetischen Kraft, sondern auch die des Vektorpotentials von Nutzen sein wird. Dieselbe ist am einfachsten zu ermitteln, wenn man nach der in jedem homogenen Medium gültigen Formel (35), S. 245,  $\mathfrak{B}_z$  durch Integration nach  $r$  aus  $\mathfrak{H}$  gewinnt und die Integrationskonstanten so bestimmt, daß die Werte von  $\mathfrak{B}_z$  in den verschiedenen aneinander grenzenden Medien an den Grenzflächen derselben stetig ineinander übergehen. Dies ist offenbar notwendig, da sonst die magnetische Kraft in einer Grenzfläche unendlich groß würde, da sie nach den Definitionsgleichungen (21) des Vektorpotentials, S. 239, abhängt von den ersten Differentialquotienten des letzteren. Da die magnetische Kraft  $\mathfrak{H}$  sich beim Durchgang durch die Grenzfläche stetig verhält, weil sie tangential zu derselben liegt, so muß also nach (35) auch  $\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial n}$  stetig sein, d. h.  $\frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial n}$  selber unstetig.

So ergibt sich auf dem auseinandergesetzten Wege für einen gleichmäßig durchströmten Hohlzylinder, dessen Permeabilität  $\mu_i^{(1)}$  ist, und in dessen Innerem sich ein gleichmäßig durchströmter Vollzylinder befindet, dessen Permeabilität  $\mu_i^{(2)}$  ist, für den vorhin betrachteten Fall, daß  $i_1 + i_2 = 0$  ist, durch Integration aus den Formeln (54):

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}_{za} &= 0, \\ \mathfrak{B}_{zi}^{(1)} &= -\pi \mu_i^{(1)} j_{z1} r^2 + 2\pi \mu_i^{(1)} j_{z1} R_1^2 \lg r + C_1, \\ \mathfrak{B}_{za}' &= -2\pi \mu_a' j_{z2} R_2^2 \lg r + C_2, \\ \mathfrak{B}_{zi}^{(2)} &= -\pi \mu_i^{(2)} j_{z2} r^2 + C_3.\end{aligned}\quad (55)$$

$\mu_a'$  bedeutet die Permeabilität des zwischen Hohlzylinder und Vollzylinder befindlichen stromfreien Raumes.

Aus den Stetigkeitsbedingungen des  $\mathfrak{B}_z$  erhält man folgende Werte für die Konstanten C:

$$\begin{aligned}C_1 &= \pi \mu_i^{(1)} j_{z1} R_1^2 (1 - 2 \lg R_1), \\ C_2 &= \pi \mu_i^{(1)} j_{z1} (R_1^2 - R_1'^2) + 2\pi \mu_i^{(1)} j_{z1} R_1^2 \lg \frac{R_1'}{R_1} \\ &\quad + 2\pi \mu_a' j_{z2} R_2^2 \lg R_1', \\ C_3 &= \pi \mu_i^{(1)} j_{z1} (R_1^2 - R_1'^2) + \pi \mu_i^{(2)} j_{z2} R_2^2 + 2\pi \mu_i^{(1)} j_{z1} R_1^2 \lg \frac{R_1'}{R_1} \\ &\quad - 2\pi \mu_a' j_{z2} R_2^2 \lg \frac{R_2}{R_1'}.\end{aligned}$$

Setzt man diese Werte in (55) ein, so entsteht:

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}_{za} &= 0, \\ \mathfrak{B}_{zi}^{(1)} &= \pi \mu_i^{(1)} j_{z1} (R_1^2 - r^2) + 2\pi \mu_i^{(1)} j_{z1} R_1^2 \lg \frac{r}{R_1}, \\ \mathfrak{B}_{za}' &= \pi \mu_i^{(1)} j_{z1} (R_1^2 - R_1'^2) + 2\pi \mu_i^{(1)} j_{z1} R_1^2 \lg \frac{R_1'}{R_1} \\ &\quad + 2\pi \mu_a' j_{z2} R_2^2 \lg \frac{R_1'}{r}, \\ \mathfrak{B}_{zi}^{(2)} &= \pi \mu_i^{(1)} j_{z1} (R_1^2 - R_1'^2) + \pi \mu_i^{(2)} j_{z2} (R_2^2 - r^2) \\ &\quad + 2\pi \mu_i^{(1)} j_{z1} R_1^2 \lg \frac{R_1'}{R_1} + 2\pi \mu_a' j_{z2} R_2^2 \lg \frac{R_1'}{R_2}.\end{aligned}\quad (56)$$

Für  $\mu_a' = \mu_i^{(1)} = \mu_i^{(2)}$  gehen diese Formeln in die Formeln (50'), (52) und (53) über.

Etwas anders liegen die Verhältnisse, wenn zwei parallele Stromzylinder sich gegenseitig nahe kommen. Die betreffenden Formeln kann man leicht aus Formel (41), S. 246, ableiten, wenn man wenigstens annimmt, daß  $\mu$  überall denselben Wert besitze. Es ist nach (41) für den Außenraum beider Zylinder:

$$\mathfrak{B}_{za} = -2\mu (i_1 \lg r_1 + i_2 \lg r_2) + C, \quad (57)$$

falls  $r_1$  die Entfernung des Aufpunktes P von der Achse des vom Strom  $i_1$  durchflossenen Zylinders bedeutet und analog  $r_2$  die Entfernung des P von der Achse des vom Strom  $i_2$  durchflossenen Zylinders.

Für den Innenraum des ersten Zylinders gilt:

$$\mathfrak{B}_{zi}^{(1)} = -2\mu \left\{ i_1 (\lg R_1 + C) - \frac{i_1}{2} \left( 1 - \frac{r_1^2}{R_1^2} \right) + i_2 \lg r_2 \right\}, \quad (58)$$

für den Innenraum des zweiten Zylinders:

$$\mathfrak{B}_{zi}^{(2)} = -2\mu \left\{ i_2 (\lg R_2 + C) - \frac{i_2}{2} \left( 1 - \frac{r_2^2}{R_2^2} \right) + i_1 \lg r_1 \right\}. \quad (59)$$

Sind die Stromstärken  $i_1$  und  $i_2$  numerisch gleich und einander entgegengesetzt, ein Fall, den man sich dadurch verwirklichen kann, daß man einen langen, dicken stromdurchflossenen Draht so umbiegt, daß seine Hälften parallel und in relativer Nähe verlaufen, so muß  $\mathfrak{B}_{za}$  für  $r_1 = r_2 = \infty$  verschwinden, da dort kein Strom fließt. In diesem Falle muß also die Konstante C aus den Formeln (57), (58), (59) verschwinden.

Für  $R_1 = R_2$  und  $i_1 + i_2 = 0$  würde sich der in Fig. 39 dargestellte Kraftlinienverlauf ergeben. Man erkennt, daß die Kraftlinien nicht mehr der Drahtoberfläche parallel sind. Daher muß sich der Kraftlinienverlauf und die Feldstärke ändern, falls die Permeabilität der Drähte und der Umgebung merklich verschieden sind, z. B. wenn Eisen-drähte in Luft lagern, oder wenn Kupferdrähte isoliert in Eisen eingebettet sind. Es gelten dann die Formeln (57) bis (59) nicht mehr. Die anzubringenden Änderungen werden unmerklich, wenn die Drähte sehr dünn im Vergleich zu ihrer relativen Entfernung sind, denn dann ist der Kraftlinienverlauf in der Nähe eines Drahtes so, als ob der andere nicht vorhanden wäre. Es gelten also dann wieder die aus den Formeln (57) bis (59) ableitbaren Werte für die Feldstärke  $\mathfrak{H}$ , selbst wenn die Permeabilität der Drähte merklich abweicht von der ihrer Umgebung. Wie in diesem Falle die Werte des Vektorpotentials gefunden werden können, d. h. welche Modifikation die Formeln (57) bis (59) selber erfahren, ist nach dem oben an einem Beispiele erläuterten Verfahren leicht ersichtlich.

## 15. Der allgemeinere Fall. Fortsetzung von Abschnitt 13.

Sind im Felde die elektrischen Strömungen nicht alle einer Richtung parallel, sondern muß man mit drei Stromkomponenten  $j_x, j_y, j_z$  rechnen, so kann man sich vorstellen, daß über die magnetische Kraft, welche allein von  $j_z$  herrührt, sich noch die magnetische Kraft, die von  $j_x$  allein, und diejenige, die von  $j_y$  allein herrührt, überlagert. Man erhält also

in irgendeinem Punkte P Richtung und Größe der magnetischen Kraft durch geometrische Addition derjenigen drei Strecken, welche die Richtung und Größe der magnetischen Kraft in den betrachteten Spezialfällen darstellen, in denen nur je eine der drei Stromkomponenten vorhanden ist.

Im allgemeinen ist also die magnetische Kraft in der Oberfläche des stromführenden Körpers nicht derselben parallel. Trennt man dagegen die magnetische Kraft nach dem Schema der Gleichungen (25) auf S. 241 in zwei Teile, von denen der eine ein Potential besitzt, dagegen der andere nicht, so muß der von letzterem herrührende Teil der magnetischen Kraft in der Oberfläche des stromführenden Systems derselben parallel sein. Denn diese Oberfläche gehört dann der dreifachen Schar der Niveaulächen  $\mathfrak{B}_x' = \text{Konst.}$ ,  $\mathfrak{B}_y' = \text{Konst.}$ ,  $\mathfrak{B}_z' = \text{Konst.}$  gemeinsam an,

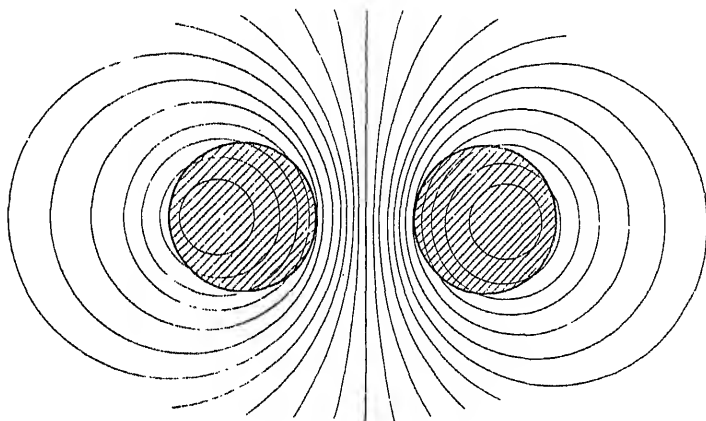


Fig. 39.

da außerhalb des stromführenden Systems die magnetische Kraft ein Potential besitzt, d. h.  $\mathfrak{B}_x' = \mathfrak{B}_y' = \mathfrak{B}_z' = 0$  zu setzen ist. In der Oberfläche des durchströmten Körpers D haben also die drei Funktionen  $\mathfrak{B}_x'$ ,  $\mathfrak{B}_y'$ ,  $\mathfrak{B}_z'$  den konstanten Wert Null; es liegt daher an der Oberfläche von D jede der drei Komponenten, aus denen sich der Teil der magnetischen Kraft zusammensetzt, welcher kein Potential besitzt, in der Oberfläche von D und folglich auch ihre Resultante. Sind z. B. die stromführenden Körper mehrere Kreiszylinder, so wird der potentiallose Anteil der magnetischen Kraftlinien in jedem derselben durch Kreise dargestellt, welche konzentrisch zu dem betreffenden Zylinder liegen, einerlei, welche Lage die anderen Zylinder zu ihm einnehmen.

## 16. Das Biot-Savartsche Gesetz.

Bezeichnet man mit  $dl$  ein Element der Strombahn, mit  $(1x)$ ,  $(1y)$ ,  $(1z)$  die Winkel, die es mit den Koordinatenachsen bildet, und mit  $(rx)$ ,  $(ry)$ ,  $(rz)$  die Winkel, die der Leitstrahl  $r$  vom Aufpunkt nach dem Element  $dl$  mit den Koordinatenachsen bildet, so kann man die Gleichungen (18) nach Ausführung der Differentiation in der Form schreiben:

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_x &= \int \frac{i dl}{r^2} [\cos(1y) \cos(rz) - \cos(1z) \cos(ry)], \\ \mathfrak{S}_y &= \int \frac{i dl}{r^2} [\cos(1z) \cos(rx) - \cos(1x) \cos(rz)], \\ \mathfrak{S}_z &= \int \frac{i dl}{r^2} [\cos(1x) \cos(ry) - \cos(1y) \cos(rx)].\end{aligned}\quad (60)$$

In dieser Form kann man die Kraftkomponenten  $\mathfrak{S}_x$ ,  $\mathfrak{S}_y$ ,  $\mathfrak{S}_z$  auffassen als Summen von Kraftkomponenten, die von den einzelnen Elementen der Strombahn ausgeübt werden, und die resultierende Gesamtkraft  $\mathfrak{S}$  als die Resultante der Kräfte, die von den Stromelementen ausgeübt werden. Anstatt gemäß (60) die Komponenten dieser Elementarkräfte zu addieren und daraus die Gesamtkraft abzuleiten, kann man auch zunächst die resultierende Elementarkraft aus den Komponenten bilden und daraus dann die Gesamtkraft als Resultante oder geometrische Summe aller Elementarkräfte ableiten. Man kommt so zu der Vorstellung eines Elementargesetzes, d. h. einer Formel, welche die elektromagnetische Wirkung eines einzelnen Stromelementes ausdrückt. Man erhält sie, indem man die unter dem Integralzeichen von (60) stehenden Ausdrücke als die Komponenten der Elementarkraft ansieht. Bezeichnet man diese Ausdrücke mit  $d\mathfrak{S}_x$ ,  $d\mathfrak{S}_y$ ,  $d\mathfrak{S}_z$ , so folgt aus (60) zunächst:

$$\begin{aligned}d\mathfrak{S}_x \cos(1x) + d\mathfrak{S}_y \cos(1y) + d\mathfrak{S}_z \cos(1z) &= 0, \\ d\mathfrak{S}_x \cos(rx) + d\mathfrak{S}_y \cos(ry) + d\mathfrak{S}_z \cos(rz) &= 0,\end{aligned}$$

d. h. die magnetische Kraft, welche das Stromelement  $dl$  auf einen Magnetpol  $P$  der Stärke 1 ausübt, liegt senkrecht zu  $dl$  und  $r$ , d. h. steht senkrecht auf der durch  $r$  und  $dl$  gelegten Ebene.

Ersetzen wir zur Abkürzung die Richtungskosinus von  $dl$  durch die Buchstaben  $p_1, p_2, p_3$ , die von  $r$  durch  $q_1, q_2, q_3$ , so folgt für die Feldstärke:

$$\begin{aligned}& \sqrt{(d\mathfrak{S}_x)^2 + (d\mathfrak{S}_y)^2 + (d\mathfrak{S}_z)^2} \\ &= \frac{idl}{r^2} \sqrt{(p_2 q_3 - p_3 q_2)^2 + (p_3 q_1 - p_1 q_3)^2 + (p_1 q_2 - p_2 q_1)^2}.\end{aligned}$$

Nun besteht aber die Identität:

$$(p_2 q_3 - p_3 q_2)^2 + \dots + \dots = (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) - (p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3)^2.$$

Bei der Bedeutung der  $p$  und  $q$  sind die beiden Faktoren des ersten Gliedes der rechten Seite 1, das zweite Glied ist das Quadrat des Kosinus des Winkels  $(1r)$ , den  $r$  mit  $dl$  einschließt. Folglich ist die ganze rechte Seite gleich  $\sin^2 (1r)$ ; es wird daher die Feldstärke

$$d\mathfrak{H} = \sqrt{(d\mathfrak{H}_x)^2 + (d\mathfrak{H}_y)^2 + (d\mathfrak{H}_z)^2} = \frac{idl}{r^2} \sin (1r). \quad (61)$$

Dies ist das von Biot und Savart aufgestellte Elementargesetz der elektromagnetischen Wirkung. Da sich einzelne Stromelemente niemals verwirklichen lassen, ist das Gesetz als solches einer experimentellen Prüfung gar nicht zugänglich. Es ist nur insofern richtig, als sich die Kraftwirkung der ganzen geschlossenen Strombahn nach dieser Formel richtig berechnen läßt. Daraus ist aber zugleich ersichtlich, daß das Gesetz nicht eindeutig bestimmt ist. Denn man könnte, ohne das Resultat einer solchen Rechnung zu ändern, dem obigen Ausdruck für die Elementarwirkung noch beliebige Glieder hinzufügen, wenn sie nur die Bedingung erfüllen, daß ihre Resultante für die geschlossene Strombahn gleich Null ist. Wenn wir daher auch die Fundamentalgesetze des Elektromagnetismus nicht in einer derartigen Formel, sondern nur in den Nahwirkungsgesetzen (14) erblicken können, so gestattet doch die Formel (61) für viele Spezialfälle eine große Bequemlichkeit der Berechnung und leistet nach dieser Richtung gute Dienste.

Das Biot-Savartsche Gesetz ist nur gültig, wenn die Magnetisierungskonstante der Umgebung des Stromes nicht wesentlich abweicht von der des durchströmten Körpers, oder wenn derselbe sehr dünn im Vergleich zu seiner Länge ist, d. h. falls er als ein linearer Strom aufzufassen ist.

## 17. Magnetische Wirkung eines Kreisstromes. Tangentenbussole.

Als Beispiel der Anwendung der Formel (61) berechnen wir die Feldstärke, die eine kreisförmige Strombahn in einem Punkt ihrer Achse hervorbringt. Dabei verstehen wir unter der Achse der Strombahn die Gerade, die im Mittelpunkt des Kreises auf der Ebene der Strombahn senkrecht steht. Wir bezeichnen (vgl. Fig. 40) mit  $r_0$  den Abstand des Aufpunktes  $P$  vom Zentrum  $C$  des Kreises, mit  $R$  den Radius des Kreises. Für alle Elemente der Strombahn ist für die angenommene Lage des Auf-

punktes der Winkel zwischen dem Stromelement und dem Leitstrahl  $r$  ein Rechter, also  $\sin(1r) = 1$ . Ferner läßt sich die elementare Feldstärke  $d\mathfrak{H}$  für jedes Element in zwei Komponenten zerlegen, von denen die eine in die Richtung der Achse  $CP$  fällt, die andere darauf senkrecht steht. Diese letzteren Komponenten aber heben sich für je zwei gegenüberliegende Elemente der Kreisbahn auf. Es bleiben nur die Komponenten  $PQ$  in Richtung der Achse übrig, die für alle Stromelemente gleich groß sind. Ihre Summe ist daher:

$$\mathfrak{H} = \frac{2\pi R i}{r^2} \sin \alpha = \frac{2\pi R^2 i}{(R^2 + r_0^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\pi i}{R \left(1 + \frac{r_0^2}{R^2}\right)^{\frac{3}{2}}}. \quad (62)$$

Ist  $r_0$  sehr groß gegen  $R$ , so geht der Ausdruck für  $\mathfrak{H}$  über in die Form  $\frac{2\pi R^2 i}{r_0^3}$ . Sie stimmt mit dem Ausdruck für die Feldstärke in

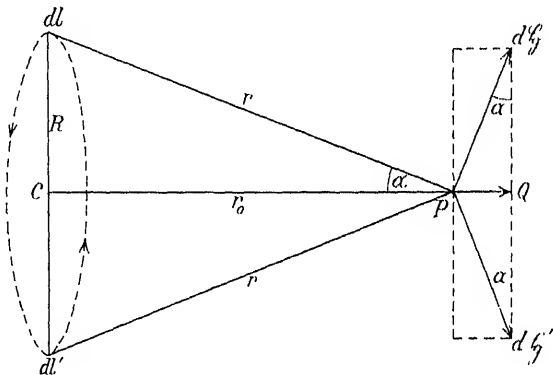


Fig. 40.

den axialen Punkten des Feldes eines Magneten überein, der das Moment  $\mathfrak{M} = \pi R^2 i$  hat und dessen Achse unendlich kurz ist ( $l = 0$ , vgl. Formel 19 in Kap. II, 14, S. 158). Das entspricht den Betrachtungen über die Äquivalenz von Strombahn und magnetischer Doppelfläche in Abschnitt 5—7 dieses Kapitels. Für sehr entfernte Punkte ist ganz allgemein die magnetische Wirkung einer kleinen vom Strom  $i$  umflossenen Fläche  $f$  identisch mit derjenigen eines kleinen Magneten vom Moment  $i f$ .

Für  $r_0 = 0$ , also für das Zentrum  $C$  des Kreises ist

$$\mathfrak{H} = \frac{2\pi i}{R}. \quad (63)$$

Steht der Kreisstrom im magnetischen Meridian, so setzen sich die Kraft  $\mathfrak{H}$  und die erdmagnetische Horizontalkraft  $H$  zu einer Resultante

zusammen, deren Winkel  $\gamma$  mit der Richtung des magnetischen Meridians gegeben ist durch die Formel:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\mathfrak{H}}{H} = \frac{2\pi i}{RH}. \quad (64)$$

Auf Grund dieser Beziehung läßt sich die Stromstärke  $i$  in absolutem elektromagnetischem Maße auswerten, indem man die Ablenkung, die der Strom  $i$  einer Magnetnadel im Zentrum einer kreisförmigen Strombahn vom Radius  $R$  erteilt, und die erdmagnetische Horizontalintensität  $H$  am Ort der Nadel ermittelt. Das Instrument, mit dem man solche Messungen ausführt, wird mit Rücksicht auf die Form der Beziehung Tangentenbussole genannt. Da die Formel (63) nur die Feldstärke im Zentrum des Kreises angibt, so gilt Formel (64) nur für eine unendlich kurze Magnetnadel. Wegen der genaueren Theorie der Tangentenbussole vergleiche man die Lehrbücher: Maxwell, Elektrizität und Magnetismus, II, S. 421; F. Neumann, Vorlesungen über elektrische Ströme, herausgegeben von K. v. d. Mühl, Leipzig 1884, S. 195; ferner F. Kohlrausch, Pogg. Ann. 141, S. 457, 1870.

## 18. Die magnetische Feldstärke im Inneren eines Solenoids.

Wir wollen uns vorstellen, daß ein elektrischer Strom der Stärke  $i'$  innerhalb einer dünnwandigen Röhre von konstantem Querschnitt  $q$  fließt. Die Dimensionen von  $q$  seien sehr klein im Vergleich zu der Länge  $l$  der Röhre. Die Stromlinien sollen senkrecht zu der Röhrenachse verlaufen. Man kann diesen Fall mit großer Annäherung dadurch realisieren, daß man isolierten Draht zu einem Solenoide aufwickelt und durch ihn den Strom leitet. Hat das Solenoid  $n$  Windungen, welche gleichmäßig auf der Länge  $l$  (in einer oder in mehreren Lagen) verteilt sind, und ist die Stromstärke in ihm gleich  $i$ , so muß diese dasselbe magnetische Feld erzeugen, als ob die Solenoidwindungen nicht voneinander isoliert wären, und es flösse in der so gebildeten Metallröhre ein zirkulärer Strom der Stärke

$$i' = ni.$$

Wenn das Solenoid die Wandung eines geraden, unendlich langen Zylinders bildete, so muß aus Symmetriegründen die magnetische Kraft in seinem Inneren parallel zu seiner Achse liegen. Dasselbe wird der Fall sein, falls sich seine Achse krümmt, solange nur die Krümmungen so gering im Verhältnis zu den Querschnittsdimensionen bleiben, daß ein endliches Stück der Länge  $l'$  der Röhre annähernd immer noch als ein gerader Zylinder angesehen werden kann, welcher sehr lang im Verhältnis zu seinen Querschnittsdimensionen ist.



Im Inneren eines nicht zu stark gekrümmten Solenoids von konstantem Querschnitt, dessen Länge  $l$  sehr groß im Vergleich zu seinen Querdimensionen ist, liegen daher die magnetischen Kraftlinien alle annähernd parallel zur Solenoidachse. Die Kraftlinien schließen sich, indem sie aus den Solenoidenden austreten und durch den Außenraum laufen. Dort müssen sie viel weniger dicht verlaufen als im Innenraum des Solenoids, da dessen Querschnitt  $q$  sehr klein ist. Der magnetische Widerstand (siehe II, 26) der Kraftröhren des Außenraumes ist daher sehr viel kleiner als der des Innenraumes, da der Querschnitt der Kraftröhren im ersteren viel größer ist als im letzteren. Vernachlässigt man den magnetischen Widerstand des Außenraumes, so wird der ganze magnetische Widerstand nach Formel (44) auf S. 184:

$$\omega_m = \frac{l}{q}, \quad (65)$$

die Kraftlinienzahl daher nach (45) auf S. 184, da die magnetomotorische Kraft  $A$  gleich  $4\pi i' = 4\pi ni$  ist:

$$N = \frac{A}{\omega_m} = \frac{4\pi niq}{l}, \quad (66)$$

daher die Feldstärke im Inneren des Solenoids:

$$\mathfrak{H} = \frac{N}{q} = \frac{4\pi ni}{l}. \quad (67)$$

Dieselbe ist innerhalb des Querschnittes  $q$  konstant, da dieselbe Formel für  $\mathfrak{H}$  sich aus der Betrachtung jeder im Solenoid liegenden Kraftröhre vom Querschnitt  $dq$  ergibt. Ebenfalls ist auch  $\mathfrak{H}$  längs der Achse des Solenoids konstant, wie schon daraus folgt, daß die Kraftröhren im Solenoid konstanten Querschnitt besitzen.

Ist die Länge des Solenoids nicht sehr groß im Vergleich zu seinen Querdimensionen, so kann man die magnetische Feldstärke für einen Punkt der Achse leicht aus Formel (62) durch eine Integration über die ganze Länge des Solenoids berechnen, indem man sich das ganze Solenoid als eine Aufreihung von gleichen Kreisströmen auf einer gemeinsamen Achse denkt. Bezeichnet man die Zahl der Windungen, die auf 1 cm der Länge des Solenoids enthalten ist, also die Größe  $n/l$  mit  $n_1$ , und nimmt man die Achse des Solenoids als X-Achse, so ist die Feldstärke in einem beliebigen Punkte P der Achse:

$$\mathfrak{H} = 2\pi Ri \int \frac{\sin \alpha \cdot n_1 dx}{r^2};$$

dieses Integral erstreckt über die Länge des Solenoids. Nun ist  $x$ , gerechnet von P an, identisch mit dem im vorigen Abschnitt benutzten Zeichen  $r_0$  und es bestehen die Beziehungen:

$$x = r_0 = R \cdot \operatorname{ctg} \alpha \quad \text{und} \quad r = \frac{R}{\sin \alpha}.$$

Berücksichtigt man diese Gleichungen, so erhält man für  $\mathfrak{H}$  unmittelbar den Ausdruck:

$$\mathfrak{H} = 2 \pi i n_1 (\cos \alpha_0 - \cos \alpha_1), \quad (68)$$

wenn  $\alpha_0$  und  $\alpha_1$  die Werte bedeuten, die der Winkel  $\alpha$  (siehe Fig. 40) im Punkte P der Spulenachse für die nach den Endquerschnitten der Spule gezogenen Radien annimmt. Ist  $a$  der Abstand des Punktes P von dem einen Ende der Spule, so ist

$$\mathfrak{H} = 2 \pi i n_1 \left( \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}} + \frac{1-a}{\sqrt{R^2 + (1-a)^2}} \right). \quad (69)$$

In der Mitte einer solchen Spule ( $a = \frac{1}{2}$ ) hat also die Feldstärke den Wert:

$$\mathfrak{H} = 4 \pi i n_1 \frac{1}{\sqrt{1^2 + 4 R^2}} = \frac{4 \pi i n}{\sqrt{1^2 + 4 R^2}}, \quad (70)$$

im Endquerschnitt ( $a = 0$  oder  $= 1$ ) den Wert:

$$\mathfrak{H} = 2 \pi i n_1 \frac{1}{\sqrt{1^2 + R^2}} = \frac{2 \pi i n}{\sqrt{1^2 + R^2}}.$$

Daraus ist ersichtlich, daß der Wert, den Formel (67) angibt, nur gültig ist unter der Bedingung, daß  $R^2$  gegen  $1^2$  zu vernachlässigen ist. Daß aber auch in diesem Falle die Kraft nicht längs der ganzen Achse des Solenoides konstant ist, ersieht man daraus, daß die Kraft im Endquerschnitt, wenn  $R$  klein gegen  $1$  ist, annähernd nur halb so groß ist wie in der Mitte. Doch konzentriert sich dieser Abfall der Kraft um so mehr nach dem Ende hin, je kleiner das Verhältnis  $R^2/1^2$  ist.

Wenn dagegen die Enden des Solenoids zusammenfallen, dasselbe sich also ringförmig schließt, und die Kraftlinien gar nicht aus dem Innenraum heraustreten, dann gilt die Formel (65) und daher auch (67) in aller Strenge. Im Außenraum ist in diesem Falle die magnetische Kraft gleich Null, weil für jede im Außenraum verlaufende geschlossene Kurve die magnetomotorische Kraft verschwindet.

Zwei ringförmig geschlossene Solenoide wirken daher nicht ponderomotorisch aufeinander, da jedes sich außerhalb des Magnetfeldes des anderen befindet. Dieser Satz gilt jedoch nur, wenn die Stromstärke in den Solenoiden konstant, d. h. von der Zeit unabhängig ist. Bei schnell wechselnden Stromstärken müssen ponderomotorische Wirkungen eintreten, wie weiter unten im Abschnitt 7 des VII. Kapitels des näheren ausgeführt wird. Es ist dieses eine Folgerung der Maxwell'schen Theorie, während die älteren Theorien, welche die Ampèreschen elektro-

dynamischen Gesetze (vgl. weiter unten im Kapitel IV) unverändert auch auf Wechselströme übertrugen, folgerten, daß zwei ringförmig geschlossene Solenoide nie aufeinander einwirken könnten.

Zwei geöffnete Solenoide müssen aufeinander wie zwei Magnetstäbe wirken, welche Pole an ihren Enden besitzen. Denn die magnetischen Kraftlinien treten wesentlich nur aus den Enden der Solenoide aus, wenn sie hinreichend lang und dünn sind. Da in diesem Falle der magnetische Widerstand für die durch den elektrischen Strom des einen Solenoids hervorgerufenen Kraftströme wesentlich nur im Inneren dieses Solenoids liegt und nahezu unabhängig von der Lage des anderen Solenoids ist, wenn auch der elektrische Strom des letzteren den Kraftlinienverlauf des ersteren etwas modifiziert, so ist auch die in jedem Solenoid erzeugte Kraftlinienzahl unabhängig von der gegenseitigen Lage der Solenoide. Dieselben wirken daher aufeinander wie zwei permanente Magnetstäbe, deren Polstärken nach (66) gegeben sind durch

$$m = \frac{N}{4\pi} = \frac{niq}{1}. \quad (71)$$

So ergibt sich für ein Solenoid von  $q = 1$  qcm Querschnitt, welches 10 Windungen pro Zentimeter Länge enthält, und in welchem ein Strom  $i$  von der Stärke 1 Amp. fließt ( $i = 1/10$ ), die Polstärke  $m = 1$  in absolutem cgs-System.

Die bisherigen Betrachtungen bezogen sich auf den Fall, daß die Solenoide in einem Medium der Magnetisierungskonstante  $\mu = 1$  lagern, d. h. im freien Äther (oder auch in Luft).

In jedem Fall muß die Zahl  $N$  der Induktionslinien eines Magnetfeldes, welches durch konstante Ströme hervorgebracht wird, wachsen, falls an irgendeiner Stelle Eisen in das Feld gebracht wird. Denn dadurch wird der magnetische Widerstand des ganzen Feldes in jedem Falle verringert, während die magnetomotorische Kraft  $A$  des Feldes ungedändert bleibt, da sie sich allein aus den Stromstärken bestimmt. Es muß daher  $N$  nach dem Gesetze des magnetischen Kreislaufes wachsen. Die äquivalente Polstärke eines nicht sehr dünnen und langen Solenoids muß also auch zunehmen, wenn Eisen in den Außenraum desselben gebracht wird. Die Verringerung des magnetischen Widerstandes und daher die Vermehrung des  $N$  ist aber um so bedeutender, je größer ursprünglich der Widerstand des Feldes an derjenigen Stelle war, an welche man das Eisenstück bringt, d. h. je kleiner dort der Querschnitt der Kraftströme war, mit anderen Worten, je dichter dort die Kraftlinien lagen. Daher ist die Vermehrung von  $N$ , d. h. der äquivalenten Polstärke eines Solenoids, nur bedeutend, falls Eisen in sein Inneres gebracht wird.

Ist das Innere eines Solenoids mit Eisen der Permeabilität  $\mu$  an-

gefüllt, so ist der magnetische Widerstand  $\omega_m$  der Formel (65) durch  $\mu$  zu dividieren, falls das Solenoid so lang und dünn ist, daß immer noch der magnetische Widerstand des Innenraums, selbst wenn er einen Eisenkern enthält, sehr groß ist gegen den des Außenraumes. Die Polstärke  $m$  des Solenoids nach Formel (71) wird daher durch den Eisenkern  $\mu$ -mal größer. Hierauf beruht die starke Wirkung der sogenannten Elektromagnete, indem durch den Eisenkern die Feldstärke im Außenraum  $\mu$ -mal größer wird. Im Innenraum dagegen bleibt sie dieselbe.

Die Zahl der Indikationslinien im Inneren des Solenoids ist jetzt nach (66):

$$N = \frac{4 \pi \mu n i q}{l}. \quad (72)$$

Diese Formel gilt wiederum streng, wenn das Solenoid ringförmig geschlossen ist.

Wenn der Eisenkern nicht den ganzen Querschnitt  $q$  des Solenoidinneren ausfüllt, sondern wenn er den kleineren Querschnitt  $q'$  besitzt, so ist der magnetische Widerstand desselben:

$$\omega_m' = \frac{l}{\mu q'},$$

daher die Induktionslinienzahl im Eisenkern:

$$N' = \frac{A}{\omega_m'} = \frac{4 \pi \mu n i q'}{l}.$$

Der magnetische Widerstand des Luftraumes im Solenoid ist:

$$\omega_m^0 = \frac{l}{q - q'},$$

daher seine Kraftlinienzahl:

$$N^0 = \frac{A}{\omega_m^0} = \frac{4 \pi n i (q - q')}{l}.$$

Die gesamte Anzahl der Kraftlinien, welche im Solenoid vorhanden sind, ist also:

$$N = N' + N^0 = \frac{4 \pi n i}{l} [q + (\mu - 1) q']. \quad (73)$$

## 19. Die magnetometrische Methode zur experimentellen Bestimmung der Magnetisierungskonstanten.

Die Eigenschaft eines stromdurchflossenen Solenoids, ein nahezu gleichförmiges Magnetfeld in seinem Innenraum zu besitzen, kann man dazu benutzen, um auf einem einfachen Wege die Permeabilität  $\mu$  zu ermitteln. Wenn man nämlich in ein Solenoid, welches hinreichend

lang ist, um auf eine große Länge eine konstante Feldstärke  $\mathfrak{H}$  im Inneren zu besitzen, einen Eisenstab steckt, welcher sehr lang im Vergleich zu seinen Querdimensionen, jedoch kürzer als das Solenoid ist, so daß der Eisenstab nur in Orte konstanter Feldstärke gebracht wird, so hat die Feldstärke auch im Eisenstab den Wert (67), da die entmagnetisierenden Wirkungen (vgl. oben S. 177) der Enden des Eisenstabes zu vernachlässigen sind, wenn er genügend dünn und lang ist. Ist daher sein Querschnitt  $q'$ , so ist die Zahl der Induktionslinien im Eisenstab:

$$N' = \mu \cdot \mathfrak{H} \cdot q'.$$

Ohne Eisenstab ist die Kraftlinienzahl des vom Eisenstab eingenommenen Volumens  $v$ :

$$N^0 = \mathfrak{H} \cdot q'.$$

Daher tritt durch den Eisenstab eine Vermehrung der Induktionslinienzahl jenes Raumes  $v$  ein, welche ist:

$$N' - N^0 = \mathfrak{H} (\mu - 1) q'.$$

Die Einführung des Eisenstabes muß also denselben Effekt haben, als ob seine Enden die Polstärken

$$\pm m = \frac{N' - N^0}{4\pi} = \mathfrak{H} \cdot q' \cdot \frac{\mu - 1}{4\pi} = \mathfrak{H} q' \kappa$$

besäßen, also der ganze Stab das magnetische Moment

$$\mathfrak{M} = m l = \mathfrak{H} q' l \kappa$$

oder die Magnetisierung

$$\mathfrak{J} = \frac{\mathfrak{M}}{q' l} = \kappa \mathfrak{H}$$

besäße. Diese Formel entspricht der Formel (37) im Kapitel II, S. 179 für den Fall eines unendlich langen Stabes, für den der Entmagnetisierungsfaktor  $L = 0$  ist. Man kann aber der zu untersuchenden Substanz auch die Gestalt eines verlängerten Rotationsellipsoides geben, das sich ja in einem gleichmäßigen Felde ebenfalls gleichmäßig magnetisiert (siehe II, 24). Nur muß die Suszeptibilität  $\kappa$  dann mit Hilfe der vollständigen Formel (37) von Kapitel II, d. h. unter Berücksichtigung des Entmagnetisierungsfaktors berechnet werden. Dazu ist außer den Dimensionen des magnetisierten Körpers, die zur Ermittlung seines Volumens und des Entmagnetisierungsfaktors dienen, nur die Kenntnis der magnetisierenden Feldstärke  $\mathfrak{H}$  und des induzierten Momentes  $\mathfrak{M}$  erforderlich. Erstere läßt sich aus der Stromstärke und der Windungszahl des Solenoids berechnen. Letztere wird nach der in Kapitel II, Abschnitt 14 und 15 behandelten magnetometrischen Methode gemessen. Dabei läßt sich der schon in Kapitel II, Abschnitt 24 erwähnte Kunstgriff der Kompensation des magnetisierenden Feldes am Orte der Magnetometernadel sehr

leicht ausführen. Man braucht zu diesem Zwecke nur eine zweite Spule, die von demselben Strom wie die Magnetisierungsspule durchflossen wird, so aufzustellen, daß ihre Wirkung auf das Magnetometer diejenige der leeren Magnetisierungsspule gerade aufhebt. Die Ablenkungen der Magnetometernadel sind dann ausschließlich durch das induzierte Moment des magnetisierten Körpers bedingt. Der auf die beschriebene Weise bestimmte Wert von  $\alpha$  oder  $\mu$  ist bei ferromagnetischen Stoffen der Integralwert (vgl. II, 31). Bei schrittweiser Veränderung der magnetisierenden Stromstärke läßt sich aber auch die ganze Magnetisierungskurve (II, 30) und die Hysteresisschleife (II, 33) eines ferromagnetischen Materials nach dieser Methode aufnehmen<sup>1)</sup>.

## 20. Ampères Theorie des induzierten und permanenten Magnetismus.

Die Betrachtungen dieses Kapitels haben die Uebereinstimmung gezeigt, die in bezug auf die Gestalt des äußeren Feldes zwischen permanenten, gleichförmig magnetisierten Magnetstäben und stromdurchflossenen Solenoiden besteht. Auf Grund dieser Uebereinstimmung der äußeren Wirkungen liegt es nahe, die Erscheinungen des Magnetismus überhaupt auf diejenigen der elektrischen Ströme zurückzuführen. Dieser Gedanke ist zuerst von Ampère durchgeführt worden. Es geht aber offenbar nicht an, den Magnet als Ganzes für ein Solenoid zu erklären, in der Weise, daß man sich elektrische Ströme in seiner Oberfläche zirkulierend dächte. Eine solche Auffassung würde nur den äußeren Wirkungen, aber nicht den Erfahrungen über die innere Struktur der Magnete Rechnung tragen. Diese haben, wie wir in II, 12 und 13 gesehen haben, zu der Vorstellung geführt, daß die Magnete aus Molekularmagneten aufgebaut seien. Dem Dipol des Molekularmagneten aber ist nach Abschnitt 5 und 6 dieses Kapitels elektromagnetisch ein unendlich kleines stromumflossenes Flächenelement äquivalent. Auf dieser Grundlage hat Ampère die Hypothese entwickelt, daß die Magnetisierung der Körper auf der Existenz sehr kleiner in sich geschlossener Ströme beruhe, die innerhalb der Moleküle verliefen. Diese Ströme können beim Akt der Magnetisierung nicht erzeugt werden. Denn wir werden im V. Kapitel sehen, daß diejenigen Ströme, die beim Einbringen einer Substanz in ein magnetisches Feld in der Substanz, bzw. in ihren Molekülen erzeugt werden könnten, immer so verlaufen, daß sie der

<sup>1)</sup> Wegen weiterer Einzelheiten vergleiche man: Ewing, *Magnetic induction in iron and other metals*, London 1892, deutsch übersetzt von Holborn und Lindbeck, Berlin und München 1892; ferner H. du Bois, *Magnetische Kreise, deren Theorie und Anwendung*, Berlin und München 1894.

Substanz ein diamagnetisches Verhalten aufprägen würden (siehe Webers Theorie des Diamagnetismus, V, 9). Will man das Verhalten para- und ferromagnetischer Substanzen mit Hilfe der Vorstellung von Molekularströmen erklären, so muß man notgedrungen diese Ströme als dauernd existierend annehmen. Sie müssen in den Molekülen dauernd kreisen, ohne an Stärke je abzunehmen, eine Vorstellung, die für Ströme, die von Molekül zu Molekül durch die Materie hindurchgehen, nach unseren Erfahrungen über den Widerstand, den solche Ströme finden, gewiß nicht annehmbar sein würde, die aber für Ströme innerhalb der Moleküle diesen Bedenken nicht unterliegt. Der unmagnetische Zustand würde dann dadurch gegeben sein, daß die Achsen dieser Molekularströme gänzlich ungeordnet im Raum verteilt sind. Durch eine äußere magnetische Kraft — z. B. wenn der Körper in ein stromdurchflossenes Solenoid geschoben wird — werden Richtkräfte auf die Molekularströme ausgeübt, durch die sie je nach dem Grade ihrer Beweglichkeit mehr oder weniger gleich gerichtet werden. Dann lagern sich über die Kraftlinien des magnetisierenden Feldes noch Komponenten der Kraftlinien der mehr oder weniger gleich gerichteten Molekularströme. Die Kraftlinien erscheinen daher in der Substanz verdichtet, wie es in hohem Maße bei den ferromagnetischen, in sehr geringem Maße aber auch bei den paramagnetischen Substanzen der Fall ist.

Diese Ampèresche Vorstellung erklärt die Erscheinung des induzierten Magnetismus. Sie erklärt auch diejenige des remanenten Magnetismus, wenn man noch die weitere Hypothese hinzunimmt, daß die Molekularströme mit einer gewissen Zähigkeit ihre Lage festhalten, falls sie nicht durch eine größere äußere magnetische Kraft daran verhindert werden. Sie bleiben dann teilweise in ihrer abgelenkten Lage, auch wenn die äußere magnetische Kraft wieder entfernt wird (vgl. II, 35). Im Stahl ist diese Zähigkeit eine größere als im Schmiedeeisen, dagegen zeichnet sich letzteres durch eine große Permeabilität, d. h. durch eine größere Dichtigkeit der drehbaren Molekularströme vor ersterem aus.

## 21. Die magnetische Energie eines linearen Stromes.

Wir haben im Abschnitt 25 des II. Kapitels Ausdrücke für die Energie des Feldes permanenter Magnete aufgestellt. Wir wollen die gleichen Betrachtungen nunmehr für das magnetische Feld eines elektrischen Stromes durchführen, wollen sie jedoch zunächst auf den Fall beschränken, daß wir es mit einem linearen elektrischen Strom zu tun haben; dann hat das Wirbelgebiet, in dem die magnetischen Kräfte kein Potential haben, einen unendlich kleinen Rauminhalt, da es ein Ring von unendlich kleinem Querschnitt ist. In diesem Falle können

wir uns den Strom in seiner magnetisierenden Wirkung ersetzt denken durch eine magnetische Doppelfläche, deren Randkurve die Strombahn ist. Auf diese Verteilung von Magnetismus aber können wir unmittelbar die Formel (38) des II. Kapitels anwenden, um die potentielle Energie des Feldes zu berechnen.

Wir wollen zunächst annehmen, es sei die Größe der von dem geschlossenen Strom  $i$  umgrenzten Fläche  $s$  sehr klein; sie habe den Wert  $ds$ . Nach Abschnitt 8 dieses Kapitels ist das Moment der Doppelfläche gleich  $i \mu$ , wenn  $i$  die Stärke des Stromes und  $\mu$  die Permeabilität des den Strom umgebenden Mediums ist. Man hat also auf beiden Seiten von  $ds$  in der gegenseitigen Entfernung  $dn$  die magnetischen Belegungen  $\pm i \mu \frac{ds}{dn}$  anzubringen. Bezeichnet dann  $\varphi_+$  das Potential der magnetischen Kraft auf der positiven Seite von  $ds$ , d. h. derjenigen Seite, auf welcher die positive Belegung anzubringen ist,  $\varphi_-$  das Potential der magnetischen Kraft auf der negativen Seite, so ist die potentielle Energie  $dU$  der magnetischen Doppelfläche  $ds$  nach Formel (38), S. 180:

$$dU = \frac{1}{2} i \mu \frac{ds}{dn} (\varphi_+ - \varphi_-).$$

Nun ist  $\varphi$  eine stetige Funktion des Ortes. Dies würde zwar nicht der Fall sein, wenn  $ds$  wirklich eine magnetische Doppelfläche wäre und  $i$  nicht flösse; in unserem Falle aber, wo  $i$  fließt und  $ds$  tatsächlich keine besonderen Eigentümlichkeiten vor irgendeiner anderen Fläche  $ds'$  besitzt, welche vom Strom umgrenzt ist, muß  $\varphi$  auch beim Durchgang durch  $ds$  stetig sein. Es ist daher

$$\varphi_+ = \varphi_- + \frac{\partial \varphi}{\partial n} dn,$$

falls  $dn$  positiv gerechnet ist beim Durchgang von der negativen zur positiven Seite von  $ds$ , d. h. falls  $n$  die auf der positiven Seite der Fläche errichtete Normale bedeutet, um deren positive Richtung der Strom in dem nach Abschnitt 10 (S. 233) definierten positiven Drehungssinne kreist (vgl. Fig. 41).

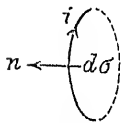


Fig. 41.

Durch Einsetzen der letzten Beziehung in obige Gleichung für  $dU$  folgt:

$$dU = \frac{1}{2} i \mu ds \frac{\partial \varphi}{\partial n} = - \frac{1}{2} i ds \mu \mathfrak{G}_n = - \frac{1}{2} i ds \mathfrak{B}_n. \quad (74)$$

Nun ist  $dU$  nach der Bedeutung, in der wir den Begriff der potentiellen Energie in den früheren Kapiteln benutzt haben, diejenige Funktion, die bei einer Konfigurationsänderung des Systems durch ihre Abnahme die von den magnetischen Kräften geleistete Arbeit angibt;



und umgekehrt, eine äußere Arbeit, die gegen die inneren Kräfte des Systems geleistet wird, bewirkt eine Zunahme der Funktion  $dU$ . Für einen elektrischen Strom folgt dann aus dem negativen Vorzeichen in Formel (74), daß bei einer Konfigurationsänderung des Systems die Arbeit der magnetischen Kräfte durch die Zunahme des auf der rechten Seite stehenden Ausdruckes gemessen wird, und daß jede Arbeit gegen die magnetischen Kräfte des Systems eine Abnahme des Ausdruckes  $\frac{1}{2} id\mu \oint \mathfrak{H}_n$  bedingt. Man bezeichnet den positiven Wert dieses Ausdruckes als die magnetische Energie  $dT$  des elektrischen Stromes. Nach Formel (74) ist sie also definiert durch den Satz: Die magnetische Energie  $dT$  des Stromes ist gleich dem halben Produkt aus seiner Stromstärke in den von dem Strom erzeugten Induktionsfluß durch  $ds$ , d. h. in die Anzahl der in die negative Seite der Stromfläche  $ds$  eintretenden, von dem Strom erzeugten Induktionslinien.

Es gilt zunächst zu beweisen, daß dieser Ansatz für die magnetische Energie des elektrischen Stromes für die gesamte in dem Felde aufgespeicherte Energie und für die Energie der Volumeneinheit zu den gleichen Ausdrücken führt, die wir in Abschnitt 25, Kapitel II, für das magnetostatische Feld entwickelt haben.

Zuvörderst ist darauf aufmerksam zu machen, daß der obige Satz nicht bloß gilt, falls die Stromfläche  $ds$  unendlich klein ist, sondern auch, falls sie eine endliche Größe  $s$  besitzt; denn man kann in diesem Falle den Strom bestehend denken aus einer Anzahl aneinander liegender Elementarströme, deren jeder nur ein kleines Stück  $ds$  aus  $s$  ausschneidet. Die Wirkung der Stromteile, welche im Inneren von  $s$  liegen, hebt sich auf, da an jeder Stelle im Inneren von  $s$  zwei Stromstücke mit entgegengesetzten Stromrichtungen aneinander grenzen, so daß nur die Wirkung derjenigen Stromteile übrigbleibt, welche auf dem Rande von  $s$  liegen. Die Formel (74) ergibt daher für die magnetische Energie eines beliebig ausgedehnten linearen Stromes die Formel:

$$T = \frac{1}{2} i\mu \int ds \cdot \mathfrak{H}_n = \frac{1}{2} i\mu \int [\mathfrak{H}_x \cos(nx) + \mathfrak{H}_y \cos(ny) + \mathfrak{H}_z \cos(nz)] ds. \quad (75)$$

Wir können die Betrachtungen ferner leicht auf den Fall verallgemeinern, daß die Permeabilität  $\mu$  nicht überall denselben Wert besitzt. Die Formel (74) gibt nämlich den Wert der Energie eines geschlossenen Elementarstromes auch in dem Falle an, in welchem in benachbarten Raumteilen  $\mu$  einen anderen Wert hat als in demjenigen Raumteil, welcher den Strom umgibt. Denn derselbe muß nach Abschnitt 8 dieses Kapitels (S. 230) hinsichtlich seiner magnetischen Wir-

kung stets durch die einer magnetischen Doppelfläche vom Moment  $\mu i$  ersetzbar sein, wobei  $\mu$  den Wert der Permeabilität bezeichnet in demjenigen Raumteil, welcher den Elementarstrom umgibt. Für inhomogene Medien ist daher die Formel (75) zu verallgemeinern in:

$$T = \frac{1}{2} i \int [\mathfrak{B}_x \cos (nx) + \mathfrak{B}_y \cos (ny) + \mathfrak{B}_z \cos (nz)] ds, \quad (75')$$

wobei  $\mu$  den Wert der Permeabilität an derjenigen Stelle der Fläche  $s$  bedeutet, an welcher ihr Element  $ds$  liegt.

Der Satz, daß die magnetische Energie eines linearen Stromes gleich dem halben Produkt seiner Stromstärke in die Anzahl der vom Strom erzeugten Induktionslinien ist, bleibt also auch für inhomogene Medien gültig.

Nun ist  $4\pi i$  gleich der Arbeit, welche die Kräfte des Systems leisten, wenn ein Pol der Stärke 1 von einem Punkte  $P$  der positiven Seite von  $ds$  zu einem gegenüberliegenden  $P'$  auf der negativen Seite geführt wird, d. h. gleich der Abnahme  $\varphi_+ - \varphi_-$  des Potentials.

Setzt man daher den Wert

$$i = \frac{1}{4\pi} (\varphi_+ - \varphi_-)$$

in die Formel (75') ein und ersetzt man wieder  $\mathfrak{B}_n$  durch  $-\mu \frac{\partial \varphi}{\partial n}$ , so entsteht

$$T = -\frac{1}{8\pi} \int \mu (\varphi_+ - \varphi_-) \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds. \quad (75'')$$

Denken wir uns den Raum durch die von der Strombahn begrenzte Fläche  $s$  aufgeschnitten, so ist  $\varphi$  in dem ganzen Raum eindeutig und stetig und hat nur zu beiden Seiten der Trennungsfäche  $s$  die sprunghaft verschiedenen Werte  $\varphi_+$  und  $\varphi_-$ . Dagegen hat  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$  zu beiden Seiten von  $ds$  denselben Wert; denn die magnetische Kraft geht stetig durch die Fläche hindurch. Dabei geht die positive Richtung  $n$  von der negativen zur positiven Seite von  $ds$ . Rechnet man nun für die negative Seite von  $ds$  die Richtung von  $n$  im umgekehrten Sinne, d. h. rechnet man die positive Normalenrichtung für beide Seiten der Fläche in den Raum hinein, so kann man das obige Integral als eine Summe von zwei Integralen auffassen, von denen das eine über die positive, das andere über die negative Seite der Fläche zu erstrecken ist. Betrachten wir also beide Seiten der Fläche als Grenzflächen des Raumes, so kann das Integral zusammengefaßt in der Form geschrieben werden:

$$T = -\frac{1}{8\pi} \int \mu \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds. \quad (75''')$$

Hierzu kann man das gleiche Integral genommen über die unendlich ferne Kugelfläche hinzunehmen, da es aus den gleichen Gründen, wie in ähnlichen, früher erörterten Fällen, gleich Null ist. Der ganze Raum kann dann als begrenzt angesehen werden einerseits von den beiden Seiten der Fläche  $s$ , andererseits von der unendlich fernen Kugel, und die Summe der Oberflächenintegrale läßt sich mittels bekannter Kunstgriffe in ein Integral über den eingeschlossenen Raum verwandeln. Da nämlich die Identität besteht:

$$\int \mu \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 dv = \int \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dv - \int \varphi \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dv,$$

so erhalten wir, falls  $\mu$  stetig variiert und damit auch  $\varphi$  sowie seine ersten Differentialquotienten, sowie unter der Annahme, daß auch  $\mu$  eine eindeutige Funktion des Ortes ist, unter Anwendung des Gaußschen Satzes (I, 15, S. 32):

$$\begin{aligned} \int \mu \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] dv &= - \int \mu \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds \\ - \int \varphi \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right] dv, \end{aligned}$$

wobei  $n$  in derselben Richtung, d. h. in den Raum hineinweisend, gewählt ist, wie in der Formel (75'''). Da nun aber  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \mathfrak{G}_x$  und  $\mu \mathfrak{G}_x = \mathfrak{B}_x$  usw. ist, so verschwindet das Raumintegral der rechten Seite obiger Gleichung gemäß der Gleichung (6') in II, 22 und in Abschnitt 3 dieses Kapitels. Die Formel (75''') geht also über in:

$$\begin{aligned} T &= + \frac{1}{8\pi} \int \mu \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] dv \\ &= \frac{1}{8\pi} \int \mu (\mathfrak{G}_x^2 + \mathfrak{G}_y^2 + \mathfrak{G}_z^2) dv = \frac{1}{8\pi} \int \mu \mathfrak{G}^2 dv. \end{aligned} \quad (76)$$

Das Integral (76) ist über den ganzen Raum zu erstrecken, da die beiden Seiten von  $ds$ , über welche das Integral (75''') zu erstrecken ist, unendlich nahe oder eigentlich ganz zusammenfallen sollen.

Wir können stets annehmen, daß die Permeabilität  $\mu$  eine stetige Funktion des Ortes ist, selbst wenn zwei Medien mit verschiedenen  $\mu$  aneinander grenzen, da in ihrer Uebergangsschicht ein stetiger Uebergang von  $\mu$  erfolgt. Aber auch wenn man diese Annahme nicht machen wollte, sondern eine Diskontinuität von  $\mu$  an einer solchen Grenzfläche  $F$  zulassen will, so ergibt die Anwendung obiger Umformung der Formel (75''')

auf diejenigen Räume, innerhalb welcher  $\mu$  stetig (oder konstant) ist, daß (75''') gleich ist dem Ausdruck:

$$+ \frac{1}{8\pi} \int \mu \mathfrak{H}^2 dv + \frac{1}{8\pi} \Sigma \int \mu \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dF,$$

wobei das Flächenintegral über die Grenzflächen  $F$  zu nehmen ist. Da nun jedes Element  $dF$  mit den zwei Summanden multipliziert ist:

$$- \frac{1}{8\pi} \left[ \mu_1 \varphi_1 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_1 + \mu_2 \varphi_2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_2 \right],$$

wobei sich die Indices 1, 2 auf die beiden Seiten von  $dF$  beziehen, und da  $\varphi$  stetig durch  $F$  hindurchgeht, d. h.  $\varphi_1 = \varphi_2$  ist, da ferner  $n_1$  entgegengesetzt gerichtet wie  $n_2$  ist, also nach (24), S. 167

$$\mu_1 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_1 + \mu_2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_2 = 0$$

ist, so verschwindet der Faktor von  $dF$ , d. h. alle über die Flächen  $F$  zu erstreckenden Integrale. Es bleibt daher auch in diesem Falle die Formel (76) für die magnetische Energie des Feldes bestehen.

In Gleichung (76) ist die magnetische Energie des linearen Stromes durch dasselbe Raumintegral dargestellt, das wir bereits für die Energie des magnetostatischen Feldes entwickelt hatten. Hier wie dort würden wir von dieser Darstellung gewisse Räume des Magnetfeldes, dort den Raum, den der permanente Magnet einnimmt, hier den Raum, der vom Strome erfüllt ist, zunächst auszuschließen haben. Indem wir aber die Strombahn als unendlich dünn annehmen, können wir das Integral in dem vorliegenden Falle über den ganzen Raum erstreckt denken. Entsprechend den früher entwickelten Anschauungen können wir also auch im elektromagnetischen Felde die Energie als mit einer gewissen Dichte durch den ganzen Raum verteilt ansehen, und der Wert der Energiedichte, d. h. des Energieinhaltes der Raumeinheit ist, wie in Kapitel II, S. 183, durch die Formel bestimmt:

$$T_0 = \frac{1}{8\pi} \mu \mathfrak{H}^2 = \frac{1}{8\pi\mu} \mathfrak{B}^2 = \frac{1}{8\pi} \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{H}. \quad (77)$$

## 22. Die magnetische Energie beliebig vieler linearer Ströme.

Sind beliebig viele lineare Ströme vorhanden, so kann jeder durch eine magnetische Doppelfläche ersetzt werden und die Anwendung der Formel (38) des II. Kapitels auf die Gesamtheit dieser Flächen führt zu einer Formel für die magnetische Energie, die sich einfach als eine Summe von Integralen über die einzelnen Flächen darstellt:

$$T = \Sigma \frac{1}{2} \int i \mu \mathfrak{S}_n ds. \quad (78)$$

Auf jedes dieser Integrale lassen sich die Betrachtungen des vorigen Abschnittes anwenden. Jede der Flächen kann mit ihren beiden Seiten als Grenzfläche des Raumes angesehen werden und die Summe aller Integrale über diese Grenzflächen kann in ein einziges Raumintegral verwandelt werden, das einfach die Form der Gleichung (76) hat.

Für das Verständnis der Formel (78) ist zu beachten, daß  $\mu \mathfrak{S}_n ds$  hier für jede Fläche nicht mehr den Induktionsfluß bedeutet, den der die Fläche umkreisende Strom durch die Fläche hindurchsendet, sondern den gesamten Induktionsfluß, den alle Ströme durch die Fläche  $s$  hindurch erzeugen. Bedeutet also  $N$  allgemein die Zahl der vom Strom  $i$  umschlungenen Induktionslinien, so kann man schreiben:

$$T = \frac{1}{2} \Sigma i N. \quad (79)$$

Man kann die durch die Fläche hindurchgehende Komponente des Induktionsflusses als Summe von Beträgen darstellen, die von den einzelnen Stromkreisen herrühren:

$$N = \Sigma N_i.$$

Dann ist  $\frac{1}{2} i_k N_k$  diejenige magnetische Energie, die dem von dem  $k^{\text{ten}}$  Stromkreis allein erzeugten magnetischen Felde zukommt. Die Gesamtenergie kann man dann durch die Formel ausdrücken:

$$T = \frac{1}{2} \Sigma i_k N_k + \frac{1}{2} \Sigma i_k \Sigma N_i, \quad (80)$$

indem man den Summanden  $N_k$  aus der Summe über  $N_i$  heraussondert, die letzte Summe in (80) also ohne den Summanden  $N_k$  rechnet. Der erste Summand in der Formel (80) stellt dann die Summe der Einzelenergien aller Stromkreise dar, der zweite die aus der Uebereinanderlagerung der Felder hervorgehende wechselseitige Energie der Stromkreise.

### 23. Die magnetische Energie im allgemeinsten Falle.

Im allgemeinsten Falle besitzt das magnetische Feld Wirbelräume d. h. elektrische Ströme von gewissem endlichen Rauminhalt. Es ist noch die Frage zu entscheiden, wie sich die magnetische Energie des ganzen Feldes darstellt unter Berücksichtigung der in den Wirbelräumen bestehenden magnetischen Felder. Die magnetischen Kräfte sind durch die Formeln (14) der S. 232 mit den Stromkomponenten verknüpft. Man kann andererseits die magnetischen Kräfte, wie es oben S. 241, Formel (25) geschehen ist, in der Form darstellen:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{S}_x &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Z}_z'}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{Z}_y'}{\partial z}, \\
 \mathfrak{S}_y &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}_x'}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{Z}_z'}{\partial x}, \\
 \mathfrak{S}_z &= -\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{Z}_y'}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{Z}_x'}{\partial y}.
 \end{aligned} \tag{81}$$

Hierin sollen nun, in derselben Bedeutung, wie sie oben S. 253 erörtert ist,  $-\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ ,  $-\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ ,  $-\frac{\partial \varphi}{\partial z}$  die Komponenten desjenigen Anteiles der magnetischen Kraft bedeuten, welcher ein Potential besitzt. Also auch die Einwirkung von Strömen, welche außerhalb der betrachteten Stelle P verlaufen, auf welche sich  $\mathfrak{S}_x$ ,  $\mathfrak{S}_y$ ,  $\mathfrak{S}_z$  beziehen, soll unter  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$  usw. einbegriffen sein. Es bestimmen sich demnach  $\mathfrak{Z}_x'$ ,  $\mathfrak{Z}_y'$ ,  $\mathfrak{Z}_z'$  nur durch die Stromkomponenten  $j_x$ ,  $j_y$ ,  $j_z$  an der betrachteten Stelle P selber, und sie verschwinden, falls keine Strömung in P vorhanden ist.

Nun kann man einen beliebigen, von elektrischen Strömen durchflossenen Raum immer in unendlich dünne geschlossene Stromröhren zerlegt denken, d. h. in ein System linearer Ströme. Die magnetische Kraft jedes einzelnen derselben ist in Punkten, welche von dem gerade betrachteten linearen Strome nicht selbst durchflossen werden, ersetzbar durch die Wirkung einer durch den linearen Strom hindurchgelegten Doppelfläche von bestimmtem Moment. Deshalb gilt auch hier, wie es im vorigen Abschnitt für ein System linearer Ströme abgeleitet wurde, für die magnetische Energie des Systems die Formel:

$$T = \frac{1}{8\pi} \int \mu \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] d v, \tag{82}$$

wobei das Integral über den ganzen Raum zu erstrecken ist, und worin  $\varphi$  die nach den Formeln (81) definierte Bedeutung des Potentials desjenigen Anteils der magnetischen Kraft hat, welcher überhaupt ein Potential besitzt.

Man kann nun die Formel (82) für die magnetische Energie des Systems wiederum, wie früher, S. 268, Formel (76), in der Gestalt schreiben:

$$T = \frac{1}{8\pi} \int \mu (\mathfrak{S}_x^2 + \mathfrak{S}_y^2 + \mathfrak{S}_z^2) d v = \frac{1}{8\pi} \int \mu \mathfrak{S}^2 d v, \tag{83}$$

vorausgesetzt, daß die in irgendeinem Punkte P eines Körpers stattfindende elektrische Strömung bei Verschiebung desselben gegen andere Körper oder bei Konfigurationsänderungen des Körpers selbst sich nicht ändert.

In der Tat sind die Elemente des Integrals (83) mit den Elementen des Integrals (82) an den stromlosen Gebieten  $dv$  identisch, da dort  $\mathfrak{H}_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ ,  $\mathfrak{H}_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ ,  $\mathfrak{H}_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}$  ist. Wir haben also nur noch den Wert des Integrals (83), welches über die stromführenden Gebiete  $dv$  zu erstrecken ist, mit dem über dieselben Gebiete zu erstreckenden Integral (82) zu vergleichen.

In diesen Strom-, d. h. Wirbelräumen, ist nun nach (81) der Wert des Integrals (83):

$$T = \frac{1}{8\pi} \int \mu \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] dv + \frac{2}{8\pi} \int \mu \times \\ \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \mathfrak{B}_y'}{\partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \mathfrak{B}_y'}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \mathfrak{B}_z'}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \mathfrak{B}_z'}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \mathfrak{B}_x'}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \mathfrak{B}_x'}{\partial z} \right) \right] dv \\ + \frac{1}{8\pi} \int \mu \left[ \left( \frac{\partial \mathfrak{B}_z'}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{B}_y'}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathfrak{B}_x'}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{B}_z'}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathfrak{B}_y'}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{B}_x'}{\partial y} \right)^2 \right] dv. \quad (84)$$

Der Wert des letzten dieser drei Integrale bleibt bei irgendwelchen Konfigurationsänderungen des Systems ungeändert, da er nur von  $\mathfrak{B}_x'$ ,  $\mathfrak{B}_y'$ ,  $\mathfrak{B}_z'$  abhängt und diese, wegen der vorausgesetzten Unveränderlichkeit der elektrischen Strömung, ungeändert bleiben. Es ist daher ganz gleichgültig, ob wir dies Integral in der Formel für die magnetische Energie hinschreiben oder nicht, da die magnetische Energie dadurch definiert ist, daß ihre Zunahme bei Konfigurationsänderungen des Systems die dabei von den ponderomotorischen Kräften geleistete Arbeit angibt. Eine Aenderung von  $T$  kann aber nur durch Aenderung der beiden ersten der obigen drei Integrale veranlaßt werden, daher können wir sie allein zur Berechnung von  $T$  heranziehen. In  $T$  bleibt eben eine additive Konstante willkürlich und in diese können wir das dritte der Integrale (84) mit einbegriffen denken.

Das zweite der obigen drei Integrale kann man wegen der drei Identitäten:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \mathfrak{B}_y'}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \varphi \frac{\partial \mathfrak{B}_y'}{\partial z} \right) - \varphi \frac{\partial^2 \mathfrak{B}_y'}{\partial x \partial z}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \mathfrak{B}_y'}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \varphi \frac{\partial \mathfrak{B}_y'}{\partial x} \right) - \varphi \frac{\partial^2 \mathfrak{B}_y'}{\partial x \partial z} \text{ usw.}$$

in der Form schreiben:

$$\frac{2}{8\pi} \int \mu \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \varphi \frac{\partial \mathfrak{B}_y'}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \varphi \frac{\partial \mathfrak{B}_y'}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \varphi \frac{\partial \mathfrak{B}_z'}{\partial x} \right) \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial x} \left( \varphi \frac{\partial \mathfrak{B}_z'}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \varphi \frac{\partial \mathfrak{B}_x'}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \varphi \frac{\partial \mathfrak{B}_x'}{\partial z} \right) \right] dv. \quad (85)$$

$\mu$  kann im stromführenden Körper variieren. Wir wollen denselben aber in sehr kleine Raumteile  $R$  zerlegt denken, so daß innerhalb derselben  $\mu$  als konstant anzusehen ist. Innerhalb eines solchen Raumteiles  $R$  ist  $\varphi$  eine eindeutige und stetige Funktion, da es das Potential der magnetischen Kraft bedeutet, welches die außerhalb  $R$  liegenden Stromgebiete in  $R$  hervorrufen. Ebenso sind die Differentialquotienten von  $\mathfrak{B}_x', \mathfrak{B}_y', \mathfrak{B}_z'$  nach den Koordinaten in  $R$  eindeutige, stetige Funktionen, da  $\mathfrak{B}_x', \mathfrak{B}_y', \mathfrak{B}_z'$  darstellbar sind als Potentiale einer in  $R$  liegenden Raumbelugung (vgl. oben S. 238). Wir können daher auf das Integral (85) den Gaußschen Satz (I, 15, S. 32) anwenden und erhalten auf diese Weise aus (85):

$$\Sigma \frac{2\mu}{8\pi} \int \varphi \left[ \left( \frac{\partial \mathfrak{B}_y'}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{B}_z'}{\partial y} \right) \cos(nx) + \left( \frac{\partial \mathfrak{B}_z'}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{B}_x'}{\partial z} \right) \cos(ny) \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial \mathfrak{B}_x'}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{B}_y'}{\partial x} \right) \cos(nz) \right] dS, \quad (86)$$

worin  $dS$  ein Element der Oberfläche  $S$  eines Raumes  $R$  bedeutet,  $n$  die äußere Normale auf  $S$ , und die  $\Sigma$  über alle Oberflächen  $S$  der Räume  $R$  zu erstrecken ist.

Nun haben wir oben S. 253 gezeigt, daß der potentiallose Anteil der magnetischen Kraft, d. h. derjenige, dessen Komponenten nach (81) durch  $\frac{\partial \mathfrak{B}_z'}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{B}_y'}{\partial z}$  usw. ausgedrückt werden, auf der Oberfläche eines Wirbelgebietes der Oberfläche parallel liegt, d. h. daß auf den Flächen  $S$  sein muß:

$$\left( \frac{\partial \mathfrak{B}_z'}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{B}_y'}{\partial z} \right) \cos(nx) + \left( \frac{\partial \mathfrak{B}_x'}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{B}_z'}{\partial x} \right) \cos(ny) \\ + \left( \frac{\partial \mathfrak{B}_y'}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{B}_x'}{\partial y} \right) \cos(nz) = 0.$$

Wegen dieser Beziehung verschwindet die Summe (86) und daher auch das zweite der Integrale in (84).

Folglich ist tatsächlich die magnetische Energie  $T$  durch (83) ausdrückbar, solange die Stromkomponenten in jedem Teile eines Körpers bei Lagenänderung desselben ungeändert bleiben. Die Bedeutung von  $T$  ist dabei nur die, daß sein Zuwachs die bei irgendeiner Konfigurationsänderung des Systemes von den ponderomotorischen Kräften geleistete Arbeit angibt.

Es ist hier die Frage noch gar nicht berührt, ob es einen gewissen äußeren Zwang erfordert, um die Stromstärken bei irgendwelchen Konfigurationsänderungen konstant zu erhalten, oder ob sie dieses von selbst tun. Die Beantwortung dieser Frage soll erst im V. Kapitel „Induktion“



vorgenommen werden. Jedenfalls ist die bei irgendeiner Konfigurationsänderung von den ponderomotorischen Kräften geleistete Arbeit nicht gleich  $dT$ , falls man das System sich selbst überläßt und falls sich dann die Stromstärken durch die Konfigurationsänderung ebenfalls verändern sollten. Wir werden unten sehen, daß dieses letztere Verhalten in der Tat eintritt.

## 24. Die magnetische Energie einer Induktionsröhre.

Die gleichen Betrachtungen, die wir für das elektrostatische (I, 43, S. 110) und für das magnetostatische (II, 26, S. 184) Feld durchgeführt haben, lassen sich auch auf das magnetische Feld elektrischer Ströme anwenden. Denn auch dieses Feld können wir uns einerseits in lauter Induktionsröhren zerlegt denken; andererseits können wir die Energie als in den einzelnen Raumteilen des Feldes lokalisiert ansehen. Daher können wir auch hier die Frage nach dem Energieinhalt einer einzelnen Induktionsröhre aufwerfen.

Ist der Querschnitt einer Induktionsröhre an irgendeiner Stelle gleich  $dq$ , ihr Längenelement gleich  $dl$ , so wird nach (77) die magnetische Energie der Röhre:

$$T_r = \frac{1}{8\pi} \int \mathfrak{B} \mathfrak{H} dq dl.$$

Es ist aber  $\mathfrak{B} dq$  gleich der Anzahl  $N'$  der in der Röhre enthaltenen magnetischen Induktionslinien. Diese Zahl ist eine vor das Integral zu setzende Konstante; also ist

$$T_r = \frac{1}{8\pi} N' \int \mathfrak{H} dl.$$

Nun sind die Kraftlinien des magnetischen Feldes elektrischer Ströme immer in sich geschlossene Linien, die Induktionsröhren in sich geschlossene Röhren; das Integral  $\int \mathfrak{H} dl$ , erstreckt über die ganze in sich zurücklaufende Röhre, stellt die magnetomotorische Kraft  $A$  des von der Röhre umschlungenen Wirbelraumes dar und diese ist nach (3), S. 22, gleich  $4\pi i$ , falls  $i$  die im Wirbelraum fließende Stromstärke bedeutet. Also ist die magnetische Energie der Induktionsröhre:

$$T_r = \frac{A N'}{8\pi} = \frac{1}{2} i N'. \quad (87)$$

Die Summe der Energien aller Induktionsröhren, welche denselben Stromraum  $i$  umschlingen, ist also

$$T = \frac{1}{2} i \Sigma N' = \frac{1}{2} i N,$$

wobei  $N$  die Gesamtzahl der den Stromraum  $i$  umschlingenden Induktionslinien bedeutet.

Sind nur lineare Ströme vorhanden, so ist daher die magnetische Energie des ganzen Feldes:

$$T = \frac{1}{2} \sum i N,$$

und das ist die oben S. 270 abgeleitete Formel (79).

Unsere jetzigen Betrachtungen setzen uns aber in den Stand, die magnetische Energie eines Feldes in anschaulicher Form auch dann darstellen zu können, wenn körperliche Ströme im Felde vorhanden sind. Denn auch dann gilt die Formel (87) für die Energie einer Induktionsröhre. Es ist bei ihr nur zu berücksichtigen, daß für eine Röhre, welche einen Wirbelraum schneidet oder ganz in ihm verläuft,  $i$  kleiner ist als für eine Röhre, welche jenen Wirbelraum umschlingt, indem sie ganz außerhalb desselben verbleibt.

Fassen wir nun zunächst den Fall ins Auge, daß nur ein einziger zusammenhängender Wirbelraum, d. h. nur ein Strom von körperlicher Ausdehnung existiert, wie ihn z. B. die Fig. 39 auf S. 253 darstellt. Eine gewisse Anzahl  $N'$  von Induktionslinien umschlingt den ganzen Wirbelraum. Es sind diejenigen Linien, welche eine Fläche  $\sigma$  durchsetzen, die man durch die engste Einschnürung des Wirbelraums hindurchlegen kann. Besser noch ist  $N'$  dadurch charakterisiert, daß es die Gesamtzahl derjenigen Induktionslinien ist, von denen keine den Wirbelraum durchschneidet. Die magnetische Energie des Teiles des magnetischen Feldes, welcher von diesen Induktionslinien besetzt ist, wird gegeben durch:

$$T' = \frac{1}{2} i N', \quad (88)$$

wo  $i$  die Gesamtstromstärke des Wirbelraumes bedeutet.

Die übrigen Induktionslinien des Feldes durchschneiden den Wirbelraum. Die von ihnen umschlungene Stromstärke ist also kleiner als  $i$ . Ist  $i_h$  die Stromstärke, welche  $N_h$  dieser letzteren Linien umschlingen, so ist die Energie des Raumes, in welchem diese  $N_h$  Induktionslinien verlaufen, gegeben durch  $\frac{1}{2} i_h N_h$ . Es ist daher die gesamte magnetische Energie des Feldes:

$$T = \frac{1}{2} i N' + \frac{1}{2} \sum i_h N_h. \quad (89)$$

In dieser Formel variiert  $i_h$  von  $i$  bis Null. Man kann daher leicht zwei Grenzwerte angeben, zwischen denen  $T$  enthalten sein muß. Setzt man  $i_h = i$ , so wird der Wert von  $T$  zu groß. In diesem Falle würde die

rechte Seite von (89) sich vereinfachen zu  $-\frac{1}{2} i (N' + \sum N_h) = -\frac{1}{2} i \bar{N}$ , wo  $\bar{N}$  die Gesamtzahl der überhaupt vorhandenen Induktionslinien des Feldes bedeutet. Andererseits würde der Wert von  $T$  zu klein ausfallen, wollte man alle  $i_h = 0$  setzen. Es ist daher

$$\frac{1}{2} i \bar{N} > T > \frac{1}{2} i N'.$$

Nach dieser Ungleichung kann man leicht die Fehler schätzen, welche man macht, wenn man ein körperliches Wirbelgebiet durch einen linearen Strom ersetzt denkt, der entweder in den Wirbelstellen der Kraftlinien liegt, die sie alle umkreisen, oder in der engsten Einschnürung des Wirbelraums. So ist z. B. für den in Fig. 39 auf S. 253 dargestellten Fall  $N' = 15$ ,  $\bar{N} = 23$ , jene beiden extremen Fälle würden also Energiewerte ergeben, die sich wie 23 zu 15 verhalten. Es ist daher keiner der beiden extremen Fälle eine genügende Annäherung an die Wahrheit. Nach der Formel (89) läßt sich aber leicht die strenge Formel für  $T$  finden, wenn man aus der Figur diejenigen Flächeninhalte der stromführenden Gebiete entnimmt, welche jede der Induktionslinien  $N_h$  einschließt.

Sind mehrere zusammenhängende Wirbelgebiete im Magnetfelde vorhanden, so lassen sich ganz ähnliche Betrachtungen anstellen. Man muß dabei nur berücksichtigen, daß einige Induktionslinien eventuell mehrere dieser Wirbelgebiete gleichzeitig umschlingen können. Die daraus fließenden Folgerungen sollen im Kapitel „Elektrodynamik“ betrachtet werden.

## 25. Die Abhängigkeit der magnetischen Energie des Feldes von seinem magnetischen Widerstande.

Nach Formel (87) ist die magnetische Energie einer Induktionsröhre:

$$T_r = \frac{A N}{8 \pi}, \quad (87)$$

wobei  $A = 4 \pi i$  die magnetomotorische Kraft des von der Röhre umschlungenen Wirbelraumes,  $N$  die in der Röhre enthaltene Zahl von Induktionslinien bedeutet. Die magnetische Energie des ganzen Feldes ist daher

$$T = \sum T_r = \frac{1}{8 \pi} \sum A N.$$

Die Formel (87) hat eine bemerkenswerte Aehnlichkeit mit derjenigen Energie, welche in einem elektrischen Kreislauf, d. h. geschlossenen Strome, in der Sekunde geliefert wird, in welchem die elektromotorische Kraft  $E$  und die Stromstärke  $i$  ist. Dieser elektrische Effekt ist nämlich  $Ei$ , wie später näher erklärt werden soll.

Nun kann man auf jede Induktionsröhre das Gesetz des magnetischen Kreislaufs, welches in II, 26 auf S. 184 erörtert ist, in Anwendung bringen. Nach der dortigen Formel (45) ist

$$A = N \cdot \omega_m = 4 \pi i,$$

wo  $\omega_m$  den magnetischen Widerstand der betreffenden Induktionsröhre bedeutet.  $\omega_m$  ist nach der Formel (44) des genannten Abschnittes zu berechnen. Es ist daher nach (87):

$$T_r = \frac{A^2}{8 \pi \omega_m} = \frac{2 \pi i^2}{\omega_m}, \quad (90)$$

$$T = \Sigma T_r = \frac{1}{8 \pi} \Sigma \frac{A^2}{\omega_m} = 2 \pi \Sigma \frac{i^2}{\omega_m} \quad (91)$$

oder auch:

$$T_r = \frac{N^2 \omega_m}{8 \pi}, \quad (90')$$

$$T = \Sigma T_r = \frac{1}{8 \pi} \Sigma N^2 \omega_m. \quad (91')$$

Die beiden letzten Formeln haben wiederum Aehnlichkeit mit der Formel für die Wärmemenge (Joulesche Wärme), welche von dem Strom  $i$  in einem Leiter, dessen galvanischer Widerstand  $w$  ist, in der Sekunde entwickelt wird. Diese Wärmemenge hat nämlich den Wert  $i^2 w$  (vgl. weiter unten).

Die Formeln (90), (91) sind besonders bequem zur Berechnung der ponderomotorischen Wirkungen im Magnetfelde, wenn bei Konfigurationsänderungen und Lagenänderungen der Wirbelgebiete ihre Stromstärke, d. h. auch ihre magnetomotorische Kraft  $A$ , ungeändert bleibt. Da Bewegungen der Systemteile immer in der Weise eintreten, daß die potentielle Energie möglichst klein, d. h. die magnetische Energie möglichst groß wird (vgl. S. 265 u. 266), so muß sich bei konstantem  $A$  der magnetische Widerstand  $\omega_m$  jeder Krafttröhre möglichst zu verkleinern suchen.

Die ponderomotorischen Wirkungen eines Magnetfeldes gehen also immer in der Weise vor sich, daß der magnetische Widerstand des Feldes möglichst klein wird. Es ist bei diesem Satze allerdings derselbe Umstand zu berücksichtigen, auf den wir schon bei dem entsprechenden Satze für das elektrische Feld aufmerksam gemacht haben (siehe S. 112), daß nämlich der magnetische Widerstand eines Raumes von der Gestalt der Krafttröhren in ihm abhängt, daß er also nicht genau zu berechnen ist, wenn man nicht den Kraftlinienverlauf in ihm genau kennt. Doch genügt hier, wie beim elektrischen Felde, zur annähernden Schätzung der Bewegungen schon die allgemeine Kenntnis des ausgesprochenen Satzes, und er leistet dabei durch seine Anschaulichkeit gute Dienste.

Ist ein einziger zusammenhängender Wirbelraum vorhanden, und befindet sich außerhalb desselben ein Körper von einer besseren magnetischen Leitfähigkeit, als sie seine Umgebung (Luft) besitzt, z. B. ein Eisenstück, so wird sich dasselbe dahin bewegen, wo in der Luft die Kraftlinien am dichtesten verlaufen, d. h. der Querschnitt der Krafttröhren am engsten ist. Denn dadurch wird der magnetische Widerstand des Feldes am meisten verringert. Daher kommt es, daß ein Eisenstück in das Innere einer stromdurchflossenen Spule hineingezogen wird. Ein diamagnetischer Körper dagegen würde aus einem Solenoid hinausgedrängt werden, da er im Inneren den magnetischen Widerstand des Feldes größer machen würde, als wenn er sich außerhalb weit von dem Solenoid entfernt befindet.

## 26. Scheinbare Druck- und Zugkräfte im magnetischen Felde.

Da die ponderomotorischen Wirkungen im Magnetfelde inmer so vonstatten gehen, daß der magnetische Widerstand der Krafttröhren möglichst klein wird, so erwecken die ponderomotorischen Wirkungen die Vorstellung, als ob die Krafttröhren sich zu verkürzen und zu erweitern strebten, d. h. als ob im Aether ein Zug parallel den Kraftlinien und ein Druck senkrecht zu ihnen vorhanden sei. Aus den Bewegungstendenzen gleichnamiger oder ungleichnamiger Magnetpole erkennt man dies besonders anschaulich, wenn man den Kraftlinienverlauf der von den Polen hervorgerufenen Magnetfelder zeichnet.

Es lassen sich also die Betrachtungen, die wir ausführlicher für das elektrostatische Feld entwickelt haben (I, 43), auf das magnetische Feld übertragen. Die Größe der Maxwellschen Spannungen würde auch hier durch die Energiedichte des Feldes gegeben sein, und die Existenz solcher Spannungen müßte ebenso für den Aether des leeren Raumes wie für ein jedes materielle Dielektrikum angenommen werden, wenn man die gesamten ponderomotorischen Wirkungen des Feldes auf die Wirksamkeit solcher Spannungen zurückführen wollte.

## 27. Tragkraft der Elektromagnete.

Im Anschluß an das Vorhergehende behandeln wir noch die Frage nach der Kraft, mit der zwei Eisenstücke im Magnetfelde an einer zu den Induktionslinien senkrechten Fläche aneinander haften. Man nennt die Kraft, die erforderlich ist, sie zu trennen, die Tragkraft.

Denken wir uns einen unendlich dünnen Schlitz senkrecht zu den Induktionslinien durch ein magnetisiertes Eisenstück gelegt. Die Zug-

kraft, die die Oberfläche des Eisens im Schlitz erfährt, die also die beiden einander gegenüberstehenden Grenzflächen des Schlitzes gegeneinander treibt, ist durch Formel (49) des II. Kapitels, Abschnitt 27, gegeben:

$$P_n = \frac{1}{8\pi} \mu_1 \mathfrak{H}_1^2 - \frac{1}{8\pi} \mu_2 \mathfrak{H}_2^2.$$

Dabei ist zu berücksichtigen, daß im luftleeren Schlitz  $\mu_1 = 1$  und die Feldstärke  $\mathfrak{H}_1$  gleich der Induktion  $\mathfrak{B}$  im Eisen ist. Setzen wir noch  $\mu_2 = \mu$  und  $\mu_2 \mathfrak{H}_2 = \mathfrak{B}$ , so wird

$$P_n = \frac{1}{8\pi} \mathfrak{B}^2 - \frac{1}{8\pi} \frac{\mathfrak{B}^2}{\mu}. \quad (92)$$

Diese in der Berührungsfläche wirkende Zugkraft stellt aber nicht die ganze Kraft dar, mit der zwei begrenzte Eisenstücke im Magnetfeld aufeinander wirken. Denn es müssen die auf die übrigen Begrenzungsflächen wirkenden Druckkräfte ebenfalls berücksichtigt werden. Deren Einfluß hängt von den Versuchsbedingungen ab. Bestehen z. B. die beiden Eisenstücke aus zwei langen, gleich dicken Zylindern, die sich im Innern eines Solenoids in einer zur Zylinderachse senkrechten ebenen Fläche berühren, so ergeben die auf die Seitenflächen wirkenden Druckkräfte keine Komponenten in Richtung der Achse. Die Kraft, mit der die Zylinder aufeinander drücken, ist also durch die Differenz der Zugkräfte auf ihre Endquerschnitte gegeben. Ist der eine Zylinder fest und ragt der andere, den man von jenem abzureißen sucht, weit aus der Spule heraus, so daß an seinem äußeren Ende das Feld gleich Null angenommen werden kann, so ist die zu überwindende Zugkraft durch die obige Formel (92) dargestellt.

Dieser Anordnung entsprechen die Versuche von Jones<sup>1)</sup>. Nur berücksichtigt er bei der Theorie seiner Versuche den Umstand, daß  $\mu$  beim Eisen mit der Feldstärke veränderlich ist. Diese Veränderlichkeit bedingt außer den Oberflächenkräften noch Kräfte, die auf das Innere des Eisens wirken, aus dem gleichen Grunde, wie solche Volumkräfte nach I, 45 in inhomogenen Mitteln auftreten, bei denen die Dielektrizitätskonstante, bzw. in magnetischen Feldern die Permeabilität, mit dem Orte variiert. Die Formel (92), die sich bei konstantem  $\mu$  in der Form schreiben läßt:

$$P_n = \frac{1}{8\pi} \mathfrak{B}^2 - \frac{1}{8\pi} \mathfrak{H}^2 - \frac{1}{2} \mathfrak{H} \mathfrak{S},$$

nimmt dann die allgemeinere Form an:

<sup>1)</sup> E. T. Jones. Wied. Ann. 57, S. 258, 1896.

$$p_n = \frac{1}{8\pi} \mathfrak{B}^2 - \frac{1}{8\pi} \mathfrak{G}^2 - \int_0^z \mathfrak{S} \, d\mathfrak{S}.$$

Diese Formel ist durch die Messungen von Jones bis zu Induktionen von  $40\,000 \, \text{g}^{\frac{1}{2}} \, \text{cm}^{-\frac{1}{2}} \, \text{sek}^{-1}$  hinauf gnt bestätigt worden.

Anders liegt die Frage nach der Kraft, mit der ein Eisenanker an den Polen eines hufeisenförmigen Elektromagneten haftet. Nehmen wir die Normale der Abreißfläche als X-Achse, so müßte in diesem Falle um die Kraft X nach dem gleichen Prinzip wie oben zu berechnen, das Integral

$$\int p_n \cos(n x) \, ds$$

genommen über die ganze Oberfläche des Ankers berechnet werden. Wir kommen einfacher zum Ziele durch Ermittlung der Arbeit, die zur Erweiterung des Luftspaltes zwischen Anker und Polen erforderlich ist, wobei wir uns allerdings auf die Betrachtung eines Idealfalles beschränken wollen. Eisenkern und Anker seien zwei Halbringe, die sich in zwei ebenen Schnittflächen berühren. Wir betrachten eine Induktionsröhre, die in der Nähe der Mitte des Eisenkernes verlaufen möge, und wollen die Annahme machen, daß keinerlei Streuung der Kraftlinien vorhanden sei, auch dann nicht, wenn der unendlich dünn angenommene Luftspalt um eine unendlich kleine Strecke erweitert werde. Die Induktionsröhre wird dann mit überall gleichem Querschnitt  $q$  im Kern und Anker verlaufen. Der Energieinhalt der Röhre ist nach (90)

$$T_r = \frac{A^2}{8\pi \omega_m}.$$

Bezeichnet  $l_i$  die Länge der Röhre im Eisen,  $l_a$  im Luftspalt,  $\mu$  die Permeabilität des Eisens, so ist nach II, 26, Formel (44)

$$\omega_m = \frac{l_i}{\mu q} + \frac{l_a}{q}.$$

Wird  $l_a$  um  $dl_a$  vergrößert, so wächst  $\omega_m$  um  $d\omega_m = \frac{dl_a}{q}$  und  $T_r$  nimmt ab um

$$dT_r = - \frac{A^2}{8\pi \omega_m^2} \frac{dl_a}{q}.$$

Nehmen wir an, daß die magnetomotorische Kraft  $A$  konstant gehalten wird, und berücksichtigen wir, daß  $\frac{A}{\omega_m}$  die Zahl  $N$  der Induktionslinien in der Röhre,  $N$  aber  $= \mathfrak{B} \cdot q$  ist, so kann man schreiben:

$$dT_r = - \frac{\mathfrak{B}^2}{8\pi} q \, dl_a.$$

Unter der Voraussetzung — die bei verschwindend engem Luftspalt angenähert erfüllt ist —, daß der ganze Kraftfluß durch Anker und Kern in Röhren von konstantem Querschnitt verläuft, kann man die Betrachtung auf den ganzen Querschnitt des Eisens ausdehnen und die gesamte Energieänderung darstellen durch

$$dT = - dl_a \int \frac{\mathfrak{B}^2}{8\pi} ds,$$

das Integral genommen über die beiden Schnittflächen, in denen sich Anker und Kern berühren. Da die Zunahme von  $T$  die Arbeit der magnetischen Kräfte mißt, so folgt für die Tragkraft der Ausdruck

$$P = \int \frac{\mathfrak{B}^2}{8\pi} ds. \quad (93)$$

Sie berechnet sich also so, als ob auf jedes Quadratcentimeter der Berührungsfläche eine Zugkraft

$$P_0 = \frac{\mathfrak{B}^2}{8\pi} \quad (94)$$

wirkte.

## 28. Die ponderomotorischen Wirkungen eines Magnetfeldes auf einen Stromkreis.

Handelt es sich darum, die Kräfte zu berechnen, die ein einzelner Stromkreis in einem gegebenen, etwa von irgendwelchen anderen Stromkreisen herrührenden Magnetfelde erfährt, so würde die Arbeit bei einer Verschiebung dieses Stromkreises aus der Formel (80) zu berechnen sein. Dabei ist aber zu bedenken, daß bei einer Verschiebung des Stromkreises sich nicht bloß der Induktionsfluß ändert, der durch die Fläche dieses Kreises hindurchgeht, sondern daß auch für alle anderen Stromkreise damit eine Änderung von  $N$  eintritt. Für die gesamte Änderung der magnetischen Energie würden die Änderungen aller dieser Glieder zu berücksichtigen sein. In diesem Falle kommt man zu einer einfacheren Formel für die zu berechnende Arbeit durch folgende Ueberlegungen.

Bringt man einen Pol von der Stärke  $+m$  aus der Unendlichkeit an eine Stelle des gegebenen Feldes, an der das Potential  $\varphi$  herrscht, so ist die dazu erforderliche Arbeit  $+m\varphi$ . Bringt man einen magnetischen Dipol so in das Feld, daß der negative Pol an der Stelle des Potentialwertes  $\varphi$ , der positive an der Stelle des Potentialwertes

$\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial l}$  liegt, so ist die erforderliche Arbeit  $mdl \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial l}$ , wo  $dl$  den Polabstand,  $mdl$  also das Moment des Dipols bedeutet. Denkt man



sich statt des Dipols das Element  $ds$  einer magnetischen Doppelfläche vom Moment  $v$ , das senkrecht zur Richtung  $dl$  liegt, so lautet der Ausdruck für die Arbeit:  $v ds \frac{\partial \varphi}{\partial l}$ , und ersetzt man das Moment der Doppelfläche durch den die Fläche umkreisenden Strom, so hat der Ausdruck in einem Medium von der Permeabilität  $\mu$  die Form  $i \mu ds \frac{\partial \varphi}{\partial l}$ . Dabei ist  $dl$  jetzt die Richtung der Normale des Elements; man kann also  $dn$  dafür schreiben, und die Richtung ist positiv gerechnet im Sinne der früheren Festsetzungen (siehe III, 10). Also ist die Arbeit, um die sehr kleine, stromumflossene Fläche  $ds$  in das gegebene Magnetfeld einzuführen bis zu der betrachteten Stelle, gegeben durch den Ausdruck:

$$dU = i \mu ds \frac{\partial \varphi}{\partial n} = - i \mu ds \mathfrak{H}_n = - i ds \mathfrak{H}_n. \quad (95)$$

Hier bedeutet, im Gegensatze zu der Formel (74),  $\mathfrak{H}_n ds$  den von dem gegebenen Magnetfelde durch die Stromfläche hindurchgesandten Induktionsfluß und zwar positiv gerechnet, wenn er von der negativen nach der positiven Seite der Stromfläche hindurchtritt, wenn also die Richtung der Induktionslinien des Feldes mit der Richtung der vom Strom selbst erzeugten Induktionslinien übereinstimmt. Im übrigen aber gelten die gleichen Betrachtungen wie in Abschnitt 21 dieses Kapitels. Bewegt sich der Stromkreis unter dem Einfluß der Kräfte, die das Magnetfeld auf ihn ausübt, so muß  $dU$  abnehmen, also  $i \mathfrak{H}_n ds$  zunehmen. Der Ausdruck läßt sich wie oben auf einen Stromkreis von endlichen Dimensionen erweitern. Hat dann  $T$  die Bedeutung

$$T = i \int ds \mathfrak{H}_n, \quad (96)$$

so mißt die Zunahme von  $T$  bei einer Verschiebung des Stromkreises die von den magnetischen Kräften geleistete Arbeit. Dabei muß, entsprechend der Ableitung, das Moment der Doppelfläche, also die Stromstärke bei der Verschiebung konstant gedacht werden und müßte gegebenenfalls durch besondere Hilfsmittel konstant erhalten werden. Denken wir uns auch die Stromfläche konstant, so ist die Arbeit ausschließlich bedingt durch die Aenderung des die Stromfläche durchsetzenden Induktionsflusses.

In einem homogenen Felde würde sich z. B. bei einer Parallelverschiebung der Stromfläche der Induktionsfluß durch die Fläche nicht ändern. In einem solchen Felde wird keine Arbeit bei einer Parallelverschiebung geleistet; es sind also auch keine Kräfte da, die eine solche Verschiebung hervorzubringen suchen. Wohl aber tritt eine Aenderung des Induktionsflusses bei einer Drehung der Stromfläche ein. Eine Spule stellt sich in einem solchen Felde immer so, daß das Maximum des

Induktionsflusses von der negativen nach der positiven Seite der Fläche hindurchgeht. Diese Lage ist die des stabilen Gleichgewichts. In jeder anderen Lage wirken Drehmomente auf die Spule, die sie in diese Lage hinüberzudrehen suchen. Ist die Stromfläche eben, von der Größe  $F$ , und bedeutet  $\varphi$  den Winkel, den die positive Normale der Fläche mit den Induktionslinien des Feldes bildet, so ist

$$T = i F \mathfrak{B} \cos \varphi.$$

Daher das Drehungsmoment:

$$D = - i F \mathfrak{B} \sin \varphi.$$

In einem inhomogenen<sup>1)</sup> Felde befindet sich ein Stromkreis an der Stelle und in derjenigen Lage im stabilen Gleichgewicht, in der er ein Maximum des Induktionsflusses in der mit der Richtung seines eigenen Feldes innerhalb der Stromfläche übereinstimmenden Richtung umschlingt.

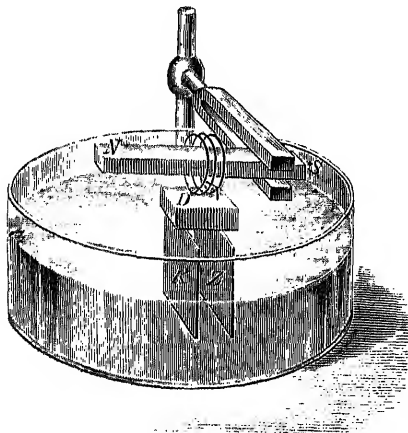


Fig. 42.

Diese Folgerung kann man durch eine Versuchsanordnung, welche de la Rive angegeben hat<sup>1)</sup>, bewahrheiten. Auf einem Bassin (vgl. Fig. 42), welches angesäuertes Wasser enthält, schwimmt, durch ein Korkstück gehalten, eine Kupfer- und eine Zinkplatte (K und Z), deren obere Enden durch mehrere Windungen eines solenoidartig aufgewundenen Kupferdrahtes D metallisch verbunden sind. In dem Drahte D fließt daher ein elektrischer Strom der Stärke  $i$ . In geeigneter Höhe über dem Flüssigkeitsniveau des Bassins ist ein kräftiger Magnetstab NS befestigt, so daß das Solenoid sich über denselben frei schieben kann. Welche Lage man nun auch demselben ursprünglich geben mag, stets schiebt es sich von selbst bis auf die Mitte über den Magnetstab NS derartig, daß die positive Seite der durch  $i$  umgrenzten Stromfläche nach dem

<sup>1)</sup> De la Rive, Gilberts Ann. 71, S. 113, 1822.

Nordpol N des Magnetstabes weist. Steckt man also z. B. das Solenoid ursprünglich über den Magnetstab so, daß die positive Seite der Stromfläche nach dem Südpol S weist, so schiebt sich das Solenoid von selbst ab vom Magnetstabe, dreht sich sodann um  $180^\circ$  und schiebt sich dann wieder über den Magnetstab bis in die Mitte.

In der Tat ist bei dem bekannten Kraftlinienverlaufe des durch den Magnetstab hervorgebrachten Feldes dieses die einzige Lage, in welcher die in die negative Seite der Stromfläche eintretende Kraftlinienzahl ein Maximum ist. Daher kann sich das Solenoid auch nur in dieser Lage im stabilen Gleichgewicht befinden.

## 29. Ponderomotorische Wirkungen eines Magnetfeldes auf ein Stromelement.

Da die im vorigen Abschnitt behandelten Kräfte den Stromkreis bewegen, so müssen sie an dem Stromträger angreifen, und es liegt nahe, die den Stromkreis als Ganzes bewegende Kraft als die Resultante von Kräften darzustellen, die auf die einzelnen Elemente des Stromträgers wirken. Zu einem solchen Ansatz führt folgende Ueberlegung.

Die Arbeit bei einer Verschiebung oder Gestaltsänderung des Stromkreises ist — Unveränderlichkeit der Stromstärke vorausgesetzt — bedingt durch die Aenderung der Zahl der die Stromfläche durchsetzenden Induktionslinien. Diese Aenderung vollzieht sich in der Weise, daß bei der Bewegung Induktionslinien von der Strombahn geschnitten werden und dadurch, je nach der Richtung, die die Bewegung des betreffenden Theiles der Strombahn hat, in die Stromfläche ein- oder aus ihr austreten. Beschreibt ein Element  $dl$  der Strombahn bei der Bewegung eine Fläche  $df$ , so ist die Zahl der geschnittenen Induktionslinien  $= \mathfrak{B}_n df$ , und die ganze Arbeit der magnetischen Kräfte ist dargestellt durch:

$$dT = i \sum \mathfrak{B}_n df, \quad (97)$$

die Summe erstreckt über die von sämtlichen Elementen der Strombahn bestrichene Fläche. Dabei bedeutet der Ausdruck unter dem Summenzeichen eine Zunahme der Zahl der Induktionslinien, wenn  $df$  außerhalb der ursprünglichen Stromfläche liegt, und eine Abnahme, wenn es innerhalb liegt.

Hat sich das Element  $dl$  um die Strecke  $dp$  parallel mit sich verschoben — eine Drehung des Elementes brauchen wir nicht in Betracht zu ziehen, da bei einer solchen ebensoviel Kraftlinien in einen wie im anderen Sinne geschnitten werden — und ist  $\vartheta$  der Winkel zwischen  $dl$  und  $dp$ , so ist  $df = dl \cdot dp \cdot \sin \vartheta$ . Die Gesamtarbeit läßt sich dann auffassen als eine Summe von Einzelarbeiten, die von den an den ein-

zahlen Stromelementen angreifenden Kräften geleistet werden. Da jede dieser Einzelarbeiten als Produkt der Verschiebung  $dp$  mit der in die Richtung von  $dp$  fallenden Kraftkomponente  $P_p$  darzustellen ist, so hat die in die Richtung der Verschiebung fallende Komponente der fraglichen Kraft für das Stromelement  $dl$  den Wert

$$P_p = i \mathfrak{B}_n dl \sin \vartheta.$$

Man findet die Richtung dieser Kraft, indem man unter allen möglichen Verschiebungen diejenige heraussucht, für die dieser Ausdruck den größten Wert hat. Dieses Maximum tritt für diejenige Verschiebungsrichtung ein, für die erstens  $\mathfrak{B}_n$  und zweitens  $\sin \vartheta$  so groß wie möglich sind. Die erste Bedingung ist erfüllt, wenn die Verschiebung auf der magnetischen Kraft des gegebenen Feldes senkrecht steht; die zweite ist erfüllt, wenn

$$\vartheta = \frac{\pi}{2}, \text{ also die Verschiebungsrichtung auf dem Stromelement senkrecht}$$

steht. Bildet das Stromelement selbst mit der magnetischen Kraft des Feldes den Winkel  $\epsilon$ , so ist für die Verschiebungsrichtung, die auf der magnetischen Kraft und dem Stromelement senkrecht steht, der Induktionsfluß durch die vom Stromelement bestrichene Fläche  $= \mathfrak{B} \sin \epsilon df$ , also die Arbeit  $= i \mathfrak{B} \sin \epsilon dl dp$ . Demnach läßt sich die Gesamtarbeit auf die Arbeit von Elementarkräften folgender Art zurückführen.

In einem magnetischen Felde von der Feldstärke  $\mathfrak{H}$  in einem Medium von der Permeabilität  $\mu$  wirkt auf ein Stromelement  $dl$ , in dem der Strom  $i$  fließt, und das mit den Kraftlinien des Feldes den Winkel  $\epsilon$  bildet, eine Kraft von dem Betrage

$$P = \mu \mathfrak{H} i \sin \epsilon dl. \quad (98)$$

Sie steht senkrecht sowohl auf dem Stromelement als auch auf der Richtung der magnetischen Kraft und sie ist stets so gerichtet, daß sie das Element im Sinne einer Vermehrung der Zahl der Kraftlinien, die von der negativen zur positiven Seite der stromumflossenen Fläche hindurchtreten, zu bewegen sucht. Liegt also die Fläche eines ebenen Stromes senkrecht zu den Kraftlinien eines Magnetfeldes und so, daß die letzteren die Richtung der positiven Normale der Stromfläche haben — stabile Lage —, so sucht die Kraft das Element nach außen zu ziehen, die Stromfläche also zu vergrößern; bei der entgegengesetzten (labilen) Lage der Stromfläche sucht die Kraft das Element nach innen zu treiben, die Stromfläche zu verkleinern. Aus dieser Feststellung über die Richtung der bewegenden Kraft ergibt sich folgende allgemeine Formulierung für die räumliche Beziehung der drei Richtungen.

Die Bewegungstendenz, die magnetische Kraftlinie und die elektrische Stromlinie bilden ein rechtwinkliges Achsenkreuz, dessen positive

Richtungen durch Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der linken Hand gewiesen werden, falls man aus diesen Fingern ein rechtwinkliges Achsenkreuz bildet (Flemings Linke-Hand-Regel, siehe Fig. 43).

Daß eine derartige Kraft auf ein Stromelement in einem Magnetfeld tatsächlich wirkt, kann man experimentell dartun, indem man das Strom-

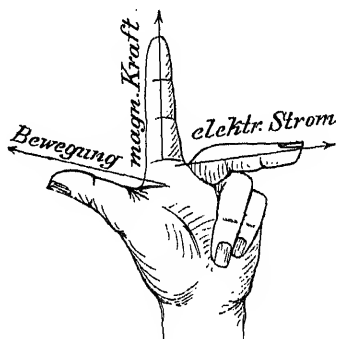


Fig. 43.

element beweglich macht. Legt man z. B. einen runden Metallzylinder auf zwei parallele Metallschienen, die ihm dauernd Strom zuführen, und nähert ihm von oben oder unten einen Magneten, so rollt der Zylinder auf den Schienen in der durch obige Regel vorgeschriebenen Richtung.

Auf der Wirkung dieser Kraft, die ein Stromträger in einem Magnetfeld erfährt, beruht die Konstruktion der Drehspulengalvanometer (Galvanometer von Deprez-d'Arsonval), bei denen die

Spule, durch die der zu messende Strom geschickt wird, drehbar zwischen den Polen eines starken Hufeisenmagneten aufgehängt ist, und die von den gewöhnlichen Galvanometern den großen Vorzug der Unabhängigkeit von äußeren magnetischen Einflüssen haben; ferner die Konstruktion des Saitengalvanometers von Einthoven<sup>1)</sup> und des Saitenunterbrechers in der ihm von Pupin<sup>2)</sup> und Arons<sup>3)</sup> gegebenen Form.

### 30. Beziehungen zum Biot-Savartschen Gesetz.

Die Kraft, die ein Magnetfeld auf ein Stromelement ausübt, ist in vorhergehenden aus den magnetischen Wirkungen des ganzen Stromkreises erschlossen worden. Diese Wirkungen aber können andererseits auch auf magnetische Wirkungen der einzelnen Stromelemente nach dem Biot-Savartschen Gesetz zurückgeführt werden. Denkt man sich ein Stromelement  $idl$  und einen Magnetpol  $m$  gegeben, so stehen die Kräfte, die sie aufeinander ausüben, in einer sehr einfachen Beziehung zueinander. Auf den Magnetpol wirkt nach (61), S. 255, die Kraft

$$P_1 = \frac{m idl}{r^2} \sin(lr).$$

Andererseits hat am Ort des Stromelements das Feld des Magnetpol

<sup>1)</sup> W. Einthoven, Annalen der Physik (4) 12, S. 1059, 1903.

<sup>2)</sup> M. J. Pupin, Sill. Journ. (3) 45, S. 325, 1898.

<sup>3)</sup> L. Arons, Wied. Ann. 66, S. 1177, 1898; 67, S. 682, 1899.

die Richtung von  $r$  und die Stärke  $\frac{m}{\mu r^2}$ , wenn  $\mu$  die Permeabilität des Mediums bedeutet; also wirkt auf das Stromelement nach (98) die Kraft

$$P_2 = \frac{m i dl}{r_2} \sin(\angle r).$$

Die beiden Kräfte sind also einander gleich. Zieht man die Ampèresche Regel und die Linke-Hand-Regel heran, so sieht man ferner, daß die Kräfte auch entgegengesetzte Richtung haben. Da sie aber nicht in die Richtung der Verbindungslinie  $r$  von Stromelement und Magnetpol fallen, sondern auf dieser Richtung senkrecht stehen, so würden sie sich bei starrer Verbindung von Stromelement und Pol nicht aufheben, sondern würden ein Kräftepaar bilden, das Stromelement und Pol bei unveränderlichem Abstand zwischen beiden dauernd umeinander herumführen würde. Man kann also auch nicht etwa die eine dieser Elementarkräfte aus der anderen mit Hilfe des Reaktionsprinzips ableiten wollen. Das Reaktionsprinzip ist nur auf die Wechselwirkung des ganzen Stromkreises mit einem ganzen Magneten anwendbar. Wird der vollständige Stromkreis mit einem Magneten starr verbunden, so sind damit alle Kräfte, die zwischen ihnen wirken, aufgehoben, und es kommt keine Bewegung mehr zustande. Dagegen können die besprochenen Kräftepaare in Gestalt dauernder Rotationen in die Erscheinung treten, wenn Stromteile um Magnete oder Magnete um Stromteile beweglich gemacht werden, wie zuerst Faraday nachgewiesen hat<sup>1)</sup>. Darauf beruhen die sogenannten elektromagnetischen Rotationsapparate.

### 31. Dauernde Rotationen von Magneten um Stromteile oder von Stromteilen um Magnete.

Da die magnetischen Kraftlinien eines Stromes den stromführenden Draht als geschlossene Kurven umschlingen, so folgt, daß ein Magnetpol dauernde Rotationen um den Draht ausführen müßte, wenn er stets den Kräften des magnetischen Feldes frei folgen könnte. Diese Möglichkeit ist aber unmittelbar nicht ausführbar, weil es keine einzelnen Pole gibt. Denkt man sich aber beide Pole eines Magneten um den Stromleiter auf geschlossenen Bahnen gleichzeitig herumgeführt, so ist die Arbeit für die beiden Pole gleich groß und entgegengesetzt, und eine dauernde Rotation, die unter dauerndem Arbeitsaufwand seitens der magnetischen Kräfte des Feldes erfolgt, kann nicht zustande kommen. Eine solche ist nur möglich, wenn die geschlossene Bahn des einen

<sup>1)</sup> M. Faraday, Royal Instit. Sept. 1821; Gilberts Ann. 71, S. 124; 73, S. 113, 1822.

Poles die Strombahn umschlingt, diejenige des anderen Poles dagegen sie nicht umschlingt. Der Magnet muß also bei seiner Rotation die Strombahn schneiden. Diese Bedingung wird dadurch erfüllt, daß man mit dem rotierenden Magneten einen Schleifkontakt verbindet, der bei der Rotation gewissermaßen eine Umschaltung des Stromes bewirkt. Eine Einrichtung dieser Art zeigt der in Fig. 44 abgebildete elektromagnetische Rotationsapparat.

Auf dem Bodenbrette des Apparates ist eine Knpfersäule *a* befestigt, welche oben ein Quecksilbernäpfchen *b* trägt. In dieses taucht ein Metallfortsatz des Bügels *cd* ein, welcher an dem Faden *eg* aufgehängt ist und in vertikaler Stellung die beiden Magnete *ns* und *n's'* trägt. Von dem Bügel *cd* geht ein Platindraht *p* aus, dessen Spitze in die kreisförmige Quecksilberrinne *f* taucht, deren Mittelpunkt in der Achse

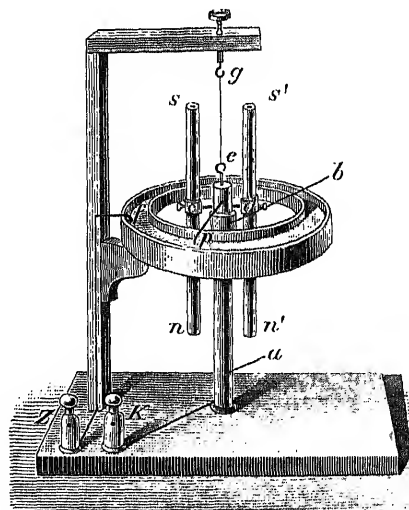


Fig. 44.

des Apparates liegt. Die Säule *a* ist mit der Klemmschraube *K*, die Quecksilberrinne mit der Klemmschraube *Z* durch Drähte metallisch verbunden.

Werden nun die Klemmen *K* und *Z* mit den Polen einer galvanischen Batterie oder eines Akkumulators verbunden, so bilden die Zuleitungsdrähte zu den Klemmen, ferner *a*, *p*, *f* und der Zuleitungsdraht zwischen *f* und *Z* das stromführende metallische System. Wesentlich für die Bewegung der Pole *n*, *n'* der Magnete ist nur *a*, wenn man dafür sorgt, daß die Pole möglichst nahe an *a* sich befinden, daß ferner die Quecksilberrinne die Magnete möglichst eng umschließt und daß die Magnete lang und ihre oberen Pole *s*, *s'* daher weit genug von den stromführenden Teilen entfernt sind, um die Kräfte, die auf diese Pole wirken,

vernachlässigen zu können. Unter diesen Bedingungen tritt eine dauernde Rotation des Magnetsystems ein, falls die unteren Pole gleichnamig sind, z. B. Nordpole. Die Rotationsrichtung muß sich umkehren, falls die unteren Pole beide Südpole sind; ebenso muß sie sich umkehren, wenn die Stromrichtung umgekehrt wird. Tritt der Strom bei K ein und sind die unteren Pole Nordpole, so rotiert das System, von oben nach unten gesehen, entgegen dem Uhrzeiger. Alle diese Erscheinungen werden tatsächlich beobachtet.

Liegen die Magnetpole zwar dem Stromträger möglichst nahe, macht man aber die Quecksilberrinne größer, so daß der Platindraht  $p$  länger wird, so verkleinert sich dadurch das Drehungsmoment, das auf das bewegliche System wirkt. Ist der Radius der Rinne und entsprechend der Platindraht  $p$  unendlich groß, so wird das Drehungsmoment gleich Null. Dies rührt daher, daß der Strom im Draht  $p$  senkrecht zu den Kraftlinien des magnetischen Feldes der beiden Magnete verläuft und daraus nach der Linken-Hand-Regel ein Drehungsmoment sich ergibt, das dem auf die unteren Pole wirkenden Drehungsmoment entgegengerichtet ist. Je länger  $p$  ist, um so größer ist dieses gegenwirkende Drehungsmoment; es wird dem anderen gleich, wenn  $p$  sich bis in die Unendlichkeit erstreckt. Eine genaue Berechnung der Drehungsmomente, die aus der Wechselwirkung der Magnete mit allen einzelnen Teilen des Stromkreises hervorgehen, hat G. R. Olshausen<sup>1)</sup> durchgeführt.

Sehr einfach gestaltet sich die Berechnung für den in Fig. 45 im Durchschnitt abgebildeten Apparat, der von den in Abschnitt 14 abgeleiteten Sätzen über das Magnetfeld stromdurchflossener Hohlzylinder zur Verwirklichung der Unipolarrotation Gebrauch macht<sup>2)</sup>.

Im Inneren eines stromdurchflossenen Hohlzylinders ist das Magnetfeld des Stromes gleich Null, außen hat es die Feldstärke  $2i/r$ , wenn der Zylinder unendlich lang ist. Bringt man daher den einen Pol eines Hufeisenmagnetes in das Innere der Stromröhre, während der andere sich im Außenfelde befindet, so wirkt nur auf den letzteren eine be-

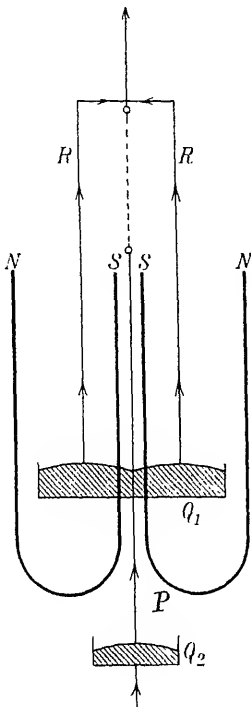


Fig. 45.

<sup>1)</sup> George R. Olshausen, Ueber die Unipolarrotation. Diss., Berlin 1901.

<sup>2)</sup> L. Fleischmann, Zeitschr. f. d. phys. u. chem. Unterr. 8, S. 361, 1895; W. König, Wied. Ann. 60, S. 519, 1897.



wegende Kraft; ihr Drehungsmoment ist  $2mi$ , wenn  $m$  die Polstärke des Magneten ist und der ganze Stromträger unendlich lang, d. h. sehr lang im Verhältnis zum Abstand des Poles von der Achse der Röhre ist. Soll sich aber der Magnet drehen, so darf er nicht mit der Röhre fest verbunden sein. Das Magnetsystem muß im Inneren der Röhre an einem Faden drehbar aufgehängt sein und einen Quecksilbernafp  $Q_1$  tragen, in den der untere Rand der Röhre  $R$  eintaucht, und dem der Strom zentral durch den in einen zweiten Quecksilbernafp  $Q_2$  tauchenden Draht  $P$  zugeführt wird. In dem Felde der Magnete erfährt nämlich die stromführende Röhre ein Drehungsmoment, das dem der Magnete entgegengesetzt ist. Dieses rührt nicht von den äußeren Polen her; wären diese allein vorhanden, so würde die Stromröhre kein Drehungsmoment erfahren. Da sich aber die entgegengesetzten Pole der Magnete, um sie dem magnetischen Felde des Stromes zu entziehen, notwendig im Inneren der Röhre befinden müssen, so wird die Stromröhre von allen Kraftlinien der Magnete in gleichem Sinne geschnitten und es entsteht daraus ein Drehungsmoment, das genau so groß ist —  $2mi$  — wie das auf die äußeren Pole wirkende, aber die entgegengesetzte Richtung hat. Auch dieses Drehmoment tritt in die Erscheinung, wenn man auch die Stromröhre an einem Faden drehbar aufhängt, unter Verwendung passender Schleifkontakte zur Weiterführung des Stromes. Verbindet man aber Stromröhre und Magnetsystem starr miteinander, so bleibt der Apparat in Ruhe, weil sich die entgegengesetzten Drehmomente aufheben <sup>1)</sup>.

### 32. Die Unabhängigkeit der Wechselwirkung zwischen Strömen und Magneten von der Natur des umgebenden Mediums.

In Abschnitt 8 dieses Kapitels ist auseinandergesetzt, daß die magnetische Kraft eines Stromes von der Natur des umgebenden Mediums unabhängig ist. Die magnetische Kraft ist aber nichts anderes als die ponderomotorische Wirkung des Feldes auf den in das Medium eingeführten magnetischen Einheitspol. Was für diesen Pol gilt, gilt für jeden beliebigen Pol. Die ponderomotorische Wirkung eines Stromes auf irgendeinen Magneten ist also stets unabhängig vom Zwischenmedium. Das gleiche gilt für die reziproke Wirkung des Magneten auf den Strom, wie aus den Ableitungen in Abschnitt 28 hervorgeht. Die pondero-

---

<sup>1)</sup> Eine ausführliche Behandlung dieser und anderer Rotationsapparate findet sich in der bereits genannten Arbeit von Olshausen; ferner bei E. Hagenbach, Ann. der Physik (4) 4, S. 233, 1901, und bei S. Valentiner, Die elektromagnetische Rotation und die unipolare Induktion in kritisch-historischer Behandlung, Karlsruhe 1904.

motorische Wirkung auf das Stromelement ist der Größe der Induktion  $\mathfrak{H}$  oder des Produktes  $\mu \mathfrak{H}$  am Ort des Elementes proportional. Rührt das Feld von einem permanenten Magneten her, so ist bei Voraussetzung strenger Permanenz, d. h. unveränderlicher Polstärke, die von dem Magneten in verschiedenen Medien hervorgerufene Induktion konstant oder die Feldstärke umgekehrt proportional mit  $\mu$ . Daher fällt auch hierbei der Einfluß des Zwischenmediums auf die Wirkung, die das Stromelement, bzw. der ganze Strom von einem Magneten erfährt, fort.

### 33. Die wechselseitige Energie von Strömen und Magneten ist Null.

In Abschnitt 22 ist bereits der Ausdruck der Energie für den Fall mehrerer stromführender Systeme, deren magnetische Felder sich überlagern, erörtert und dabei der Begriff der wechselseitigen Energie dieser Systeme eingeführt worden. Dieser Begriff ist natürlich auch anwendbar auf zwei Systeme, von denen das eine ein stromführender Leiter, das andere ein permanenter Magnet ist. In diesem Fall läßt sich für die wechselseitige Energie ein Satz ableiten, der einer besonderen Erörterung bedarf.

Es sei  $\mathfrak{H}_1$  die magnetische Feldstärke, die der elektrische Strom im Aufpunkte P erzeugt;  $\mathfrak{H}_2$  die Feldstärke, die von dem permanenten Magneten herrührt. Der allgemeine Ausdruck für die magnetische Energie des gesamten Feldes ist dann nach (76):

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{8\pi} \int \mu [(\mathfrak{H}_{1x} + \mathfrak{H}_{2x})^2 + (\mathfrak{H}_{1y} + \mathfrak{H}_{2y})^2 + (\mathfrak{H}_{1z} + \mathfrak{H}_{2z})^2] dv \\ &= \frac{1}{8\pi} \int \mu \mathfrak{H}_1^2 dv + \frac{1}{8\pi} \int \mu \mathfrak{H}_2^2 dv \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int \mu (\mathfrak{H}_{1x} \mathfrak{H}_{2x} + \mathfrak{H}_{1y} \mathfrak{H}_{2y} + \mathfrak{H}_{1z} \mathfrak{H}_{2z}) dv. \end{aligned} \quad (99)$$

Die beiden ersten Integrale stellen die Energien  $T_{11}$  und  $T_{22}$  der beiden Einzelfelder dar, das letzte Integral die aus der Übereinanderlagerung hervorgehende wechselseitige Energie  $T_{12}$ . Für die Komponenten der Feldstärke lassen sich die negativen Ableitungen der entsprechenden Potentiale einführen. Es sei  $\varphi = i\psi$  [siehe Abschnitt 7, Gleichung (10)] das Potential des linear angenommenen Stromes,  $\varphi_m$  das Potential des Magneten. Dann ist:

$$T_{12} = \frac{1}{4\pi} \int \mu \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \varphi_m}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \varphi_m}{\partial z} \right) dv. \quad (100)$$

Dieses Integral läßt sich durch partielle Integration in eine Summe von zwei Integralen, einem Oberflächen- und einem Raumintegral, verwandeln. Es ergibt sich nämlich zunächst:

$$T_{12} = \frac{1}{4\pi} \int \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \varphi_m \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \varphi_m \mu \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \varphi_m \mu \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right] dv \\ - \frac{1}{4\pi} \int \varphi_m \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right] dv.$$

Von diesen Integralen verschwindet das zweite, weil im ganzen Raume nach II, 22, (6') und S. 222

$$\frac{\partial}{\partial x} (\mu \mathfrak{H}_{1x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\mu \mathfrak{H}_{1y}) + \frac{\partial}{\partial z} (\mu \mathfrak{H}_{1z}) = 0$$

ist. Auf das andere Integral aber kann man den Gaußschen Satz (I, 15) anwenden und es in ein Oberflächenintegral verwandeln:

$$T_{12} = \frac{1}{4\pi} \int \varphi_m \mu \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds$$

genommen über die Grenze des Raumes und über alle etwaigen Unstetigkeitsflächen. Da das Feld der ganze unendliche Raum ist, so ist als seine Begrenzung die unendlich ferne Kugel anzusehen. An dieser verschwindet das Integral, vorausgesetzt, daß Strom und Magnet ganz im Endlichen liegen. Als Unstetigkeitsfläche könnte in Betracht kommen erstens eine von der Stromlinie umrandete Fläche, an der sich das Potential  $\varphi$  sprungweise um  $4\pi i$  ändern würde. Aber die Ableitung  $\partial \varphi / \partial n$ , d. h. die magnetische Kraft des Stromes ist im ganzen Raume, also auch an der Fläche stetig, hat also auf beiden Seiten der Fläche gleiche, aber in bezug auf die Normalenrichtung entgegengesetzte Werte;  $\varphi_m$  aber hat auf beiden Seiten der Fläche gleiche Werte. Daher verschwindet das Integral auch an dieser Fläche. Zweitens aber wäre das Verhalten des Integrals an der Oberfläche des Magneten zu untersuchen. Nach II, 13, Formel (12) können wir uns das Potential des Magneten als Potential einer räumlichen und einer flächenhaften Verteilung von Magnetismusemengen denken. Das Potential einer solchen Massenverteilung aber ist nach S. 42 überall, auch beim Durchgang durch die mit Magnetismusemengen belegte Fläche endlich und stetig. Der vom Strom herrührende Induktionsfluß  $\mu \frac{\partial \varphi}{\partial n}$  ist nach S. 167 ebenfalls stetig, auch dann, wenn die Oberfläche des Magneten als eine Grenzfläche eines Mediums von anderer Permeabilität angesehen wird. Daher sind weder an der Oberfläche noch im Inneren des Magneten Unstetigkeitsstellen zu berücksichtigen und das ganze Integral  $T_{12}$  ist daher gleich Null.

Voraussetzung dieser Darstellung ist, daß die beiden Felder sich überlagern, ohne sich dabei zu beeinflussen oder zu verändern. Das ist nur der Fall, wenn in der Masse des Magneten keine anderen Induktionswirkungen durch das Feld des Stromes hervorgerufen werden, als vor der Einführung des Magneten an der gleichen Stelle des Stromfeldes bestanden, wenn also das  $\mu$  des Magneten mit dem der Umgebung übereinstimmt. Wirkt die Masse des Magneten als Eisen, in dem induzierter Magnetismus entsteht, so wird durch die Einführung des Magneten das Feld des Stromes geändert und die Gesamtenergie steigt dadurch. Sehen wir aber hiervon ab, betrachten wir also nur die wechselseitige Energie der Magnetismuskraft und der Ströme, so ist bei der Uebereinanderlagerung der beiden Felder die Gesamtenergie gleich der Summe der Energien der beiden einzelnen Felder.

Dieses Resultat hat etwas Verblüffendes, denn es scheint im Widerspruch damit zu stehen, daß zwischen Magneten und Strömen Kräfte vorhanden sind, die bei einer gegenseitigen Verschiebung der beiden Systeme Arbeit leisten. Den Betrag dieser Arbeit haben wir in Abschnitt 28 als Zunahme der durch (96) definierten Größe berechnet. Allein es ist zu bedenken, daß wir bei dieser Berechnung von den tatsächlich vorhandenen Kräften ausgegangen und die bei einer Verschiebung geleistete Arbeit dargestellt haben, ohne dabei die Frage nach der Gesamtenergie des Feldes zu berühren; es ist ja überhaupt bei diesen Erörterungen gar nicht in Frage gekommen, ob das magnetische Feld, in dem sich der Strom bewegt, von anderen Strömen oder von permanenten Magneten herrührt. Wenn wir nun für den letzteren Fall durch die obigen Ausführungen zu dem Schluß kommen, daß sich die Gesamtenergie des magnetischen Feldes bei der Verschiebung eines Stromes gegen einen Magneten nicht ändert, so folgt daraus, daß die bei der Verschiebung gewonnene Arbeit nicht aus der Energie des Feldes gewonnen ist. Sie muß also einer anderen, in unseren Betrachtungen noch nicht berücksichtigten Energiequelle entstammen. Die Möglichkeit einer solchen Mitwirkung anderer Energien bei dem Vorgange ist durch die bei unseren Ableitungen in Abschnitt 28 ausdrücklich aufgestellte Bedingung gegeben, daß die Stromstärke bei der Verschiebung konstant erhalten werden soll. Es wird sich in dem Kapitel „Induktion“ in der Tat ergeben, daß zur Erfüllung dieser Bedingung ein besonderer Energieaufwand der den Strom liefernden Elektrizitätsquellen erforderlich ist. Die ganzen Betrachtungen werden also erst vollständig durch die gleichzeitige Berücksichtigung der Induktionserscheinungen.

Der merkwürdige Umstand, daß die wechselseitige Energie von Strömen und Magneten gleich Null ist, hängt damit zusammen, daß der Ausdruck

$$T = \frac{1}{8\pi} \int \mu \mathfrak{H}^2 d\mathfrak{v},$$

den wir als die magnetische Energie des Feldes bezeichnet haben, in einem von permanenten Magneten herrührenden Felde durch seine Abnahme, in einem von elektrischen Strömen herrührenden Felde dagegen durch seine Zunahme die bei einer Konfigurationsänderung von den magnetischen Kräften geleistete Arbeit ausdrückt. Es ist daher verständlich, daß in einem Felde, das aus der gleichzeitigen Wirkung eines Stromes und eines Magneten hervorgeht, dieser Ausdruck sich bei einer Verschiebung des Stromes gegen den Magneten überhaupt nicht ändert.

---

## Kapitel IV.

# Elektrodynamik.

In diesem Kapitel sollen die ponderomotorischen Wirkungen betrachtet werden, die ausschließlich zwischen elektrischen Strömen stattfinden. Die Bezeichnung „Elektrodynamik“ bezieht sich speziell auf diese Klasse von Erscheinungen.

### 1. Ponderomotorische Wirkungen in einem magnetischen Felde, welches nur einen zusammenhängenden Wirbelraum besitzt.

Wir wollen annehmen, es sei nur ein zusammenhängender Wirbelraum vorhanden, die Teile desselben seien gegeneinander beweglich, wie es z. B. verwirklicht werden kann, wenn man einen elektrischen Strom durch einen sehr biegsamen, dünnen Metalldraht oder noch besser durch einen Streifen Blattgold hindurchsendet. Es handelt sich um die hierbei eintretenden ponderomotorischen Wirkungen, aus denen man unter anderem die Gestalt des stromführenden Körpers ableiten kann, die er unter Wirkung seiner eigenen magnetischen Kräfte annimmt.

Die ponderomotorischen Wirkungen sind völlig und in einfachster Weise zu berechnen aus der magnetischen Energie  $T$  des Magnetfeldes. Wenden wir die Formel (91) des vorigen Kapitels (S. 277) an, so ergibt sie, da alle Induktionsröhren denselben Wirbelraum umschlingen:

$$T = 2\pi i^2 \Sigma \frac{1}{\omega_m}, \quad (1)$$

wo  $\omega_m$  der magnetische Widerstand einer Induktionsröhre ist,  $i$  die Stromstärke des Wirbelraums, und die  $\Sigma$  über alle Induktionsröhren des Feldes zu erstrecken ist. In der Formel (1) ist vorausgesetzt, daß die ponderomotorische Kraft  $A = 4\pi i$  für alle Röhren die gleiche ist. Es ist also abgesehen davon, daß dieselbe etwas geringer ist für diejenigen Induktionsröhren, welche ganz oder teilweise im Wirbelgebiete verlaufen. Wir wollen annehmen, daß deren Zahl sehr klein sei, wie es bei einem linearen oder flächenartig ausgebreiteten Strome der Fall ist.

Der Ausdruck  $\Sigma \frac{1}{\omega_m}$  stellt den reziproken magnetischen Widerstand des ganzen Feldes dar. Den hier vorliegenden Fall würde man mit einer Ausdrucksweise, wie sie beim elektrischen Kreislauf üblich ist, dahin charakterisieren, daß man sagt, es seien sämtliche Induktionsröhren des Feldes parallel geschaltet, da in ihnen allen die gleiche magnetomotorische Kraft wirkt. Dieselbe Regel, nach der der galvanische Widerstand eines Systems mehrerer parallel geschalteter elektrischer Stromleiter dadurch zu berechnen ist, daß der reziproke Wert desselben gleich ist der Summe der reziproken Widerstände der Systemteile (eine Regel, die man auch so ausdrückt: „Die Leitfähigkeiten addieren sich“), finden wir auch hier bei der magnetischen Parallelschaltung wieder.

Die ponderomotorischen Wirkungen gehen nach der Formel (1) so vor sich, daß der magnetische Widerstand des Magnetfeldes möglichst gering wird. Dies tritt ein, wenn der Wirbelraum des Feldes sich mög-

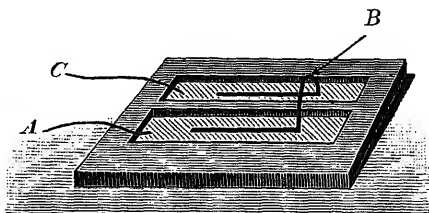


Fig. 46.

lichst weit ausdehnt, d. h. die Stromfläche, welche vom Strom umgrenzt wird, möglichst groß wird, da dann die Querschnitte der Induktionsröhren gedehnt werden, d. h. ihr magnetischer Widerstand verringert wird. Ein biegsamer Faden, durch den ein elektrischer Strom fließt, ordnet sich also in Kreisform an, da f bei vorgeschriebener Länge seiner Umgrenzung ein Maximum von Flächeninhalt besitzt, wenn die Umgrenzung die Peripherie eines Kreises bildet.

Dasselbe Gesetz der möglichsten Verringerung des magnetischen Widerstandes erkennt man auch bei folgender Erscheinung. Ein Kupferbügel B schwimmt in der in Fig. 46 dargestellten Weise in zwei elektrisch voneinander isolierten Quecksilberrinnen, in welche man den Strom von einem galvanischen Element G aus zuleitet. Der Bügel, welcher dann ein bewegliches Stück des ganzen Stromkreises G A B C G bildet, entfernt sich von den Stromzuleitungsstellen A, C, einerlei, ob der Strom in A einfließt oder in C. Diese Erscheinung wird offenbar dadurch erklärt, daß durch diese Bewegung des Bügels B die Stromfläche vergrößert, der magnetische Widerstand des Feldes verringert wird. Die Größe der Kraft, mit welcher der Bügel B abgestoßen wird, soll weiter unten (vgl. Kap. V, Abschnitt 10, d) quantitativ berechnet werden.

Dies Experiment ist ursprünglich erdacht, um dadurch die Abstoßung zwischen Stromteilen zu zeigen, welche, in derselben Richtung liegend, von gleich gerichteten elektrischen Strömen durchflossen werden. Indes kann man auf die Wirkung solcher einzelner herausgegriffener Teile des Wirbelgebietes nicht schließen, da das Wirbelgebiet stets als geschlossenes auftritt und daher nur die Summe supponierter Teil- oder Elementarwirkungen zu beobachten ist. Durch kein Experiment ist die Wirkung von Stromstücken aufeinander zu beobachten, da dieselben durch kein Experiment realisiert werden können. Denn es gibt nur geschlossene Ströme (vgl. III, 11, S. 234).

Der reziproke magnetische Widerstand des Feldes, d. h.  $\Sigma \frac{1}{\omega_m}$  hängt nur ab von der geometrischen Gestalt des Wirbelraumes und von der Lage etwaiger para- und diamagnetischer Körper zu ihm. Dagegen ist dieser Widerstand von der Stromstärke des Wirbelraumes unabhängig, da die Komponenten der magnetischen Kraft in irgendeinem Punkte alle proportional zu  $i$  sind; ihre Verhältnisse und folglich auch die Richtung der Kraftlinien sind daher von  $i$  unabhängig.

## 2. Ponderomotorische Wirkungen in einem magnetischen Felde, welches mehrere getrennte Wirbelräume besitzt.

Knüpfen wir speziell an den Fall an, daß zwei lineare Ströme der Stärken  $i_1$  und  $i_2$  im Felde vorhanden sind. Eine Anzahl von Induktionslinien umschlingt nur je einen dieser Ströme. Die Röhren, in welchen sie laufen, bilden also einen magnetischen Nebenschluß, wenn man die im vorigen Paragraphen benutzte Ausdrucksweise anwendet, die den Verhältnissen elektrischer Stromkreise entnommen ist. Der übrigbleibende Teil von den Induktionslinien des Feldes umschlingt aber beide Stromkreise; in den von ihnen durchlaufenen Röhren addieren oder subtrahieren sich die magnetomotorischen Kräfte  $4\pi i_1$  und  $4\pi i_2$ , je nach der Lage der Ströme zueinander. Addition tritt z. B. ein bei zwei parallelen Stromkurven, die von gleich gerichteten Strömen durchflossen werden; sind sie entgegengesetzt gerichtet, so tritt Subtraktion ein. Diese betreffenden Induktionsröhren sind also wiederum parallel geschaltet, da in ihnen die gleiche magnetomotorische Kraft  $4\pi (i_1 \pm i_2)$  herrscht, man kann aber sagen, daß in jeder Induktionsröhre derjenige Teil derselben, welcher in der Umgebung des Stromes  $i_1$  liegt, in Reihe geschaltet ist mit dem Teil derselben, welcher in der Umgebung des Stromes  $i_2$  liegt. Die magnetischen Widerstände solcher in Reihen geschalteter Teile addieren sich, gerade wie der galvanische Widerstand von hintereinander geschalteten Leiterteilen sich addiert.



Bezeichnet man die Anzahl der Induktionslinien, welche den Strom  $i_1$  allein umschlingen, mit  $N_{11}$ , die Anzahl der Induktionslinien, welche den Strom  $i_2$  allein umschlingen, mit  $N_{22}$ , und mit  $N_{12}$  die Zahl der Induktionslinien, welche beide Ströme umschlingen, so ist die Gesamtzahl der Induktionslinien, welche überhaupt den Strom  $i_1$  umschlingen:

$$N_1 = N_{11} + N_{12},$$

und die Gesamtzahl von Induktionslinien, welche den Strom  $i_2$  umschlingen:

$$N_2 = N_{22} + N_{12}.$$

Nach S. 270 ist die magnetische Energie  $T$  des Feldes gegeben durch die halbe Summe der Stromstärken in die Zahl der umschlingenden Induktionslinien, d. h. es ist

$$T = \frac{1}{2} (i_1 N_1 + i_2 N_2). \quad (2)$$

Andererseits ist nach dem S. 184 und 276 erörterten Gesetze vom magnetischen Kreislauf, da die magnetomotorische Kraft für die Induktionslinien  $N_{11}$  durch  $4\pi i_1$ , für  $N_{22}$  durch  $4\pi i_2$ , für  $N_{12}$  durch  $4\pi(i_1 \pm i_2)$  gegeben ist:

$$\begin{aligned} N_{11} &= 4\pi i_1 \Sigma \frac{1}{\omega_{11}}, \\ N_{22} &= 4\pi i_2 \Sigma \frac{1}{\omega_{22}}, \\ N_{12} &= 4\pi (i_1 \pm i_2) \Sigma \frac{1}{\omega_{12}}, \end{aligned} \quad (3)$$

wobei  $\omega_{11}$  den magnetischen Widerstand einer Induktionsröhre bedeutet, welche nur den Strom  $i_1$  umschlingt, und wobei in dem Ausdruck für  $N_{11}$  die Summe  $\Sigma$  über alle diese Röhren zu erstrecken ist. Analog bedeutet  $\omega_{22}$  den magnetischen Widerstand einer Induktionsröhre, welche den Strom  $i_2$  allein umschlingt, und  $\omega_{12}$  den magnetischen Widerstand einer Induktionsröhre, welche beide Ströme umschlingt.

Setzt man die Werte (3) in (2) ein, so wird die magnetische Energie:

$$T = \frac{1}{2} (L_{11} i_1^2 + 2 L_{12} i_1 i_2 + L_{22} i_2^2), \quad (4)$$

wobei bedeutet:

$$\begin{aligned} L_{11} &= 4\pi \left( \Sigma \frac{1}{\omega_{11}} + \Sigma \frac{1}{\omega_{12}} \right), \\ L_{12} &= \pm 4\pi \Sigma \frac{1}{\omega_{12}}, \\ L_{22} &= 4\pi \left( \Sigma \frac{1}{\omega_{22}} + \Sigma \frac{1}{\omega_{12}} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Es tritt das positive oder negative Zeichen für  $L_{12}$  in Kraft, je nachdem für die Induktionslinien  $N_{12}$  die magnetomotorischen Kräfte  $4\pi i_1$  und  $4\pi i_2$  sich addieren oder subtrahieren.

Wir werden im nächsten Abschnitt zeigen, daß die Werte der  $L$  von den Stromstärken  $i_1$  und  $i_2$  unabhängig sind, daß sie vielmehr nur abhängen von der Gestalt und der Lage der Wirbelräume, d. h. Stromkurven, zueinander und zu etwaigen im Felde vorhandenen para- oder diamagnetischen Körpern. Infolgedessen behält also  $L_{11}$  auch denselben Wert, wenn  $i_2 = 0$  ist. In diesem Falle bedeutet aber  $L_{11/4\pi}$  den reziproken Wert des im vorigen Abschnitt besprochenen Widerstandes des gesamten Magnetfeldes für den Strom  $i_1$ , wie eine Vergleichung der Formel (4) (für  $i_2 = 0$ ) mit der dortigen Formel (1) zeigt. Ebenso hat  $4\pi/L_{22}$  die Bedeutung des magnetischen Widerstandes des Feldes, falls der Strom  $i_2$  allein fließt.  $\pm 4\pi/L_{12}$  hat nach den Formeln (5) die Bedeutung des magnetischen Widerstandes desjenigen Raumteiles des Feldes, in welchem die Induktionslinien verlaufen, die beide Ströme umschlingen. Falls die Teile jedes Stromkreises starr miteinander verbunden sind, so daß die Stromkreise nur als Ganzes beweglich sind, wie es z. B. bei zwei Strömen der Fall ist, die in unbiegsamen Drähten fließen, so ist von den Koeffizienten  $L_{11}$ ,  $L_{12}$ ,  $L_{22}$  nur der mittlere  $L_{12}$  bei möglichen Konfigurationsänderungen des Systems variabel. Die Bewegungen erfolgen stets so, daß  $T$  möglichst groß wird. Betrachten wir zunächst den Fall, daß für die Kraftlinien  $N_{12}$  die magnetomotorischen Kräfte sich addieren, daß also  $L_{12}$  das positive Vorzeichen besitzt, so erfolgen nach Formel (4) die Bewegungen der Stromkreise zueinander in der Weise, daß  $L_{12}$  möglichst groß, d. h. der magnetische Widerstand der beide Ströme umschlingenden Induktionsröhren möglichst klein wird. Dieselben müssen sich daher zu kontrahieren streben, da durch Verkürzung ihrer Länge ihr magnetischer Widerstand abnimmt. Parallele, gleich gerichtete Ströme ziehen sich daher an.

Das Umgekehrte tritt ein, wenn sich die magnetomotorischen Kräfte  $4\pi i_1$  und  $4\pi i_2$  in den beide Ströme umschlingenden Induktionsröhren subtrahieren. Dann besitzt  $L_{12}$  das negative Vorzeichen, die Bewegungen der Stromkreise zueinander erfolgen also in der Weise, daß  $L_{12}$  möglichst klein, d. h. der magnetische Widerstand der beide Ströme umschlingenden Induktionsröhren möglichst groß wird. Dies tritt ein durch Verlängerung derselben, sie haben daher die Tendenz sich zu dehnen. Parallele, entgegengesetzt gerichtete Ströme stoßen sich daher ab.

Wie eine Vergleichung der Formeln (3) mit den Ausdrücken (5) ergibt, ist die Gesamtzahl der Induktionslinien, welche den Strom  $i_1$  umschlingen:

$$N_1 = N_{11} + N_{12} = i_1 L_{11} + i_2 L_{12}, \quad (9)$$

und die Gesamtzahl der den Strom  $i_2$  umschlingenden Induktionslinien:

$$N_2 = N_{22} + N_{12} = i_2 L_{22} + i_1 L_{12}. \quad (6')$$

Die Betrachtungen lassen sich in der angegebenen Weise auf den Fall ausdehnen, daß das magnetische Feld beliebig viele lineare Ströme besitzt. Die magnetische Energie erscheint analog wie in (4) als homogene quadratische Funktion der im Felde vorhandenen Stromstärken.

### 3. Die F. Neumannsche Formel für das elektrodynamische Potential.

Die bisherigen Entwicklungen besitzen den Vorzug großer Anschaulichkeit, dagegen den Nachteil, daß strenge numerische Werte für die ponderomotorischen Wirkungen aus ihnen nur unbequem abzuleiten sind, weil man den Verlauf der Kraftlinien erst aus der Lage der Ströme und ihren Intensitäten ermitteln müßte. In dieser Hinsicht ist eine andere Formel für die magnetische Energie oder — was dasselbe besagt — für das elektrodynamische Potential vorteilhafter.

Befindet sich ein linearer Strom der Stärke  $i$  in einem Magnetfelde, so ist nach Formel (96) des III. Kapitels Abschnitt 28, S. 282 der Ausdruck, dessen Zunahme die von der magnetischen Kraft bei einer Konfigurationsänderung geleistete Arbeit bedeutet, gegeben durch:

$$T = i \int ds \mathfrak{B}_n = i \int [\mathfrak{B}_x \cos(nx) + \mathfrak{B}_y \cos(ny) + \mathfrak{B}_z \cos(nz)] ds.$$

Rührt nun das magnetische Feld von einem zweiten Strome her, so kann man die Größe  $\mathfrak{B}_x, \mathfrak{B}_y, \mathfrak{B}_z$  durch die Komponenten  $\mathfrak{B}_x, \mathfrak{B}_y, \mathfrak{B}_z$  des Vektorpotentials ausdrücken, wie es im III. Kapitel auf S. 239 durch die Formel (21) geschehen ist. Wendet man auf das so umgestaltete Flächenintegral über  $s$  den Stokesschen Satz an (I, 10, S. 30), was gestattet ist, da  $\mathfrak{B}_x, \mathfrak{B}_y, \mathfrak{B}_z$  sowie ihre ersten Differentialquotienten überall eindeutige, stetige Funktionen sind, so erhält man:

$$T = i \int [\mathfrak{B}_x dx + \mathfrak{B}_y dy + \mathfrak{B}_z dz], \quad (7)$$

wobei das Integral über die Begrenzung von  $s$ , d. h. über die lineare Stromkurve zu erstrecken ist. Der Fortschreitungsinn der Integration muß nach der auf S. 265 getroffenen Festlegung der positiven Richtung von  $n$  der des positiven Stromes  $i$  sein.

Die Formel (7) gilt ganz allgemein, auch wenn die Magnetisierungskonstante  $\mu$  von Ort zu Ort variiert, da die Formeln (21) der S. 239 dabei ungeändert gültig bleiben und ebenso die Formel (96) der S. 282, von der wir hier ausgingen.

Wir wollen aber nun annehmen, daß  $\mu$  überall ein und denselben Wert besitzen soll. In diesem Fall ist  $\mathfrak{B}_x, \mathfrak{B}_y, \mathfrak{B}_z$  durch die Formeln (20) der S. 238 darstellbar als Funktion der in dem magnetischen Felde vorhandenen Komponenten  $j_x, j_y, j_z$  der elektrischen Strömung. Nehmen wir ferner an, daß dieselbe überhaupt nur in linearen Stromleitern stattfinden solle, so ist  $\mathfrak{B}_x, \mathfrak{B}_y, \mathfrak{B}_z$  nach (20), S. 238, darstellbar durch:

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}_x &= \mu i' \int \frac{dx'}{r}, & \mathfrak{B}_y &= \mu i' \int \frac{dy'}{r}, \\ \mathfrak{B}_z &= \mu i' \int \frac{dz'}{r}.\end{aligned}\quad (8)$$

Dabei bedeutet  $i'$  die Stromstärke des zweiten, das magnetische Feld erzeugenden linearen Stromes und  $dx', dy', dz'$  die Projektionen seines Längenelementes  $dl'$ ; und zwar ist  $dl'$  positiv gerechnet in der positiven Richtung von  $i'$ . Endlich bedeutet  $r$  die Entfernung des Elementes  $dl'$  von dem Aufpunkte P, d. h. in diesem Falle von dem Ort des Längenelementes  $dl$  des ersten Stromes.

Setzt man den Wert von  $\mathfrak{B}_x, \mathfrak{B}_y, \mathfrak{B}_z$  nach (8) in Formel (7) ein, so erhält man für T ein Doppelintegral:

$$\begin{aligned}T &= \mu ii' \left[ \int dx \int \frac{dx'}{r} + \int dy \int \frac{dy'}{r} + \int dz \int \frac{dz'}{r} \right] \\ &= \mu ii' \iint \frac{dl dl'}{r} \cos \varepsilon,\end{aligned}\quad (9)$$

falls  $\varepsilon$  den Winkel bedeutet, den die positiven Richtungen eines Elementes  $dl$  des ersten Stromkreises mit einem Element  $dl'$  des zweiten Stromkreises bilden, und  $r$  die gegenseitige Entfernung der beiden Elemente.

Dieselbe Darstellung mit Hilfe des Vektorpotentials läßt sich auf den Induktionsfluß anwenden, den ein Strom selber durch seine Fläche erzeugt, also auf die Formel (75') des III. Kapitels und ebenso auf den gesamten Induktionsfluß, der, von der eigenen Wirkung eines Stromes und von der anderer Ströme herrührend, eine Stromfläche durchsetzt, also auf die Formel (78) des III. Kapitels. Der Ausdruck für die gesamte Energie des magnetischen Feldes beliebig vieler linearer Ströme läßt sich dann entsprechend in der Form schreiben:

$$T = \frac{\mu}{2} \Sigma ii' \iint \frac{dl dl'}{r} \cos \varepsilon. \quad (10)$$

Die Summe und das Integral in (10) sind zu erstrecken über alle Kombinationen je zweier Stromelemente sowohl desselben als auch verschiedener

Stromkreise, und zwar kommt die Kombination zweier bestimmter Elemente immer zweimal vor.

Die Formel (10) heißt das Franz Neumannsche elektrodynamische Potential. — Ähnlich wie es früher beim Biot-Savart'schen Gesetze (S. 254) für die elektromagnetische Wirkung ausgesprochen ist, kann man auch hier die elektrodynamische Wirkung zerlegt denken in eine Summe von Elementarwirkungen der einzelnen Stromelemente des Magnetfeldes.

Die Bestimmung dieser Elementarwirkungen aus der Formel (10) ist aber deshalb keine eindeutig bestimmte Aufgabe, weil unbeschadet der beobachteten Wirkungen in dem zu findenden Elementargesetze additive Kräfte willkürlich bleiben, deren Summe über einen geschlossenen Strom verschwindet. Denn, wie schon oben mehrfach hervorgehoben ist, gibt es nur geschlossene Ströme, es ist also auch nur die Wirkung solcher zu beobachten.

Ein mit der Formel (10) im Einklang stehendes Elementargesetz für die scheinbare Fernwirkung zweier Stromelemente ist das sogenannte Ampèresche Gesetz, aber, wie gesagt, ist es nicht das einzige Elementargesetz, welches mit (10) im Einklang steht, und es sind tatsächlich auch noch andere Elementargesetze aufgestellt. Zu den aufgestellten könnte man aus dem angeführten Grunde eine unendliche Menge anderer Elementargesetze hinzufügen.

Eine Bedeutung haben daher diese Elementargesetze nur, wenn man durch sie rechnerische Vorteile zur Berechnung der ponderomotorischen Wirkungen im Magnetfelde erreichen kann, gegenüber dem Integralgesetze (10) oder einem anderen der oben aufgestellten Integralgesetze. Ein solcher Vorteil wird aber wohl niemals bestehen. Die Form der bisher angegebenen Elementargesetze soll daher hier nicht mitgeteilt werden.

Aus der Formel (10) folgt für den Fall, daß zwei lineare Ströme der Stärken  $i_1$  und  $i_2$  im Felde vorhanden sind, die magnetische Energie in Gestalt der Formel (4), und zwar ist dann

$$\begin{aligned} L_{11} &= \mu \int \frac{dl_1 dl_1'}{r} \cos \epsilon, \\ L_{12} &= \mu \int \frac{dl_1 dl_2'}{r} \cos \epsilon, \\ L_{22} &= \mu \int \frac{dl_2 dl_2'}{r} \cos \epsilon. \end{aligned} \quad (11)$$

$L_{11}$  ist nur über den Stromkreis  $i_1$ ,  $L_{22}$  über  $i_2$  zu erstrecken. Jede Kombination  $dl_1$ ,  $dl_1'$  bzw.  $dl_2$ ,  $dl_2'$  der demselben Strom  $i_1$  bzw.  $i_2$

zugehörigen Elemente kommt in jenen Integralen zweimal vor,  $L_{12}$  ist ein Doppelintegral, welches sowohl über  $i_1$  als über  $i_2$  zu erstrecken ist. Jede Kombination  $dl_1 dl_2$  zweier den beiden verschiedenen Strömen angehörenden Elemente  $dl_1$  und  $dl_2$  kommt bei  $L_{12}$  nur einmal vor.

Aus (11) ist ersichtlich, daß, wie es oben auf S. 299 behauptet wurde,  $L_{11}$ ,  $L_{12}$ ,  $L_{22}$  von den Stromstärken unabhängig sind und nur von der geometrischen Gestalt und Lage der beiden Stromkurven abhängen. Das erstere würde auch eintreten, falls die Magnetisierungskonstante  $\mu$  nicht überall denselben Wert besitzen sollte. Die Gestalt von  $L_{11}$ ,  $L_{12}$ ,  $L_{22}$  ist aber dann komplizierter, indem Flächenintegrale hinzukommen, die über die Begrenzungen der im Felde befindlichen para- oder diamagnetischen Körper zu erstrecken sind. Daher hängen dann  $L_{11}$ ,  $L_{12}$ ,  $L_{22}$  auch von der Lage dieser Körper zu den Stromkreisen ab, was nach der im vorigen Paragraphen erörterten Interpretation der  $L_{11}$ ,  $L_{12}$ ,  $L_{22}$  als reziproker Werte von magnetischen Widerständen des Magnetfeldes selbstverständlich ist. Weniger selbstverständlich ist, daß auch in diesem Falle die  $L_{11}$ ,  $L_{12}$ ,  $L_{22}$  von den Stromstärken  $i_1$  und  $i_2$  nicht abhängen.

Uebrigens ist bei der Berechnung der Koeffizienten  $L_{11}$ ,  $L_{12}$ ,  $L_{22}$  nach den Formeln (11) nur für den mittleren die Annahme gestattet, daß die Ströme des Magnetfeldes wirklich lineare seien. Für  $L_{11}$  und  $L_{22}$  ist diese Annahme deshalb unstatthaft, weil für gewisse Elemente des Integrales  $r = 0$  sein würde; es würde demnach  $L_{11}$  und  $L_{22}$  unendlich groß werden, was jedenfalls nicht zutreffen kann. Man hat daher zur Berechnung von  $L_{11}$  immer den Strom 1 als einen körperlichen aufzufassen, d. h. ihn als aus unendlich vielen linearen Strömen zusammengesetzt anzusehen, deren einzelne Stromstärken unendlich klein sind. In welcher Weise man so in einigen speziellen Fällen am bequemsten die Berechnung von  $L_{11}$  durchführen kann, soll weiter unten im Kapitel V, Abschnitt 10 gezeigt werden.

#### 4. Die Abhängigkeit der elektrodynamischen Wirkung von der Magnetisierungskonstante der Umgebung.

Die Formel (10) dieses Kapitels lehrt, daß die magnetische Energie linearer Ströme proportional ist der Permeabilität  $\mu$  der Umgebung der Ströme. Ihre elektrodynamische Wirkung ist also auch mit  $\mu$  proportional. Ein System linearer Ströme übt also um so kräftigere gegenseitige elektrodynamische Wirkungen aus, je größer die magnetische Leitfähigkeit ihrer Umgebung ist.

Dieses Resultat mag auf den ersten Blick deshalb überraschen, weil, wie in III, 32 auf S. 290 nachgewiesen ist, die elektromagnetische Wirkung eines Stromes  $i$ , d. h. die Wirkung auf einen permanenten Magnetpol, von der Magnetisierungskonstante des Mediums unabhängig ist. Nun kann man aber einen permanenten Magneten der Polstärke  $\pm m$  ersetzen durch ein dünnes Solenoid, welches von einem derartigen Strom  $i'$  durchflossen wird, daß  $4\pi m$  Kraftlinien in seinem Inneren erzeugt werden. Man sollte daher denken, daß, wenn die Wirkung von  $i$  auf die Magnetpole  $\pm m$  von dem  $\mu$  der Umgebung unabhängig ist, dann auch die Wirkung von  $i$  auf das Stromsystem  $i'$  von  $\mu$  nicht abhängen kann.

Bei diesem Schlusse ist aber der prinzipielle Unterschied übersehen, der zwischen einem permanenten Magneten und einem Solenoid besteht.

Einen permanenten Magneten haben wir immer als ein Gebilde von konstanter Polstärke angesehen, die sich nicht ändert, wenn die Umgebung des Magneten von einem Medium von anderer Magnetisierungskonstante erfüllt wird. Das gilt wenigstens in erster Annäherung, solange die Unterschiede der Permeabilität der in Betracht kommenden Medien nicht zu groß sind. Es gilt, wie auf S. 209 und 210 erörtert worden ist, wahrscheinlich nicht mehr in Medien so hoher Permeabilität, wie es die ferromagnetischen Medien sind. Aber mit der angedeuteten Einschränkung in bezug auf ihren Gültigkeitsbereich haben wir uns der Vorstellung von der konstanten Polstärke der permanenten Magnete bedient. Sie ist die Grundlage für die Anwendung des Coulombschen Gesetzes in seiner erweiterten Fassung, wie wir sie in II, 16, Formel (21), S. 162 gegeben haben, auf wirkliche permanente Magnete. Wenn sie konstante Polstärke haben, so muß ihre gegenseitige Wirkung mit wachsender Permeabilität des Zwischenmediums abnehmen. Auf derselben Vorstellung beruht der in III, 32 entwickelte Grundsatz, daß die Wirkung zwischen Strom und Magnet von der Natur des Zwischenmediums unabhängig ist; er gilt ebenfalls nur so lange, als die Polstärke eines Stahlmagneten durch das Eintauchen in ein Medium von anderer Magnetisierbarkeit nicht geändert wird. Sobald man aber den Magneten durch ein Solenoid ersetzt, in dessen Windungen ein konstanter Strom fließt, hat man es nicht mehr mit einem Gebilde von konstanter Polstärke, sondern von konstanter magnetomotorischer Kraft zu tun. Schon wenn die äußere Umgebung des Solenoids von einem Medium höherer Magnetisierbarkeit erfüllt wird, muß die Kraftlinienzahl des Solenoides etwas wachsen, da ja der magnetische Widerstand der äußeren Teile des Feldes dadurch verringert wird (vgl. III, 18); noch weit mehr aber ist dies der Fall, wenn, wie es bei einem Solenoid möglich ist, auch das ganze Innere von dem Medium ausgefüllt wird. In diesem Falle muß die Anzahl der das Solenoid durch-

setzenden Induktionslinien im Verhältnis  $\mu : 1$  zunehmen, wenn die Magnetisierungskonstante des Feldes in diesem Verhältnis wächst. Daher müssen also die Kraftwirkungen zweier Solenoide oder zweier beliebiger Ströme aufeinander mit der Permeabilität zunehmen.

Die Verhältnisse liegen ganz ähnlich wie in der Elektrostatik bei den Kraftwirkungen zwischen Leitern, wenn man sie einmal isoliert und mit konstanter Elektrizitätsmenge geladen und das andere Mal mit einer Elektrizitätsquelle von konstanter Potentialdifferenz verbunden denkt (vgl. I, 31, S. 67). Die anziehende Wirkung, die die beiden Platten eines Kondensators aufeinander ausüben, wird kleiner im Verhältnis  $1 : \epsilon$ , wenn die Luft zwischen den Platten durch einen Isolator von der Dielektrizitätskonstante  $\epsilon$  ersetzt wird, vorausgesetzt, daß dabei die Platten isoliert sind und ihre ursprüngliche Ladung unverändert behalten. Werden sie dagegen in den beiden Fällen auf konstanter Spannungsdifferenz gehalten, so wächst ihre Anziehung im Verhältnis von  $\epsilon : 1$ , weil die Ladung in diesem Verhältnisse zunimmt und die Kraft dem Quadrat der Ladung proportional ist.

Will man die Eigenschaften permanenter Magnete mittels Solenoiden darstellen, so ist leicht ersichtlich, daß dies nur möglich ist mit Solenoiden, die sehr dünn im Verhältnis zu ihrer Länge sind, und deren Innenraum bei einem Wechsel des äußeren Mediums nicht verändert wird. Denn infolge der ersten Bedingung ist bei solchen Solenoiden der äußere magnetische Widerstand so gering gegenüber dem inneren, daß er vernachlässigt werden kann. Bleibt daher entsprechend der zweiten Bedingung bei der Verbringung des Solenoides in ein anderes Medium die Veränderung der Permeabilität auf den Außenraum beschränkt, während der Innenraum seine Permeabilität unverändert beibehält, so hat das Solenoid konstanten Kraftfluß und die ponderomotorische Kraft zwischen den Polen derartiger Solenoide muß der Permeabilität des Außenmediums umgekehrt proportional sein, wie bei permanenten Magneten. Eine genauere Berechnung darüber hat Boltzmann<sup>1)</sup> angestellt.

Für lineare Ströme ist es zur Berechnung ihrer magnetischen Energie, d. h. ihrer ponderomotorischen Wirkungen, ganz gleichgültig, ob die Magnetisierungskonstante des linearen Wirbelraumes selber, d. h. des stromführenden Leiters, denselben Wert besitzt wie die der Umgebung oder nicht. Für körperliche Ströme, d. h. körperliche Wirbelräume, würde dies nur eintreten, falls die magnetischen Kraftlinien an der Oberfläche des stromführenden Körpers, d. h. des Wirbelraumes, dieser parallel liegen. Im allgemeinen werden sie dies nicht tun. Dann gilt nicht mehr die oben S. 301 aufgestellte einfache Darstellung (8) für die Komponenten  $\mathfrak{B}_x$ ,  $\mathfrak{B}_y$ ,  $\mathfrak{B}_z$  des Vektorpotentials, und daher kann man auch

<sup>1)</sup> L. Boltzmann. Wied. Ann. 48. S. 100, 1893. — Wiss. Abhandl. 3, S. 398.



nicht mehr die magnetische Energie nach der Formel (10) als Summe der Neumannschen Potentiale berechnen, welche für die einzelnen linearen Ströme gelten würden, in die man ein System körperlicher Ströme stets zerlegt denken kann. Die elektrodynamische Einwirkung zweier Ströme, die in sehr dicken Eisendrähten fließen, welche einander relativ nahe sind, würde ein solcher Fall sein, in welchem eine kompliziertere Berechnung an Stelle der zuletzt mitgeteilten einfachen treten würde. Nach dem in III, 12, S. 241, Formeln (25) und (26) gegebenen Ansatz für  $\mathfrak{G}_x$ ,  $\mathfrak{G}_y$ ,  $\mathfrak{G}_z$  muß man in diesem Falle die Oberfläche der Eisendrähte als Sitz magnetischer Belegungen annehmen.

## 5. Allgemeine Betrachtungen über die Energieänderungen bei Bewegung von Strömen oder Magneten gegeneinander.

Der im vorigen Paragraphen herangezogene Vergleich läßt sich noch weiter ausdehnen auf die Energieänderungen, die bei einer Konfigurationsänderung in dem einen und in dem anderen Falle eintreten. Wir haben in I, 42, S. 106 ausdrücklich darauf hingewiesen, daß nur bei konstanter Ladung isolierter Leiter die Arbeit der elektrischen Kräfte aus der Energie des Feldes genommen wird und die Energie sinkt, wenn die Leiter sich im Sinne der Kräfte bewegen, die sie aufeinander ausüben, daß dagegen, wenn die Leiter auf konstanter Potentialdifferenz gehalten werden, die Energie des Feldes nicht nur nicht abnimmt, bei Bewegung im Sinne der wirkenden Kräfte, sondern sogar zunimmt, und daß sowohl die geleistete Arbeit als auch die Zunahme der Feldenergie auf Kosten der Energie der Elektrizitätsquelle kommt, die die Spannung konstant erhält. Ganz die gleichen Verhältnisse liegen vor bei Magneten einerseits und Solenoiden andererseits. Bei den ersteren entstammt die Arbeit bei einer Konfigurationsänderung der Energie des Feldes. Die Kräfte, die die Magnete aufeinander ausüben, suchen sie so zu bewegen, daß die Energie des Feldes dabei abnimmt. Ersetzen wir dagegen die Magnete durch Solenoide, so nimmt bei der gleichen Bewegung die Feldenergie nicht ab, sondern zu.

Dies möge an dem einfachsten Beispiel zweier gleicher, etwa kreisförmiger Strombahnen erläutert werden. Befinden sich die beiden Strombahnen in unendlicher Entfernung voneinander, so ist die Zahl  $N_{12}$  der Kraftlinien, die beide Strombahnen umschlingen, unendlich klein. Die Gesamtenergie des Feldes ist daher nach (2) einfach:

$$T = \frac{1}{2} (i_1 N_{11} + i_2 N_{22}) = i N,$$

wenn wir beide Stromkreise als gleichgestaltet und von gleichen Strömen durchflossen annehmen. Sind die Stromkreise frei beweglich, so werden sie sich unter dem Einfluß der Kräfte, die sie aufeinander ausüben, so lange bewegen, bis sie sich mit parallelen Stromrichtungen nebeneinander gelegt haben. Das Feld ist dann so, als ob nur ein einziger Stromkreis vorhanden ist, in dem der Strom  $2i$  fließt. Die Gesamtenergie ist daher, da jetzt jede Strombahn auch die sämtlichen Kraftlinien der anderen Strombahn umschlingt:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} [i_1 (N_{11} + N_{22}) + i_2 (N_{11} + N_{22})] \\ &= \frac{1}{2} (i_1 + i_2) (N_{11} + N_{22}) \\ &= 2iN, \end{aligned}$$

wenn wir wieder  $i_1 = i_2 = i$  und  $N_{11} = N_{22} = N$  setzen. Die Gesamtenergie ist also in diesem zweiten Falle doppelt so groß wie im ersten. Dies rührt daher, daß die Felder der beiden Stromschleifen sich vollständig addieren; statt der ursprünglichen zwei Felder erhält man eines von der doppelten Feldstärke.

Die Zunahme der Energie mißt nach III, 21—23 die von den ponderomotorischen Kräften geleistete Arbeit. Beides aber, sowohl die geleistete Arbeit wie die Zunahme der Feldenergie muß in diesem Falle offenbar von einer anderen, bisher noch nicht in Betracht gezogenen Energiequelle gedeckt werden. Die Möglichkeit für das Hineinspielen einer anderen Energiequelle ist durch die Bedingung der Konstanzhaltung der elektrischen Ströme während der angenommenen Bewegungen gegeben, wie aus den Darlegungen des nächsten Kapitels hervorgehen wird <sup>1)</sup>.

## 6. Rekapitulation der Formeln für die magnetische Energie.

Wir haben die magnetische Energie  $T$  des Magnetfeldes dargestellt als Raumintegrale, Flächenintegrale über die Stromflächen, welche von linearen Strömen des Feldes umgrenzt werden, und Linienintegrale über diese Ströme selbst.

Zunächst gewannen wir im II. Kapitel, Abschnitt 25, auf S. 182 und entsprechend im III. Kapitel, Abschnitt 21 auf S. 268 das Raumintegral:

$$T = \frac{1}{8\pi} \int \mu (\mathfrak{Q}_x^2 + \mathfrak{Q}_y^2 + \mathfrak{Q}_z^2) dv = \frac{1}{8\pi} \int \mathfrak{B} \mathfrak{H} dv.$$

<sup>1)</sup> Hinsichtlich der hier angestellten Betrachtungen möge auch auf L. Boltzmann, Vorlesungen über Maxwells Theorie der Elektrizität und des Lichtes (Leipzig 1893), II. Teil, 11. Vorlesung verwiesen werden.

Die im III. Kapitel in Abschnitt 24 und 25 mitgeteilten Formeln (87), (91), (91'), die  $T$  als Summe der magnetischen Energien darstellen, welche die Induktionsröhren des Feldes besitzen, sind ebenfalls als Raumintegrale aufzufassen. Diese Formeln waren:

$$T = \frac{1}{8\pi} \Sigma A N = \frac{1}{8\pi} \Sigma \frac{A^2}{\omega_m} = \frac{1}{8\pi} \Sigma N^2 \omega_m.$$

Diese Darstellungen gelten, auch wenn die Permeabilität  $\mu$  mit dem Ort variiert. Hat sie überall denselben Wert, so kann man aus der Formel (9) des vorliegenden Kapitels auf S. 301 eine Darstellung von  $T$  in Form eines doppelten Raumintegrals gewinnen, falls man körperliche Ströme, deren Stromdichte  $j$  die Komponenten  $j_x, j_y, j_z$  hat, als ein System linearer Ströme auffaßt. Man muß dann setzen, falls  $dq$  den Querschnitt einer Stromröhre bezeichnet,  $dl$  ein Stück ihrer Länge,  $dv$  das Volumen dieses Stückes:

$$i = j dq, \quad j_x = j \cos(lx) = j \frac{dx}{dl} \text{ usw.}, \quad dv = dq dl, \quad (12)$$

daher  $i dx = j_x dv$  usw., und erhält so aus (9):

$$T = \frac{\mu}{2} \iint \frac{j_x j'_x + j_y j'_y + j_z j'_z}{r} dv dv'. \quad (13)$$

Dieses sechsfache Integral ist so zu nehmen, daß dieselben beiden Raumelemente  $dv, dv'$  stets zweimal vorkommen. Es ist über den ganzen Raum zu erstrecken oder auch nur über seine stromführenden Teile, was auf dasselbe hinauskommt, da nur in letzteren die  $j_x, j_y, j_z$  von Null verschieden sind.

In Formel (75') des Abschnittes 21 des III. Kapitels, S. 267 ist  $T$  als Summe der Flächenintegrale über die Stromflächen dargestellt, welche von den linearen Strömen umgrenzt werden, in die man die Wirbelräume jedes Magnetfeldes zerlegt denken kann:

$$T = \frac{1}{2} \Sigma i \int \mu [\mathfrak{G}_x \cos(nx) + \mathfrak{G}_y \cos(ny) + \mathfrak{G}_z \cos(nz)] ds$$

oder

$$T = \frac{1}{2} \Sigma i \int \mu \mathfrak{G}_n ds.$$

Auch hierin kann  $\mu$  mit dem Ort variieren.

Durch Einführung der Komponenten  $\mathfrak{B}_x, \mathfrak{B}_y, \mathfrak{B}_z$  des Vektorpotentials erhält man nach der Formel (7) des Abschnittes 3 dieses Kapitels (S. 300)  $T$  als Summe von Linienintegralen über die linearen Ströme des Feldes:

$$T = \frac{1}{2} \Sigma i \int (\mathfrak{B}_x dx + \mathfrak{B}_y dy + \mathfrak{B}_z dz). \quad (14)$$

$\mu$  kann mit dem Ort variieren,  $\mathfrak{B}_x, \mathfrak{B}_y, \mathfrak{B}_z$  sind beständig durch die Gleichungen (21) und (23) des III. Kapitels, S. 239 definiert.

Für zwei lineare Ströme  $i_1$  und  $i_2$  erhält man aus (14) die Formel (4) dieses Kapitels (S. 298), nämlich:

$$T = \frac{1}{2} (L_{11} i_1^2 + 2 L_{12} i_1 i_2 + L_{22} i_2^2).$$

Hat  $\mu$  überall denselben Wert, so ergibt sich aus (14) die Formel (10) des Abschnittes 3 dieses Kapitels (S. 301), nämlich:

$$T = \frac{\mu}{2} \Sigma ii' \int \frac{dl dl'}{r} \cos \varepsilon.$$

Die Koeffizienten  $L_{11}, L_{12}, L_{22}$ , welche die magnetische Energie zweier linearer Ströme bestimmen, sind in diesem Falle durch die Formeln (11) des Abschnittes 4 dieses Kapitels (S. 302) ausdrückbar.

Die Formel (13) ist eine Summe von Linienintegralen. Diese ist als ein Raumintegral aufzufassen, wenn die Ströme ein räumliches Kontinuum erfüllen. Da in diesem Falle nach den Gleichungen (12) für  $i dx$  zu setzen ist  $j_x dv$ , so erhält man aus (14) folgende Darstellung von  $T$  als Raumintegral:

$$T = \frac{1}{2} \int (j_x \mathfrak{B}_x + j_y \mathfrak{B}_y + j_z \mathfrak{B}_z) dv. \quad (15)$$

## Elektroinduktion im Magnetfeld.

### 1. Anwendung des Prinzips der Erhaltung der Energie auf die ponderomotorischen Wirkungen eines Magnetfeldes.

Die Kraftlinien des Magnetfeldes eines Stromsystems sind geschlossene Kurven. Ein Magnetpol würde daher fortwährend unter Erzeugung von Arbeit auf einer geschlossenen Kurve im Felde rotieren, wenn er den magnetischen Kräften stets frei folgen könnte. Eine solche experimentelle Anordnung, in welcher dies erreicht ist, haben wir im III. Kapitel auf S. 288 kennen gelernt; dort rotierten zwei Magnetpole fortwährend um einen elektrischen Strom. Wenn es nun keinen Arbeitsaufwand erfordern würde, diesen Strom unverändert in derselben Stärke zu erhalten, so würde der beschriebene Apparat ein Perpetuum mobile darstellen. Denn nehmen wir z. B. an, der Magnetpol habe von einem Ausgangspunkte A den elektrischen Strom gerade einmal umkreist, er sei also wieder zu dem Ausgangspunkte A zurückgekehrt, so ist die Konfiguration des ganzen Systems genau dieselbe, wie sie ursprünglich war. Trotzdem aber ist Arbeit geleistet, jener Rotationsapparat könnte z. B. eine kleine Maschine treiben.

Man hat die Ueberzeugung, daß es kein Perpetuum mobile gibt. Es muß daher einen Arbeitsaufwand erfordern, einen elektrischen Strom in unveränderter Stärke  $i$  zu erhalten während einer Zeit  $t$ , in welcher er mechanische Arbeit leistet. Dieser Arbeitsaufwand muß der Quelle entnommen sein, welche den elektrischen Strom erzeugt, d. h. in unserem Falle dem galvanischen Elemente.

In dem beschriebenen Falle nun, in welchem der Strom durch Kupferdrähte fließt, erfordert es schon einen gewissen Arbeitsaufwand vom galvanischen Elemente, um den Strom in unveränderter Stärke zu erhalten, auch wenn derselbe keine mechanische Arbeit leistet. Dies ist daraus zu schließen, daß der stromführende Draht sich erwärmt (Joulesche Wärme). Nennen wir die innerhalb der Zeit  $t$  entwickelte Wärmemenge  $W$ , so muß offenbar die ihr entsprechende Energie dem

galvanischen Elemente entnommen sein. Und in der Tat finden wir in demselben chemische Umsetzungen, welche, auch falls sie keinen elektrischen Strom erzeugen, Wärme produzieren, d. h. welche einem Herabsinken auf einen kleineren, in ihnen selbst enthaltenen Energiewert entsprechen.

Nun wäre es denkbar, daß bei Tätigkeit des Rotationsapparates die in den stromführenden Drähten entwickelte Wärme kleiner wäre, als wenn der Rotationsapparat ruhte, daß also das galvanische Element stets die gleiche Energiemenge produzierte, daß sich dieselbe bei ruhendem Apparat vollständig in Wärme umsetzte, dagegen bei rotierendem Apparat auch teilweise in mechanische Arbeit.

Dieser Auffassung widerspricht aber die Erfahrung, aus der sich ergibt, daß in ein und demselben stromdurchflossenen Drahte die entwickelte Wärmemenge  $W$  bei unveränderter Stromstärke stets dieselbe bleibt, einerlei ob der Strom dabei mechanische Arbeit leistet oder nicht. Wir können daher von dem Energiewert dieser Wärmemenge  $W$  bei den hier gestellten Fragen, in denen vorausgesetzt wird, daß die Stromstärke  $i$  stets dieselbe bleiben solle, ganz absehen, da sie immer dieselbe bleibt.

Es geht aber aus diesen Erörterungen hervor, daß ein **größerer** Energieaufwand erforderlich ist, um einen Strom von bestimmter Stärke  $i$  während einer Zeit  $t$  zu unterhalten, wenn er dabei zugleich durch Bewegung von Magneten oder anderen Strömen mechanische Arbeit leistet, als wenn er dieses nicht tut. Und tatsächlich beobachtet man, daß man mehr galvanische Elemente hintereinander schalten muß, wenn die Stromstärke bei tätigem Rotationsapparate einen bestimmten Wert  $i$  besitzen soll, als wenn der Apparat nicht in Tätigkeit ist.

Die von dem elektrischen Strome geleistete Arbeit wird also durch Mehraufwand der chemischen Energie der neu hinzugeschalteten galvanischen Elemente ausgeglichen. Man kann also den Vorgang bei dem tätigen Rotationsapparate auch so auffassen, daß dessen mechanische Arbeit nicht eigentlich von den dem elektromagnetischen Felde inwohnenden ponderomotorischen Kräften geleistet wird, sondern von der chemischen Energie der neu hinzugeschalteten galvanischen Elemente, und daß das elektromagnetische System nur dazu dient, die Möglichkeit dafür zu schaffen, daß die chemische Energie sich in mechanische Energie umsetzen kann.

## 2. Definition der elektromotorischen Kraft der Induktion.

Den Mehraufwand an Energie, welcher dazu erforderlich ist, um einen Strom der Stärke  $i$  während einer Zeit  $t$  zu unterhalten, während der derselbe mechanische Arbeit leistet, setzt man gleich  $Eit$  und nennt  $E$  die elektromotorische Kraft der Induktion. Der Name „elektromotorisch“ ist deshalb gewählt, weil die aufgewandte Energie nicht direkt zur Bewegung von Massen dient, d. h. ponderomotorisch wirkt, sondern zur Unterhaltung der Stromstärke, welche sinken würde, falls von außen dem System keine Energie zugeführt würde.

Man kann sich daher auch den Vorgang so vorstellen, daß durch die im System geleistete mechanische Arbeit, d. h. durch die Bewegung seiner Teile, ein Strom induziert<sup>1)</sup> wird, welcher die entgegengesetzte Richtung besitzt wie der vorhandene Strom  $i$ . Der induzierte Strom sucht also den Strom  $i$  zu schwächen, und die von außen (von den Elementen) dem Strom  $i$  zugeführte Energie dient dazu, der elektromotorischen Gegenkraft  $E$  der Induktion das Gleichgewicht zu halten.

Durch die getroffene Festsetzung, nach der  $Eit$  bei jedem Kreisprozeß numerisch gleich der vom Strom geleisteten mechanischen Arbeit sein muß, ist die elektromotorische Kraft  $E$  in absolutem Maße meßbar, da man  $i$ ,  $t$  und die erzeugte Arbeit in absolutem Maße durch die Einheiten der Masse, Länge und Zeit numerisch ausdrücken kann. Die Dimensionsformel der elektromotorischen Kraft  $E$  ergibt sich daher, da  $Eit$  die Dimension einer Arbeit hat, d. h. da

$$[E] [i] t = M L^2 T^{-2}$$

ist, unter Berücksichtigung des Wertes von  $[i]$  nach Formel (4) des III. Kapitels auf S. 224 zu:

$$[E] = M^{1/2} L^{3/2} T^{-2}. \quad (1)$$

Diejenige elektromotorische Kraft, welche im cgs-System den numerischen Wert  $10^8$  besitzt, nennt man ein Volt (nach dem italienischen Physiker Volta). Es ist also

$$1 \text{ Volt} = 10^8 \text{ g}^{1/2} \text{ cm}^{3/2} \text{ sek}^{-2}. \quad (2)$$

Weshalb man  $10^8$  absolute Einheiten als praktische Einheit der elektromotorischen Kraft eingeführt hat, soll weiter unten erörtert werden.

<sup>1)</sup> Die hier zu besprechende Induktion elektrischer Ströme im Magnetfelde ist eine wesentlich andere Erscheinung, als die im Kapitel II, Abschnitt 21, S. 170 besprochene Induktion von scheinbarem Magnetismus im Magnetfeld. — Zur deutlicheren Unterscheidung kann man daher erstere Elektroinduktion, letztere induzierten Magnetismus nennen.

### 3. Betrachtung beliebig kleiner Zustandsänderungen.

Bisher sind Kreisprozesse des elektromagnetischen Systems betrachtet, d. h. dasselbe sollte vollständig in seine anfängliche Konfiguration und seinen Anfangszustand zurückkehren. Für diese Prozesse muß die vom System geleistete mechanische Energie gleich sein der Arbeit  $E$  it der von außen entnommenen elektromotorischen Kraft  $E$ , welche der Gegenkraft der Induktion das Gleichgewicht hält, oder, wie wir kurz sagen wollen, die mechanische Arbeit muß gleich der zugeführten elektrischen Energie sein.

Bei beliebig kleinen Zustandsänderungen des Systems, welche keine Kreisprozesse darstellen, ist es nicht mehr nötig, daß die elektrische Energie, welche zuzuführen notwendig ist, um die Stromstärke konstant zu erhalten, gleich ist der bei der Zustandsänderung geleisteten mechanischen Arbeit. Das Prinzip der Erhaltung der Energie erfordert nur in diesem Falle, daß die Differenz zwischen der zugeführten elektrischen Energie und der geleisteten mechanischen Arbeit gleich ist der Aenderung, d. h. dem vollständigen Differential einer gewissen eindeutigen Funktion  $U$  des Zustandes des Systemes. Bei Kreisprozessen verschwindet die Summe dieser Aenderungen von  $U$ , und daher ist bei ihnen jene Differenz gleich Null. Sind mehrere Ströme im Felde vorhanden, so ist jedem derselben elektrische Energie zuzuführen, damit seine Stromstärke erhalten bleibt. In diesem Falle ist daher, falls die Konfigurationsänderung des Systems in der kleinen Zeit  $dt$  erfolgt:

$$\sum E i dt = dT + dU, \quad (3)$$

wo die  $\Sigma$  über alle Ströme des Feldes zu erstrecken ist und  $dT$  die geleistete mechanische Arbeit, d. h. den Zuwachs des elektrodynamischen Potentials (der magnetischen Energie) des ganzen Feldes bedeutet.

### 4. Die Erfahrungstatsachen.

Die Betrachtungen der vorstehenden Abschnitte lehren, daß nach dem Satz von der Erhaltung der Energie mit der Bewegung von Strömen in magnetischen Feldern oder von Magneten im Felde elektrischer Ströme eigentümliche Wirkungen verknüpft sein müssen, die man als Induktionswirkungen bezeichnet. Bei der Art, wie die Notwendigkeit der Existenz dieser Wirkungen im vorstehenden abgeleitet ist, könnte es scheinen, als ob diese Wirkungen nur dann aufträten, wenn zwischen den bewegten Systemen tatsächlich Kräfte vorhanden sind, gegen die oder in deren Sinn die Bewegung erfolgt, wenn also tatsächlich mechanische



Arbeit bei dem Vorgange geleistet oder gewonnen wird. Die Erfahrung lehrt aber, daß das Auftreten der Induktionserscheinungen an diese Bedingung nicht geknüpft ist. Bei dem in Abschnitt 1 betrachteten Falle rotieren die Magnetpole um den Leiter unter dem Einfluß des magnetischen Feldes, das der Strom im Leiter erzeugt. Dabei muß ein gewisses Mehr an elektromotorischer Kraft in Gestalt der Hinzufügung einer passenden Zahl von galvanischen Elementen aufgewandt werden, um den Strom auf seiner ursprünglichen Höhe zu erhalten. Fließt von Anfang an kein Strom in dem Leiter, so ist auch keine Kraft vorhanden, die die Magnete in Bewegung setzte. Werden sie aber nun durch einen äußeren Antrieb in die gleiche Rotation versetzt wie vorher durch das magnetische Feld, so ist auch jetzt derselbe Betrag von elektromotorischer Kraft wie vorher erforderlich, um den bestehenden Zustand des Leiters aufrechtzuerhalten, d. h. in diesem Falle, um zu bewirken, daß der Leiter stromlos bleibt. Wird diese elektromotorische Kraft nicht angelegt, so entsteht in dem vorher stromlosen Leiter durch die Rotation der Magnete ein Strom, der demjenigen entgegengerichtet ist, der die Rotation der Magnete hervorrufen würde. Das magnetische Feld dieses induzierten Stromes würde also der Bewegung der Magnete entgegenwirken, und diese Bewegung könnte nur durch eine äußere Kraft unter Aufwand einer bestimmten Arbeit aufrechterhalten werden, wenn der induzierte Strom dabei dauernd fließen soll. Das Aequivalent der aufgewandten mechanischen Arbeit beruht dann in der elektrischen Arbeit, die der induzierte Strom im Leiter leistet. Die Stärke dieses Stromes hängt vom Widerstande des Leitungskreises ab, in dem er fließt, nach dem bekannten Ohmschen Gesetze. Ist der Widerstand unendlich, d. h. der Stromkreis offen, so kommt der Strom gar nicht zustande. Die Induktionswirkung äußert sich dann in einer der induzierten elektromotorischen Kraft entsprechenden Spannungsdifferenz an den freien Enden des Leiters, geradeso wie sie zwischen den Polen eines offenen galvanischen Elementes besteht. Durch eine bestimmte Rotation der Magnete wird also in dem Leiter eine elektromotorische Kraft von bestimmtem Betrage hervorgerufen, und diese Wirkung ist ganz unabhängig davon, ob in dem Leiter bereits ein Strom fließt oder nicht, und unabhängig davon, ob die induzierte elektromotorische Kraft in dem Leiter einen Strom erzeugt oder nur als Spannung an den Enden des offenen Leiters zur Geltung kommt oder durch eine gegengeschaltete elektromotorische Kraft kompensiert wird. Wir wollen auch noch die Bemerkung hinzufügen, daß die induzierte elektromotorische Kraft durchaus unabhängig ist vom Material des Leiters, auf den die Induktionswirkung ausgeübt wird.

Der Induktionsvorgang ist ausschließlich bedingt durch eine räum-

liche Verschiebung eines Magnetfeldes gegen einen Leiter. Dabei hat die Erfahrung des weiteren gelehrt, daß es nur auf die relativen Verschiebungen beider ankommt. Wenn in einer Spule eine Induktionswirkung hervorgerufen wird dadurch, daß ein Magnet der Spule genähert wird, so kommt die gleiche Wirkung zustande, wenn umgekehrt der Magnet ruht und die Spule ihm genähert wird. Man nennt diese Tatsache den Satz von der Relativität der Induktionswirkungen.

Die Erfahrung lehrt endlich, daß es nur auf die Veränderungen des magnetischen Feldes am Ort des Leiters ankommt, unabhängig davon, wodurch diese Veränderungen hervorgerufen werden. Befindet sich ein Leiter im magnetischen Felde einer stromdurchflossenen Spule, so kann eine elektromotorische Kraft in ihm nicht bloß durch eine Bewegung der Spule induziert werden, sondern auch durch eine Aenderung der Stromstärke in ihr, und wenn in beiden Fällen in derselben Zeit die gleiche Veränderung des magnetischen Feldes am Orte des Leiters eintritt, so ist auch in beiden Fällen die induzierte elektromotorische Kraft die gleiche. Ganz allgemein ist die induzierte elektromotorische Kraft proportional der Aenderungsgeschwindigkeit des magnetischen Feldes am Ort des Leiters.

## 5. Die induzierte elektromotorische Kraft bei zwei linearen Strömen.

Es möge zunächst auf Grund der besprochenen Erfahrungstatsachen der spezielle Fall betrachtet werden, daß nur zwei lineare Ströme  $l_1$  und  $l_2$  der Stromstärken  $i_1$  und  $i_2$  im Felde vorhanden sind. Die so erhaltenen Resultate lassen sich leicht auf ein beliebig gestaltetes Magnetfeld verallgemeinern.

Haben die beiden Ströme eine feste Lage zueinander und ändert sich die Stromstärke  $i_2$  um  $di_2$  innerhalb der Zeit  $dt$ , so ist die Aenderungsgeschwindigkeit des magnetischen Feldes an jeder Stelle des Feldes proportional mit  $\frac{di_2}{dt}$ . Daher kann die in dem Stromkreise  $l_1$  induzierte elektromotorische Kraft dargestellt werden durch den Ausdruck:

$$E_1 = B \frac{di_2}{dt}, \quad (4)$$

wobei  $B$  nur von der Gestalt und relativen Lage der beiden Stromkreise  $l_1$  und  $l_2$  abhängt, dagegen von den Stromstärken  $i_1$  und  $i_2$  unabhängig ist. Man nennt  $B$  den Koeffizienten der Induktion des Stromes  $l_2$  auf den Strom  $l_1$ .

In dem betrachteten Falle müßte man also dem Strome  $l_1$ , wenn

man seine Stromstärke konstant erhalten wollte, innerhalb der Zeit  $dt$ , während welcher die Veränderung  $di_2$  erfolgt, eine elektrische Energie zuführen, deren Wert ist

$$E_1 i_1 dt = i_1 B di_2.$$

Wenn der Strom  $i_2$  seine Stärke  $i_2$  beibehält, dagegen seine Lage gegen den Strom  $i_1$  ändert, so kann man sich diesen Vorgang dadurch ersetzt denken, daß in seiner Anfangslage seine Stromstärke auf 0 abnimmt, daß er dann verschoben wird in seine Endlage und daß, wenn er diese erreicht hat, die Stromstärke wieder auf  $i_2$  anwächst. Ist der Koeffizient der Induktion zwischen  $i_1$  und  $i_2$  in der Anfangslage von  $i_2$  gleich  $B$ , in der Endlage gleich  $B + dB$ , so ist die durch die Aenderung der Stromstärke von  $i_2$  auf Null in  $i_1$  induzierte elektromotorische Kraft  $E'$  gegeben durch

$$E' dt = - B i_2,$$

dagegen wird durch Anwachsen der Stromstärke von Null auf  $i_2$  in der Endlage von  $i_2$  eine elektromotorische Kraft  $E''$  in  $i_1$  induziert, welche ist:

$$E'' dt = (B + dB) i_2.$$

Die bei dem ganzen Vorgang in  $i_1$  induzierte elektromotorische Kraft  $E_1$  hat daher den Wert

$$E_1 = E' + E'' = i_2 \frac{dB}{dt}. \quad (5)$$

Es ist allerdings der soeben eingeschlagene Weg zur Ableitung dieser Formel deshalb nicht streng, weil bei dem wirklichen Vorgang mechanische Arbeit geleistet wird, bei dem gedachten Vorgang dagegen nicht. Aber wir haben schon in dem vorhergehenden Paragraphen darauf hingewiesen, daß die Induktionswirkungen unabhängig davon sind, ob tatsächlich Arbeit dabei geleistet wird oder nicht. Auch hat das Experiment die Formel (5) in der Tat bestätigt.

Ändert der Strom  $i_2$  sowohl seine Stärke wie seine Lage gegen  $i_1$ , so wird in  $i_1$  eine elektromotorische Kraft induziert, welche sich durch Addition der beiden Formeln (4) und (5) ergibt zu:

$$E_1 = B \frac{di_2}{dt} + i_2 \frac{dB}{dt} = \frac{d(i_2 B)}{dt}. \quad (6)$$

Ändert der eigene Strom  $i_1$  seine Gestalt und Stärke, so ist zu schließen, daß ebenfalls in ihm eine elektromotorische Kraft induziert wird, da bei Gestaltsveränderungen ponderomotorische Arbeit geleistet wird. Die dadurch in  $i_1$  induzierte elektromotorische Kraft  $E_1'$  muß, nach Analogie mit dem Gesetz (6) zu schließen, den Wert haben

$$E_1' = \frac{d(i_1 A)}{dt}, \quad (7)$$

wo  $A$  nur von der Gestalt des Stromes  $i_1$  abhängt. Man nennt  $A$  den Koeffizienten der Selbstinduktion des Stromes  $i_1$ .

Treten ganz beliebige Aenderungen in der Gestalt und Stärke beider Ströme  $i_1$  und  $i_2$  ein, so wird daher in  $i_1$  eine elektromotorische Kraft induziert, die sich durch Addition von (6) und (7) ergibt zu

$$E_1 = \frac{d(i_1 A)}{dt} + \frac{d(i_2 B)}{dt}. \quad (8)$$

In gleicher Weise ist zu schließen, daß in  $i_2$  bei diesen Veränderungen eine elektromotorische Kraft  $E_2$  induziert wird, welche die Form besitzt:

$$E_2 = \frac{d(i_1 C)}{dt} + \frac{d(i_2 D)}{dt}, \quad (8')$$

wobei  $C$  nur abhängt von der gegenseitigen Lage von  $i_1$  und  $i_2$ ,  $D$  nur von der Gestalt von  $i_2$ .  $D$  ist der Koeffizient der Selbstinduktion von  $i_2$ .

Die Koeffizienten  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  können wir nun aus dem Energieprinzip, d. h. mit Hilfe der Gleichung (3), bestimmen. Wir müssen nur auf der linken Seite dieser Gleichung das Vorzeichen ändern, da wir in diesem Abschnitte unter  $E_1$  und  $E_2$  nicht diejenigen elektromotorischen Kräfte verstanden haben, welche dem System von außen zuzuführen sind, damit die Stromstärken konstant bleiben, welche also den induzierten elektromotorischen Kräften das Gleichgewicht halten, sondern diese letzteren Kräfte selbst mit  $E_1$  und  $E_2$  bezeichnet haben. Da nach S. 298, Formel (4), für zwei lineare Stromkreise die mechanische Arbeit, die bei einer Konfigurationsänderung geleistet wird, durch:

$$dT = \frac{1}{2} (i_1^2 dL_{11} + 2 i_1 i_2 dL_{12} + i_2^2 dL_{22}),$$

gegeben ist, so wird durch Einsetzen der Werte (8) und (8') in die Gleichung (3) und Vorzeichenänderung ihrer linken Seite:

$$i_1 [d(i_1 A) + d(i_2 B)] + i_2 [d(i_1 C) + d(i_2 D)] \\ + \frac{1}{2} (i_1^2 dL_{11} + 2 i_1 i_2 dL_{12} + i_2^2 dL_{22}) = -dU. \quad (9)$$

$dU$  ist das vollständige Differential einer gewissen, noch unbekannten Funktion des Zustandes des Systemes. Derselbe kann in diesem Falle nur abhängen von den Werten der fünf Größen:  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $L_{11}$ ,  $L_{12}$ ,  $L_{22}$ . Betrachten wir zunächst den Fall, daß die letzteren drei Größen sich nicht ändern, d. h. daß keine mechanische Arbeit im System geleistet wird. Es folgt dann aus (9):

$$di_1 (i_1 A + i_2 C) + di_2 (i_1 B + i_2 D) = -dU.$$

Da die linke Seite ein vollständiges Differential sein soll, so muß sein:

$$\frac{d(i_1 A + i_2 C)}{d i_2} = \frac{d(i_1 B + i_2 D)}{d i_1},$$

d. h.

$$B = C.$$

Durch Integration findet man:

$$U = -\frac{1}{2} (i_1^2 A + 2 i_1 i_2 B + i_2^2 D) + \text{Konst.}, \quad (10)$$

wo die Konstante nicht von den Intensitäten  $i_1$  und  $i_2$  abhängt.

Bleiben nun die Stromstärken konstant, verschieben sich dagegen die Ströme  $l_1$  und  $l_2$  gegeneinander und gegen sich selbst, so folgt aus (9) und (10):

$$\begin{aligned} i_1^2 dA + 2 i_1 i_2 dB + i_2^2 dD + \frac{1}{2} (i_1^2 dL_{11} + 2 i_1 i_2 dL_{12} + i_2^2 dL_{22}) \\ = \frac{1}{2} (i_1^2 dA + 2 i_1 i_2 dB + i_2^2 dD) + C', \end{aligned} \quad (11)$$

wo  $C'$  wiederum nicht von den Stromstärken abhängt. Da die Gleichung (11) für alle beliebigen Werte der Stromstärken  $i_1$  und  $i_2$  gelten muß, so folgt  $C' = 0$  und:

$$A = -L_{11}, \quad B = -L_{12}, \quad D = -L_{22}. \quad (12)$$

Hierdurch und durch die Gleichungen (8) bzw. (8') sind also die induzierten elektromotorischen Kräfte bestimmt und ebenso die Funktion  $U$ , welche sich nach (10) ergibt zu

$$U = T,$$

bis auf eine additive Konstante, die weder von der Konfiguration des Systems noch von den Stromstärken abhängt, und die man daher ganz unberücksichtigt lassen kann.  $U$  ist also die magnetische Energie des Systems.

## 6. Allgemeine Folgerungen aus den Induktionsgesetzen zweier linearer Ströme.

Nach Gleichung (3), in welcher wir jetzt den Wert von  $U$  kennen, ist bei einer kleinen Konfigurationsänderung dem Systeme zweier linearer Ströme, wenn die Stromstärken bei Leistung mechanischer Arbeit konstant bleiben sollen, elektrische Energie zuzuführen, welche doppelt so groß als die geleistete Arbeit, d. h. als der dadurch herbeigeführte Zuwachs der magnetischen Energie ist.

Fehlt diese Zufuhr von elektrischer Energie, so sinkt die Stromstärke, und es ist nach (3):

$$dT = -dU,$$

d. h. in einem sich selbst überlassenen elektromagnetischen System ist die geleistete mechanische Arbeit gleich der Abnahme der magnetischen Energie des Systemes (während sie gleich dem Zuwachs der magnetischen Energie ist, wenn für Erhaltung der Stromstärken gesorgt ist).

Die beiden zuletzt ausgesprochenen allgemeinen Sätze gelten offenbar nicht nur, wenn das Magnetfeld allein zwei lineare Ströme besitzt, sondern auch für ein ganz beliebig gestaltetes Magnetfeld, da man dessen Wirbelräume stets in lineare Ströme zerlegt denken kann, und auf jede Kombination von je zweien dieser linearen Ströme die angestellten Betrachtungen direkt anwenden kann.

Nach den Gleichungen (12) und (8) ist die in dem Strome  $i_1$  induzierte elektromotorische Kraft:

$$E_1 = - \frac{d(i_1 L_{11} + i_2 L_{12})}{dt},$$

und ebenso die in  $i_2$  induzierte elektromotorische Kraft  $E_2$  nach (8'), da  $B = C$  ist:

$$E_2 = - \frac{d(i_2 L_{22} + i_1 L_{12})}{dt}.$$

Nun bedeutet  $i_1 L_{11} + i_2 L_{12}$  die Gesamtzahl  $N_1$  der Induktionslinien, welche den Strom  $i_1$  umschlingen, wie im IV. Kapitel auf S. 300, Formel (6) gezeigt ist. Und ebenso ist  $i_2 L_{22} + i_1 L_{12}$  die Gesamtzahl  $N_2$  von Induktionslinien, welche den Strom  $i_2$  umschlingen. Die Werte der induzierten elektromotorischen Kräfte lassen sich daher auch in der Form schreiben:

$$E_1 = - \frac{dN_1}{dt}, \quad E_2 = - \frac{dN_2}{dt}, \quad (13)$$

d. h. die in einer geschlossenen Kurve  $l$  induzierte elektromotorische Kraft  $E$  ist gleich der Aenderungsgeschwindigkeit  $\frac{dN}{dt}$  der Anzahl  $N$  von Induktionslinien, welche die Kurve  $l$  umfaßt.

Dieser Satz gilt offenbar wiederum ganz allgemein in jedem Magnetfeld, d. h. nicht allein wenn das Magnetfeld nur zwei lineare Ströme besitzt und die Kurve  $l$  von dem einen derselben durchflossen wird.

Die elektrische Energie, welche einem Strome  $i_1$  zuzuführen ist, damit seine Stärke bei der Verschiebung in einem beliebigen Magnetfelde konstant bleibt, ist nach (13):

$$E_1 i_1 dt = i_1 dN.$$

Nach den Entwicklungen des Kapitels III, Abschnitt 28, auf S. 282 ist  $i_1 dN$  auch gleich der bei der Verschiebung von den Kräften des Magnetfeldes

geleisteten Arbeit. Diese ist also gleich jener elektrischen Energie. Dieser Satz widerspricht nicht dem im Anfange dieses Abschnittes genannten Satze, da den anderen Strömen des Magnetfeldes, welche nicht verschoben werden, bei Bewegung des Stromes  $i_1$  ebenfalls elektrische Energie zuzuführen ist, um ihre Stromstärke konstant zu erhalten.

Nach den Formeln (13) hat  $E$  das entgegengesetzte Vorzeichen wie die Aenderung  $dN$ , d. h. der induzierte Strom fließt in der Richtung, daß er die Aenderung  $dN$  der Kraftlinienzahl zu hindern sucht. Wird daher die Kraftlinienzahl durch Bewegung der Ströme des Feldes geändert, so sucht der induzierte Strom stets diese Bewegung zu hemmen. Dieses Gesetz heißt die Lenzsche Regel. Nach derselben ergibt sich, daß die Annäherung eines Stromes  $i$  an einen ihm parallel liegenden geschlossenen Draht  $l$ , mag dieser nun ursprünglich ebenfalls einen Strom enthalten oder nicht, in  $l$  stets einen Strom von entgegengesetzter Richtung induziert, wie sie  $i$  besitzt, da nach S. 299 parallele, entgegengesetzt gerichtete Ströme sich abstoßen. Umgekehrt induziert eine Entfernung des Stromes  $i$  von  $l$  stets einen Strom in  $l$ , der gleiche Richtung wie  $i$  besitzt, da parallele, gleichgerichtete Ströme sich anziehen.

Wird die Aenderung  $dN$  der Kraftlinienzahl nicht durch ponderomotorische Arbeit hervorgebracht, d. h. durch Bewegung der Ströme des Feldes, sondern durch Aenderung ihrer Intensitäten, so wirkt der induzierte Strom dieser Aenderung entgegen. So muß die Vermehrung der Stromstärke  $i$  in einem parallel liegenden geschlossenen Drahte  $l$  stets einen Strom von entgegengesetzter Richtung induzieren, wie sie  $i$  besitzt, eine Verminderung der Stromstärke  $i$  dagegen einen gleichgerichteten Strom. Letztere wirkt also wie eine Entfernung des Stromes, erstere wie eine Annäherung von  $i$  an  $l$ .

Betrachtet man speziell die induzierten Ströme, wie sie durch Aenderung der Stromstärke im eigenen Strom hervorgerufen werden, d. h. die Erscheinung der Selbstinduktion und der sogenannten Extrastrome, so ist klar, daß die Selbstinduktion einem Anwachsen der Stromstärke einen gewissen Widerstand entgegensetzt, da der induzierte Extrastrom entgegengesetzt fließen muß, wie der bestehende Strom  $i$ , dessen Stärke zunehmen soll; dagegen muß bei Abnahme der Stromstärke  $i$  der induzierte Extrastrom, da er gleich gerichtet mit  $i$  ist, den Strom  $i$  in seiner vorhandenen Stärke zu erhalten suchen, d. h. die Abnahme von  $i$  weniger plötzlich gestalten. Die Selbstinduktion wirkt also genau so wie die Trägheit ponderabler Massen bei ihrer Bewegung. Man kann daher in gewisser anschaulicher Weise von der elektrischen Trägheit eines Stromsystems sprechen, die um so größer ist, je größer sein Selbstinduktionskoeffizient ist.

Der Selbstinduktionskoeffizient ( $A$  oder  $D$ ) eines linearen Stromes ist nach (12) abgesehen vom Vorzeichen gleich dem reziproken Werte des magnetischen Widerstandes des Feldes für die betrachtete Gestalt der Stromlinie multipliziert mit  $4\pi$ , da nach S. 298 Formel (5)  $L_{11}$  bzw.  $L_{22}$  diese Bedeutung besitzen. Die elektrische Trägheit eines Stromes wird daher bedeutend vermehrt, wenn man Eisen in seine Nähe bringt, vor allem, wenn man es dorthin bringt, wo die Kraftlinien, welche der Strom erzeugt, am dichtesten verlaufen. Denn hierdurch wird der magnetische Widerstand des Feldes am meisten heruntergedrückt. So nach erklärt sich, daß ein Solenoid mit Eisenkern, welches kräftige elektromagnetische Wirkungen ergibt, auch eine viel bedeutendere elektrische Trägheit hat als ein Solenoid ohne Eisenkern.

Eine Erscheinung der Selbstinduktion ist es, daß bei Unterbrechung des metallischen Schlusses eines Stromkreises ein Funken an der Unterbrechungsstelle auftritt. Die elektromotorische Kraft der Selbstinduktion kann nämlich bei großer elektrischer Trägheit und schneller Aenderung der Stromstärke eine solche Höhe erreichen, daß sie einen elektrischen Strom unter Funkenerscheinung durch die Luft hindurchtreibt, welche sonst dem Strome nicht den Durchgang gestattet.

Da nach Formel (12) der Koeffizient  $B$  der gegenseitigen Induktion zweier Stromkreise gleich  $-L_{12}$ , d. h. nach S. 298 Formel (5) proportional dem reziproken Werte des magnetischen Widerstandes derjenigen Induktionsröhren ist, welche beide Stromkreise umschlingen, so muß auch die gegenseitige Induktion zweier Stromkreise um so größer werden, je besser die magnetische Leitfähigkeit des Feldes für die beide Ströme umschlingenden Induktionslinien ist. Daher wird das Innere des Ruhmkorffschen Induktionsapparates und der sogenannten Transformatoren mit Eisen von hoher Permeabilität ausgefüllt, da diese Apparate dazu dienen sollen, durch Aenderung der Stärke eines Stromes kräftige Induktionswirkungen in einem ihn umhüllenden Drahtsolenoid zu erzielen.

## 7. Ballistische Methode zur Ermittlung der Magnetisierungskonstanten und der Stärke eines Magnetfeldes.

Auf die Erscheinungen der Elektroinduktion im Magnetfelde gründet sich eine einfache Methode zur experimentellen Bestimmung der Permeabilität eines Stoffes. Derselbe wird in die Form eines geschlossenen Ringes von konstantem Querschnitt gebracht und mit einem Kupferdraht solenoidartig umwickelt (Primärspule). Fließt durch diese ein Strom von der Stärke  $i$ , so kennt man nach S. 258 die Feldstärke  $\mathfrak{H}$  im Ringe, falls man  $i$  in absoluten Maße mißt. Der Ring ist nun an einer Stelle mit



einer zweiten Drahtspirale von einigen Windungen umwickelt (Sekundärspule), deren Enden metallisch verbunden werden mit den Enden der Wicklung eines empfindlichen Galvanometers, dessen Ausschläge mit Hilfe von Fernrohr, Spiegel und Skala abgelesen werden. Bei Aenderung der Stromstärke  $i$  der Primärspule um  $di$  ändert sich die von der Sekundärspule umfaßte Anzahl  $N$  der magnetischen Induktionslinien, es wird daher ein Strom in ihr induziert und das Galvanometer zeigt einen Ausschlag  $\alpha$ . Derselbe ist, falls die Schwingungsdauer des Galvanometers nicht allzu klein ist, proportional zu der Gesamtänderung  $dN$  der Induktionslinienzahl, welche  $N$  durch Aenderung von  $i$  erfährt. Denn bezeichnet  $E_1$  die während der Zeit  $dt$  wirkende Induktionskraft, so wird ihre Wirkung auf das Galvanometer proportional zu  $E_1 dt$  sein. Der ganze Ausschlag  $\alpha$  ist also proportional zu  $\int E_1 dt$ , und dieses Integral hat nach (13) den Wert  $dN$ .

Macht man denselben Versuch unter ganz denselben Bedingungen, aber ohne den Kern im Solenoid, so ist jetzt offenbar  $dN$  im Verhältnis  $1:\mu$  kleiner, falls  $\mu$  die Permeabilität des Stoffes bezeichnet, aus dem der Kern besteht. Ist also der Galvanometerausschlag jetzt  $\alpha'$ , so ist

$$\mu = \alpha : \alpha'.$$

Da sich aus dem ringförmigen Solenoid der Kern nicht ohne weiteres entfernen läßt, verwendet man als Apparat zur Untersuchung beliebiger Proben von ferromagnetischen Stoffen gerade Solenoide, in denen ein geradliniger zylindrischer Stab des zu untersuchenden Materials magnetisiert wird. Um dabei einen vollkommen geschlossenen Kraftlinienverlauf ohne magnetisierende Wirkung freier Enden zu bekommen, macht man den Stab länger als das Solenoid und verbindet seine herausragenden Enden mittels Klemmbacken mit einem dicken Eisenrahmen, der als Anker den Kraftlinienfluß des Stabes vom einen zum anderen Ende herumführt. Diese Methode wird als Schlußjochmethode bezeichnet und rührt von J. Hopkinson<sup>1)</sup> her.

Mit dieser Methode kann man nicht nur den Integralwert von  $\mu$  bestimmen (siehe II, 31, S. 199), indem man die Induktionswirkung bei plötzlicher Unterbrechung des Stromes mißt, sondern auch die Differentialwerte, indem man den Strom um kleine Beträge plötzlich ändert. Läßt man den Strom schrittweise ansteigen und dann wieder schrittweise abnehmen, so kann man die ganze Magnetisierungskurve eines ferromagnetischen Körpers mit einem solchen Apparate aufnehmen (siehe II, 30, S. 197).

Mit Hilfe derselben Benutzung des Galvanometers kann man auch

<sup>1)</sup> J. Hopkinson. Phil. Trans. II 1885. S. 455. — Original Papers 2. S. 14.

die Stärke  $\mathfrak{H}$  eines beliebigen Magnetfeldes messen, indem man die mit den Enden des Galvanometers verbundene Induktionsspule schnell fortbewegt von dem Orte P, an welchem die Feldstärke gemessen werden soll, nach einem Orte P', in welchem die Feldstärke Null ist. Vergleicht man den dadurch erhaltenen Ausschlag  $\alpha$  des Galvanometers mit dem Ausschlag  $\alpha'$ , der unter denselben Bedingungen erhalten wird, wenn man die Induktionsspule aus dem Inneren eines Solenoides von bekannter Windungszahl und der Stromstärke  $i$  fortbewegt, in welchem die Feldstärke  $\mathfrak{H}'$  sein möge, so ist offenbar

$$\alpha : \alpha' = \mathfrak{H} : \mathfrak{H}'.$$

Wenn man also die Stromstärke  $i$  des Solenoides in absolutem Maße mißt, so kann man auch die Feldstärke  $\mathfrak{H}$  berechnen.

Auf diese Weise können z. B. die Feldstärken bestimmt werden bei der im Kapitel II, Abschnitt 29, S. 190 beschriebenen hydrostatischen Methode zur Ermittlung der Magnetisierungskonstanten. Die Induktionsspule muß für diesen Zweck nur nicht zu großen Flächeninhalt umgrenzen, falls die Feldstärke  $\mathfrak{H}$  nicht in größeren Bereichen konstant ist.

## 8. Wirbelströme.

Bewegt sich irgendein körperliches Metallstück, in welchem ursprünglich kein elektrischer Strom fließt, im magnetischen Felde, so müssen nach den Erörterungen des Abschnittes 6 elektrische Ströme im Metall induziert werden. Die Bahnen derselben kann man annähernd angeben, wenn man in jedem Punkte die Richtung der Elektroinduktionskraft kennt.

Zur Ermittlung derselben in einem körperlichen Leiter denken wir uns die Formeln (13) der S. 319 zunächst angewendet auf einen linearen geschlossenen Strom  $l$ , von dem nur ein Stück der Länge  $dl$  beweglich ist, indem es etwa auf zwei Schienen gleiten kann, welche ihm immer den metallischen Kontakt mit dem übrigen Stromkreise sichern. Dann ergibt die erste der Formeln (13), daß die in  $dl$  hervorgerufene Induktionskraft gleich ist der Anzahl  $dN$  magnetischer Induktionslinien, welche  $dl$  während seiner Bewegung schneidet, dividiert durch die während derselben verstrichene Zeit  $dt$ . So würde z. B. in  $dl$  die elektromotorische Kraft von 1 Volt induziert, wenn  $dl$  in 1 Sekunde  $10^8$  magnetische Induktionslinien schnitte.

Man ersieht hieraus, daß die Induktionskraft in  $dl$ , bei gleicher Geschwindigkeit der Bewegung, am größten ist, wenn  $dl$  sich senkrecht zu den magnetischen Kraftlinien fortbewegt, und daß sie senkrecht zur Bewegungs- und Kraftlinienrichtung steht. In diesem Falle bilden also

die Bewegung von  $dl$ , die magnetischen Kraftlinien und die längs  $dl$  hervorgerufene Induktionskraft ein rechtwinkliges Achsenkreuz, deren positive Richtungen durch Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand gewiesen werden, falls man aus den Fingern ein rechtwinkliges Achsenkreuz bildet (Flemings Rechte-Hand-Regel, s. Fig. 47). Dieses folgt ohne weiteres aus der S. 286 gegebenen Flemingschen Regel für die ponderomotorische Wirkung, welche ein Stromelement im Magnetfeld erfährt. Da bei jener Regel für dieselben Bedeutungen die Finger der linken Hand verwendet wurden, so müssen hier, zur Ermittlung der Induktionswirkung, die Finger der rechten Hand in denselben Bedeutungen die positiven Richtungen weisen; denn nach der Lenzschen Regel sucht die Induktionswirkung etwa vorhandener Bewegungstendenz entgegenzuwirken.

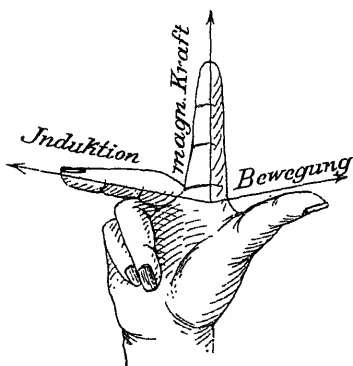


Fig. 47.

Ist die Bewegungsrichtung von  $dl$  vorgeschrieben, aber die Richtung von  $dl$  selber noch frei verfügbar, so ergibt sich aus dem obengenannten Satze über die Elektroinduktionskraft in  $dl$ , daß dieselbe am größten ist, wenn  $dl$  senkrecht auf der Richtung der magnetischen Kraftlinien und der Bewegungsrichtung steht. Bewegt sich nun ein körperliches Metallstück im Magnetfelde, so wirken auf verschieden gerichtete Linienelemente  $dl$ ,

welche in einem Punkte  $P$  zusammenstoßen, elektromotorische Kräfte verschiedener Größe. Auf dasjenige Element wirkt pro Längeneinheit die größte elektromotorische Induktionskraft, welches senkrecht zu der Bewegung und zur magnetischen Kraft in  $P$  liegt. Diese Richtung fällt daher auch mit der in  $P$  resultierenden elektromotorischen Induktionskraft zusammen.

Wenn man nach dieser Regel in jedem Punkte  $P$  des Metallstückes die resultierende Induktionskraft konstruiert, so kann man sich ein annäherndes Bild über den Verlauf der Stromlinien leicht verschaffen. Weil die induzierten Ströme sich immer im Metallstück selber schließen müssen, so bilden sie Wirbel und werden daher Wirbelströme genannt<sup>1)</sup>.

Da die Wirbelströme nach der Lenzschen Regel die Bewegung im Magnetfelde allemal zu hemmen suchen, so erfordert es einen gewissen Energieaufwand, eine solide Kupfermasse in einem kräftigen Magnetfelde,

<sup>1)</sup> Ausführliche Berechnungen dieser Induktionswirkungen liegen vor für den Fall einer Scheibe von Maxwell (siehe Lehrbuch, 2. Band, S. 346 ff.), für den Fall einer Kugel von H. Hertz (Diss., Berlin 1880, Gesammelte Werke, 1. Band, S. 37 ff.).

z. B. zwischen den Polen eines starken Elektromagneten, in Rotation zu erhalten. Dieser Energieaufwand wird durch die Wirbelströme in Joulesche Wärme umgesetzt. Foucault hat diese Wärmewirkung zuerst nachgewiesen; die Wirbelströme werden daher auch oft als Foucaultsche Ströme bezeichnet. Ohne Energiezufuhr kommt das Metallstück im Magnetfeld schnell zur Ruhe.

Eine wichtige Anwendung dieses dämpfenden Einflusses der Wirbelströme ist bei der Konstruktion von Galvanometern gemacht; die Bewegung ihres Magnetsystems kann man dadurch, daß man es mit einer soliden Kupfermasse eng umschließt, so dämpfen, daß es aperiodisch die Ruhelage erreicht.

Auch wenn eine Aenderung der Induktionslinienzahl in einem Metallkörper nicht durch Bewegung, sondern durch Aenderung der magneto-motorischen Kraft des Magnetfeldes hervorgebracht wird, treten Wirbelströme im Metallkörper auf. Dies tritt z. B. ein, wenn die Stromstärke eines Solenoides, welches einen soliden Eisenkern enthält, plötzlich geändert wird. Die Wirbelströme werden möglichst herabgedrückt, wenn der Metallkörper in Ebenen, welche senkrecht zur resultierenden elektromotorischen Induktionskraft liegen, durch Material zerteilt wird, welches den elektrischen Strom nicht leitet. Die Kerne von Transformatoren oder Induktionsapparaten stellt man deshalb aus Blechscheiben her, welche durch Papierlagen voneinander isoliert sind, oder aus Bündeln dünner, gefirnißter Eisendrähte. Die Wirbelströme sind in der Tat bei diesen Apparaten möglichst zu vermeiden. Sie ergeben nämlich nicht nur durch das unnötige Erzeugen Joulescher Wärme einen Energieverlust, sondern setzen auch die bei den Apparaten beabsichtigte Induktionswirkung herab, weil die Wirbelströme die Aenderung des magnetischen Zustandes der Eisenkerne zu verlangsamen streben.

## 9. Webers Theorie des Diamagnetismus.

Zur Erklärung der diamagnetischen Eigenschaften der Körper machte W. Weber die Hypothese, daß in ihnen durch Induktion Molekularströme entständen, falls durch äußere Ursachen (Bewegung oder Aenderung der Stärke äußerer Ströme) der Kraftlinienverlauf ihres Inneren eine Aenderung erfährt. Diese Molekularströme sollen ihre Stärke unverändert beibehalten, wenn keine Elektroinduktionskraft auf sie wirkt. Die Strombahnen in den Molekülen weichen also in ihren elektrischen Eigenschaften von den gewöhnlichen metallischen Stromleitern insofern ab, als in ersteren keine Joulesche Wärme entwickelt wird. Dasselbe trifft auch für die molekularen Strombahnen der Ampèreschen Theorie der paramagnetischen Körper zu (siehe oben S. 263).

Wenn nun ein Magnetstab etwa mit seinem Nordpol einem diamagnetischen Körper genähert wird, so werden in letzterem Ströme induziert, welche diese Bewegung zu hindern suchen, welche also auf der dem Magneten zugewandten Seite des Körpers gleichfalls einen Nordpol erzeugen. Da diese Ströme nun andauern sollen, wenn der Körper in seiner neuen Lage verbleibt, so muß auf ihn der Magnetstab eine abstoßende Kraft ausüben und dieses Verhalten ist nach Kapitel II, Abschnitt 27, S. 188 charakteristisch für diamagnetische Körper.

Um die zu erwartenden Abstoßungen quantitativ zu berechnen, bedarf es aber noch einiger Ueberlegungen. Wie nämlich deutlicher aus den Betrachtungen des nächsten Kapitels hervorgehen wird, muß die gesamte elektromotorische Kraft, welche auf einen Leiter wirkt, der keine Joulesche Wärme entwickelt, jederzeit verschwinden, falls nicht die Stromstärke in ihm unendlich groß sein soll.

In unserem Falle setzt sich nun die gesamte, auf eine molekulare Strombahn  $l$  wirkende Elektroinduktionskraft aus zwei Teilen zusammen, nämlich der gegenseitigen Induktion zwischen  $l$  und den anderen Strömen des Feldes, und der Selbstinduktion von  $l$ . Nehmen wir an, daß die Strombahn  $l$  ein linearer Leiter sei, so ist die Induktionskraft der Selbstinduktion nach Abschnitt 5 dieses Kapitels gegeben durch  $-\frac{d(iL)}{dt}$ , falls  $i$  die Stromstärke in  $l$  bezeichnet,  $L$  den Koeffizienten der Selbstinduktion von  $l$ .

Bringen die anderen Ströme des Feldes am Orte von  $l$  die Feldstärke  $\mathfrak{H}$  hervor, ist  $l$  eine ebene Kurve, welche das Flächenstück  $f$  umgrenzt, und bildet die Normale von  $f$  mit der Richtung der magnetischen Kraft  $\mathfrak{H}$  den Winkel  $\vartheta$ , so senden die anderen Ströme  $\mathfrak{H} f \cos \vartheta$  magnetische Kraftlinien durch  $f$  hindurch. Die gegenseitige Elektroinduktionskraft zwischen  $l$  und den anderen Strömen ist also

$$-\frac{d(\mathfrak{H} f \cos \vartheta)}{dt}.$$

Setzt man daher die ganze, auf  $l$  wirkende Elektroinduktionskraft gleich Null, so erhält man:

$$0 = \frac{d(iL)}{dt} + \frac{d(\mathfrak{H} f \cos \vartheta)}{dt},$$

d. h.

$$iL + \mathfrak{H} f \cos \vartheta = \text{Konst.} = i_0 L. \quad (14)$$

Die Konstante  $i_0$  hat die Bedeutung der Stromstärke des Molekularstroms in einem Felde  $\mathfrak{H} = 0$ . Nach Weber soll  $i_0$  für diamagnetische Körper verschwinden. Daher folgt aus (14)

$$i = -\frac{\mathfrak{H} f}{L} \cos \vartheta. \quad (15)$$

Hierbei ist  $\vartheta$  ein zwischen  $0^\circ$  und  $90^\circ$  liegender Winkel. Das negative Vorzeichen von  $i$  besagt, daß die von  $i$  hervorgebrachten magnetischen Kraftlinien denen des äußeren Feldes  $\mathfrak{H}$  entgegenlaufen. Es ergibt sich daher tatsächlich eine Abstoßung zwischen  $i$  und den das Feld  $\mathfrak{H}$  hervorbringenden Strömen. Um dieselbe zu berechnen, ist zu berücksichtigen, daß nach S. 226 und 228 die Wirkung der dem Strom  $i$  äquivalenten Doppelfläche für einen Punkt  $P$ , der in der Richtung einer durch die Doppelfläche hindurchgehenden Kraftlinie liegt, proportional ist zu  $if \cos \vartheta$ , d. h. proportional zu

$$fi \cos \vartheta = - \frac{\mathfrak{H} f^2}{L} \cos^2 \vartheta.$$

Enthält die Volumeneinheit  $n$  Molekularströme, und sind die Achsen derselben nach allen möglichen Richtungen ganz gleichmäßig verteilt, so wird, weil der Mittelwert von  $\cos^2 \vartheta$  gleich  $\frac{1}{3}$  ist, die Wirkung eines Volumens  $dv$  auf  $P$  proportional sein zu

$$- \frac{1}{3} \frac{\mathfrak{H} f^2}{L} n dv.$$

Wenn nun  $dv$  das Stückchen einer Kraftröhre von der Länge  $dl$  und dem Querschnitt  $dq$  ist, so würde dieses Volumen  $dv$  die gleiche Wirkung auf  $P$  äußern, wenn die Querschnitte  $dq$  mit der Dichte  $\eta_{mi}$

$$\eta_{mi} = \pm \frac{1}{3} \frac{\mathfrak{H} f^2}{L} n \quad (16)$$

belegt wären.

Bezeichnet man mit  $\mu$  die Magnetisierungskonstante des diamagnetischen Körpers und nimmt an, daß er im Vakuum lagert, so besteht zwischen der Dichte der induzierten Flächenbelegung und der magnetisierenden Kraft  $\mathfrak{H}$ , da nun die Kraft vom Vakuum in den Körper hinein gerichtet ist, nach Formel (28') des II. Kapitels, S. 171, die Beziehung:

$$\eta_{mi} = \pm \frac{\mathfrak{H}}{4\pi} \left( \frac{1}{\mu} - 1 \right); \quad (17)$$

dabei ist in der genannten Formel  $\mu_1 = 1$ ,  $\mu_2 = \mu$  und  $(\mathfrak{H}_n)_1 = -\mathfrak{H}$  entsprechend der obigen Festsetzung genommen. Die Vergleichung der Formeln (16) und (17) liefert die Gleichung:

$$\frac{\mu - 1}{4\pi\mu} = - \frac{1}{3} \frac{nf^2}{L}. \quad (18)$$

Da bei allen diamagnetischen Körpern  $\mu$  nur sehr wenig kleiner als 1 ist, so kann bei dieser Formel im Nenner ihrer linken Seite unbedenklich  $\mu = 1$  gesetzt werden, so daß man erhält:

$$\frac{\mu - 1}{4\pi} = x = - \frac{1}{3} \frac{nf^2}{L}. \quad (19)$$

Etwas anders, wiewohl qualitativ ähnlich, gestalten sich die Verhältnisse, wenn wir die molekularen Strombahnen  $s$  nicht als lineare Leiter annehmen, sondern wenn die Moleküle von leitenden Flächen, z. B. Kugelflächen, eingeschlossen sind <sup>1)</sup>.

Wie man aus (18) und (19) ersieht, ergibt sich nach dieser Theorie  $\mu$  als von der Feldstärke  $\mathfrak{H}$  unabhängig. Die bisherigen Beobachtungen widersprechen diesem Resultate nicht.

Die hier angestellten Ueberlegungen geben offenbar auch die strengere theoretische Grundlage für die Ampèresche Molekulartheorie paramagnetischer Körper; es ist nur dazu in den Formeln die Konstante  $i_0$  nicht gleich Null zu setzen, sondern im Gegenteil recht groß, wenn das Verhalten stark paramagnetischer Körper erklärt werden soll. Man kann dann näherungsweise den Einfluß der Induktionsströme überhaupt vernachlässigen. Jedoch gewinnen dieselben, wie aus der Formel (14) hervorgeht, mehr und mehr an Bedeutung, je größer die Feldstärke  $\mathfrak{H}$  wird. Dies würde zur Folge haben, daß die Magnetisierung eines paramagnetischen Körpers bei wachsender Feldstärke zwar anfangs zunehmen und bis zu einem Maximum ansteigen, dann aber bei noch höherer Feldstärke wieder abnehmen müßte und schließlich in ihr ursprüngliches Gegenteil, in das Verhalten eines diamagnetischen Körpers, übergehen könnte — eine Erscheinung, die aber bis jetzt noch nicht beobachtet worden ist.

## 10. Berechnung der Selbstinduktionskoeffizienten einiger Stromsysteme.

Nach der Formel (11) der S. 302 ist der Koeffizient  $L_{11}$  der Selbstinduktion von der Dimension einer Länge. Er wird also in absolutem Maße nach Zentimetern gemessen. Als praktische Einheit hat man die Länge des Erdquadranten, d. h.  $10^9$  cm für die Selbstinduktion gewählt und nennt diese Einheit 1 Quadrant oder 1 Henry (nach dem amerikanischen Physiker). Diese Einheit ist deshalb gewählt, weil in einem Leiter, welcher die Selbstinduktion 1 Henry besitzt, die elektromotorische Kraft von 1 Volt induziert wird, wenn sich seine Stromstärke in einer Sekunde um 1 Ampere ändert. Es folgt dies sofort aus der Formel

$$E = L \frac{di}{dt}.$$

Um einen Begriff von der Größe der Selbstinduktion in praktischen Fällen zu haben und um in späteren Kapiteln an die hier zu entwickelnden Formeln Folgerungen knüpfen zu können, soll die Selbst-

<sup>1)</sup> Vgl. darüber Maxwell, Lehrbuch, 2. Bd., S. 588.

induktion in einigen einfachen Fällen berechnet werden. Nach der Bemerkung auf S. 303 kann man die Selbstinduktion  $L_{11}$  nicht direkt nach der Integralformel (11) berechnen, indem man das Stromsystem als ein lineares auffaßt.

a) Selbstinduktion eines Solenoids. Wir nehmen an, der Wicklungsraum des Solenoids sei nur dünn im Vergleich zu seinem Querschnitt  $q$ , dagegen sei seine Länge  $l$  sehr groß gegen  $q$ . Das Solenoid kann gerade sein, die Formeln gelten aber strenger für den Fall, daß das Solenoid sich als Ring schließt.

Nach der Formel (67) des III. Kapitels auf S. 258 ist die Feldstärke im Solenoid

$$\mathfrak{H} = \frac{4\pi in}{l},$$

falls  $n$  die Anzahl der Windungen des Solenoids bedeutet. Die Anzahl der das Solenoid durchsetzenden Induktionslinien ist also

$$N = \frac{4\pi \mu q in}{l},$$

falls  $\mu$  die Magnetisierungskonstante des Solenoidinneren bedeutet, das eventuell aus Eisen bestehen kann.

Nach der Formel (79) des III. Kapitels auf S. 270 ist die magnetische Energie gegeben durch

$$T = \frac{1}{2} \Sigma i N = \frac{1}{2} i^2 \cdot 4\pi \mu q \frac{n^2}{l},$$

denn das Solenoid enthält im ganzen  $n$  Ströme der Stärke  $i$ .

Da nun andererseits die magnetische Energie eines linearen Stromes nach Formel (4) des IV. Kapitels auf S. 298 gegeben ist durch

$$T = \frac{1}{2} i^2 L, \quad (20)$$

wobei  $L$  den Koeffizienten der Selbstinduktion bezeichnet, so ist für das Solenoid

$$L = 4\pi \mu n^2 \frac{q}{l}. \quad (21)$$

Nehmen wir z. B. den Fall, daß das Solenoid keinen Eisenkern enthielte, also  $\mu = 1$  wäre, ferner, daß der Querschnitt  $q$  ein Kreis von 10 cm Durchmesser sei und die Länge  $l = 50$  cm. Wie viel Windungen  $n$  muß dann das Solenoid besitzen, damit seine Selbstinduktion 1 Quadrant beträgt?

Da  $q = \frac{\pi}{4} \cdot 100$ ,  $l = 50$ , so muß nach (21) sein

$$10^9 = \pi^2 \cdot \frac{100}{50} \cdot n^2, \quad n^2 = \frac{10^9}{2\pi^2}, \quad n = \frac{10^4}{\pi} \sqrt{5}$$

$$n = 0,711 \cdot 10^4 = 7110.$$



Besteht das Solenoid aus Draht von 1 mm Dicke, so würde eine Lage dieses Drahtes bei der Länge  $l = 50$  cm die Windungszahl  $n = 500$  ergeben. Das Solenoid müßte also 14 solcher Drahtlagen enthalten, damit es die Selbstinduktion von 1 Quadrant besitzt.

Ist der Querschnitt  $q$  ein Kreis vom Radius  $r$ , und bezeichnet  $l'$  die ganze Drahtlänge des Solenoids, so ist:

$$q = r^2 \pi, \quad l' = 2 r \pi n.$$

Setzt man diese Werte in (21) ein, so entsteht bei  $\mu = 1$ :

$$L = \frac{l'^2}{1}. \quad (21')$$

Die Selbstinduktion wird daher um so größer, je kürzer die Länge  $l$  des Solenoids ist<sup>1)</sup>.

Nennt man  $R$  den Radius des Drahtes, d. h.  $2R$  seine Dicke, so ist, falls das Solenoid  $h$  Drahtlagen besitzt:

$$l = 2 R \frac{n}{h},$$

d. h.

$$l' : l = r \pi h : R,$$

und

$$L = l' \cdot \frac{r \pi h}{R}. \quad (21'')$$

In dem vorhin betrachteten Fall ist

$$r = 5, \quad h = 14, \quad R = 0,05,$$

d. h.

$$L = l' \cdot 4396. \quad (21''')$$

Durch einen Eisenkern wird die Selbstinduktion bedeutend erhöht, wie die Formel (21) ergibt. Indes muß aus dem S. 325 angeführten Grunde für eine sorgfältige Zerteilung des Eisenkernes gesorgt sein, falls die Selbstinduktion auch bei schnellen Stromwechseln groß sein soll.

b) Selbstinduktion zweier, einander paralleler, sehr langer Hohlzylinder. Nach der Formel (15) des IV. Kapitels auf S. 309 ist die magnetische Energie durch das Raumintegral darstellbar:

$$T = \frac{1}{2} \int (j_x \mathfrak{B}_x + j_y \mathfrak{B}_y + j_z \mathfrak{B}_z) d\tau. \quad (22)$$

<sup>1)</sup> Diese Betrachtungen gelten aber nur sehr angenähert, da stets  $l$  als groß im Vergleich zu den Querdimensionen angenommen ist und der von den Windungen selbst eingenommene Raum vernachlässigt ist. Zur genaueren Berechnung der Selbstinduktion einer Rolle vergleiche Maxwell, Lehrbuch, 2. Bd., S. 482. Dort ist auch genauer diskutiert, wann die Selbstinduktion der Rolle bei vorgeschriebenem  $l'$  ein Maximum ist.

Legt man die z-Achse parallel zu den Zylindern, so verschwindet  $j_z$  und  $j_y$ . Im III. Kapitel ist nun  $\mathfrak{B}_z$  für den hier vorliegenden Fall berechnet. Für den Außenraum der Zylinder ist nämlich [vgl. die dortige Formel (57), S. 251], falls man noch annimmt, daß die Summe der Stromstärken  $i_1 + i_2$  beider Zylinder verschwindet:

$$(\mathfrak{B}_z)_a = -2\mu i_1 \lg \frac{r_1}{r_2}, \quad (23)$$

falls  $r_1$  und  $r_2$  die Entfernungen des Punktes P, für welchen  $(\mathfrak{B}_z)_a$  berechnet werden soll, von den Achsen der Zylinder bedeuten. Für den Innenraum des Zylinders 1 erhält man durch Subtraktion der Formeln (48) und (42) auf S. 248 und 247:

$$(\mathfrak{B}_z)_i^1 = 2\pi\mu j_{z1} (R_1'^2 \lg r_1 - R_1^2 \lg R_1) + \pi\mu j_{z1} (R_1^2 - r_1^2) + 2\mu i_1 \lg r_2, \quad (24)$$

falls  $R_1$  den äußeren,  $R_1'$  den inneren Radius des Zylinders bedeutet. Es ist also

$$i_1 = \pi j_{z1} (R_1^2 - R_1'^2). \quad (25)$$

Zerlegt man den Zylinder 1 durch koaxiale Zylinderflächen vom Abstand  $dr_1$  und der Länge  $l$  des Zylinders in Volumenelemente  $dV$ , so ist die Größe derselben

$$dV = 2\pi r_1 dr_1 l.$$

Setzt man diesen Wert und den Wert (24) für  $\mathfrak{B}_z$  in (22) ein, so kann man die Integrationen zum Teil sofort ausführen, wenn man die Integralformeln anwendet:

$$\int \lg x dx = x (\lg x - 1),$$

daher

$$\int \lg r_1 \cdot r_1 dr_1 = \frac{1}{4} \int \lg r_1^2 \cdot dr_1^2 = \frac{r_1^2}{4} (2 \lg r_1 - 1).$$

Man erhält daher aus (22) für den Teil von T, welcher auf den Zylinder 1 zu erstrecken ist:

$$T^{(1)} = \frac{\mu l}{2} \pi^2 j_{z1}^2 \left\{ \lg R_1 (4 R_1^2 R_1'^2 - 2 R_1^4) - 2 \lg R_1' \cdot R_1'^4 \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (R_1^2 - R_1'^2)^2 - R_1'^2 (R_1^2 - R_1'^2) \right\} + \mu i_1 j_{z1} \int \lg r_2 dV.$$

In dieser Formel bedarf nur noch das letzte, auf der rechten Seite auftretende Integral der Berechnung. Dieselbe gestaltet sich sehr einfach, wenn man beachtet, daß das Integral die Form des Vektorpotentials des Stromes 1 für einen Punkt der Achse des Stromes 2 hat. Denn nach der Formel (36) auf S. 245 hat das Vektorpotential, welches von einem linearen Strome  $i$  herrührt, den Wert:

$$\mathfrak{B}_z = -2\mu i \lg r + C.$$

Schließen sich zahlreiche lineare Ströme zu einem stromdurchflossenen Zylinder zusammen, so ist also abgesehen von der Konstante C:

$$\mathfrak{B}_z = -2\mu \Sigma i \lg r = -2\mu j_z \int \lg r \, dq,$$

falls  $j_z$  die Stromdichte in einem Stromfaden bedeutet, dessen Querschnitt  $dq$  ist. Nennt man das Volumen eines Stromfadens  $dv$ , so ist

$$dv = l \cdot dq,$$

falls  $l$  die Länge der Stromfäden, d. h. des Zylinders, bedeutet. Es ist also:

$$\mathfrak{B}_z = -2\mu \cdot \frac{j_z}{l} \int \lg r \, dv.$$

Wie nun oben auf S. 245 bewiesen wurde, wirkt ein gleichmäßig durchströmter Zylinder auf einen äußeren Punkt so, als ob sein ganzer Strom allein in seiner Achse konzentriert wäre. Es muß also das letzte Integral den Wert besitzen:

$$\mathfrak{B}_z = -2\mu i \lg d,$$

wo  $d$  den Abstand des Punktes P, für den der Wert von  $\mathfrak{B}_z$  berechnet werden soll, von der Zylinderachse bedeutet. Durch Vergleichung der beiden letzten Gleichungen folgt also:

$$j_z \int \lg r \, dv = i l \cdot \lg d.$$

Eine Konstante ist nicht zu addieren, da für  $r = d = \infty$  diese Gleichung offenbar erfüllt ist<sup>1)</sup>. Daraus folgt, daß wir in unserem Falle schreiben können:

$$j_{z1} \int \lg r_2 \, dv = i_1 l \cdot \lg d,$$

wo  $d$  den Abstand beider Zylinderachsen voneinander bedeutet.

Mit Hilfe der letzten Formel wird so

$$\begin{aligned} T^{(1)} = & \frac{\mu l}{2} \pi^2 j_{z1}^2 \left\{ -2(R_1^2 - R_1'^2)^2 \lg R_1 + 2R_1'^4 \lg \frac{R_1}{R_1'} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}(R_1^2 - R_1'^2)^2 - R_1'^2(R_1^2 - R_1'^2) \right\} + \mu l i_1^2 \lg d. \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Wenn in einer Ebene eine beliebige Figur vom Flächeninhalt  $Q$  liegt,  $dq$  ein Element dieser Fläche und  $r$  den Abstand dieses Elementes von einem Punkt P der Ebene bedeutet, so nennt man die durch die Gleichung

$$\log R = \frac{1}{Q} \int \log r \cdot dq$$

definierte Größe  $R$  den mittleren geometrischen Abstand des Punktes P von der Figur. Ueber die Berechnung solcher Größen und im besonderen über den analytischen Beweis des obigen Satzes, daß der mittlere geometrische Abstand einer Kreisfläche von einem Punkt außerhalb des Kreises gleich dem Abstand des Punktes vom Mittelpunkt des Kreises ist, siehe Maxwell, Lehrbuch, Bd. 2, S. 398 ff.

Mit Berücksichtigung von (25) wird dies zu

$$T^{(1)} = \frac{\mu l}{2} i_1^2$$

$$\left\{ -2 \lg R_1 + \frac{2 R_1'^4}{(R_1^2 - R_1'^2)^2} \lg \frac{R_1}{R_1'} + \frac{1}{2} - \frac{R_1'^2}{R_1^2 - R_1'^2} + 2 \lg d \right\}.$$

Ebenso ergibt sich für den Teil von T, welcher sich auf den Zylinder 2 bezieht:

$$T^{(2)} = \frac{\mu l}{2} i_1^2$$

$$\left\{ -2 \lg R_2 + \frac{2 R_2'^4}{(R_2^2 - R_2'^2)^2} \lg \frac{R_2}{R_2'} + \frac{1}{2} - \frac{R_2'^2}{R_2^2 - R_2'^2} + 2 \lg d \right\}.$$

Durch Addition von  $T^{(1)}$  und  $T^{(2)}$  erhält man die magnetische Energie T des ganzen Systems. Da nach (20)

$$L = T : \frac{1}{2} i_1^2,$$

so folgt für den Koeffizienten der Selbstinduktion:

$$L = \mu l \left\{ 2 \lg \frac{d^2}{R_1 R_2} + 1 - \frac{R_1'^2}{R_1^2 - R_1'^2} - \frac{R_2'^2}{R_2^2 - R_2'^2} + 2 \frac{R_1'^4}{(R_1^2 - R_1'^2)^2} \lg \frac{R_1}{R_1'} + 2 \frac{R_2'^4}{(R_2^2 - R_2'^2)^2} \lg \frac{R_2}{R_2'} \right\}. \quad (26)$$

Diese Formel geht für zwei Vollzylinder ( $R_1' = R_2' = 0$ ) in den Ausdruck über:

$$L = \mu l \left\{ 2 \lg \frac{d^2}{R_1 R_2} + 1 \right\}. \quad (27)$$

Beide Formeln gelten nur für den Fall, daß die Permeabilität  $\mu$  im ganzen Raume denselben Wert hat.

Wie sie umzugestalten ist, wenn die Permeabilitäten  $\mu_1$  und  $\mu_2$  der Zylinder abweichen von der Permeabilität  $\mu_0$  ihrer Umgebung, kann man in dem Falle, daß der Abstand  $d$  der Zylinder groß gegen ihre Dicken-dimensionen  $R_1$  und  $R_2$  ist, leicht angeben nach dem oben S. 250 erörterten Verfahren. Da nämlich in diesem Falle die Oberflächen der Zylinder von magnetischen Kraftlinien gebildet werden, so ist der Wert der magnetischen Feldstärke  $\mathfrak{H}$  ganz unabhängig davon, ob  $\mu_0$  von  $\mu_1$  und  $\mu_2$  verschieden ist oder nicht.

Nehmen wir daher zunächst an, es sei  $\mu_0 = \mu_1 = \mu_2 = \mu$ , so findet man in der Nähe des Zylinders 1, für welche  $r_2$  als von  $r_1$  unabhängig anzunehmen ist (wegen der Größe von  $d$ ), durch Differentiation von (23) nach  $r_1$ , da nach Formel (35), S. 245, die Gleichung besteht:

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{\mu} \frac{d \mathfrak{B}_z}{d r_1}, \quad (28)$$

$$\mathfrak{L}_a = \frac{2 i_1}{r_1}. \quad (29)$$

(Das Vorzeichen von  $\mathfrak{L}$  ist immer positiv genommen.) Ebenso findet man durch Differentiation von (24) nach  $r_1$ :

$$\mathfrak{L}_i^{(1)} = 2 \pi j_{z1} \left( r_1 - \frac{R_1'^2}{r_1} \right). \quad (30)$$

Die Formeln (28), (29) und (30) gelten nun auch, falls  $\mu_0$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  voneinander verschieden sind. Nach (28) ist dann:

$$\mathfrak{B}_{za} = \mu_0 \int \mathfrak{L}_a dr_1 + C, \quad \mathfrak{B}_{zi}^{(1)} = \mu_1 \int \mathfrak{L}_i^{(1)} dr_1 + C_1.$$

Führt man diese Integrationen aus, so erhält man

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_{za} &= -2 \mu_0 i_1 \lg r_1 + C, \\ \mathfrak{B}_{zi}^{(1)} &= 2 \pi \mu_1 j_{z1} \left( R_1'^2 \lg r_1 - \frac{1}{2} r_1^2 \right) + C_1. \end{aligned} \quad (31)$$

Ebenso würde man in der Nähe des zweiten Zylinders erhalten:

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_{za} &= -2 \mu_0 i_2 \lg r_2 + C', \\ \mathfrak{B}_{zi}^{(2)} &= 2 \pi \mu_2 j_{z2} \left( R_2'^2 \lg r_2 - \frac{1}{2} r_2^2 \right) + C_2. \end{aligned} \quad (32)$$

Da  $\mathfrak{B}_{za}$  in den Formeln (31) stetig in das  $\mathfrak{B}_{za}$  der Formeln (32) überzuführen möglich sein muß, und da es für  $r_1 = r_2 = \infty$  verschwindet, so folgt, weil außerdem  $i_1 + i_2 = 0$  ist:

$$\mathfrak{B}_{za} = -2 \mu_0 i_1 \lg \frac{r_1}{r_2}. \quad (33)$$

Die Konstante ( $C_1$ ) in (31) ergibt sich daraus, daß  $\mathfrak{B}_{za}$  für  $r_1 = R_1$  stetig in  $\mathfrak{B}_{zi}^{(1)}$  übergehen muß. Es folgt so, da in der Nähe des Zylinders 1 für  $r_2$  mit genügender Näherung  $d$  zu setzen ist:

$$C_1 = -2 \mu_0 i_1 \lg \frac{R_1}{d} - 2 \pi \mu_1 j_{z1} \left( R_1'^2 \lg R_1 - \frac{1}{2} R_1^2 \right),$$

d. h.

$$\mathfrak{B}_{zi}^{(1)} = 2 \pi \mu_1 j_{z1} R_1'^2 \lg \frac{r_1}{R_1} + \pi \mu_1 j_{z1} (R_1^2 - r_1^2) - 2 \mu_0 i_1 \lg \frac{R_1}{d}. \quad (34)$$

Aus der Stetigkeit von  $\mathfrak{B}_{za}$  und  $\mathfrak{B}_{zi}^{(2)}$  für  $r_2 = R_2$  ergibt sich analog:

$$\mathfrak{B}_{zi}^{(2)} = 2 \pi \mu_2 j_{z2} R_2'^2 \lg \frac{r_2}{R_2} + \pi \mu_2 j_{z2} (R_2^2 - r_2^2) + 2 \mu_0 i_1 \lg \frac{R_2}{d}. \quad (35)$$

Durch Integration ergibt sich aus (34), da nach (22)

$$T^{(1)} = \frac{2\pi l j_{zi}}{2} \int \mathfrak{B}_{zi}^{(1)} r_1 dr_1:$$

$$T^{(1)} = \frac{1}{2} l i_1^2$$

$$\left\{ 2\mu_0 \lg \frac{d}{R_1} + 2\mu_1 \frac{R_1'^4}{(R_1^2 - R_1'^2)^2} \lg \frac{R_1}{R_1'} + \frac{\mu_1}{2} - \mu_1 \frac{R_1'^2}{R_1^2 - R_1'^2} \right\}.$$

Analog erhält man für  $T^{(2)}$ :

$$T^{(2)} = \frac{1}{2} l i_2^2$$

$$\left\{ 2\mu_0 \lg \frac{d}{R_2} + 2\mu_2 \frac{R_2'^4}{(R_2^2 - R_2'^2)^2} \lg \frac{R_2}{R_2'} + \frac{\mu_2}{2} - \mu_2 \frac{R_2'^2}{R_2^2 - R_2'^2} \right\}.$$

Es folgt daher:

$$L = l \left\{ 2\mu_0 \lg \frac{d^2}{R_1 R_2} + \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} - \mu_1 \frac{R_1'^2}{R_1^2 - R_1'^2} - \mu_2 \frac{R_2'^2}{R_2^2 - R_2'^2} + 2\mu_1 \frac{R_1'^4}{(R_1^2 - R_1'^2)^2} \lg \frac{R_1}{R_1'} + 2\mu_2 \frac{R_2'^4}{(R_2^2 - R_2'^2)^2} \lg \frac{R_2}{R_2'} \right\}. \quad (36)$$

Diese Formel gilt also nur, falls  $d$  groß im Verhältnis zu  $R_1$  und  $R_2$  ist.

Für zwei Vollzylinder ( $R_1' = R_2' = 0$ ) leitet man aus (36) ab:

$$L = l \left( 2\mu_0 \lg \frac{d^2}{R_1 R_2} + \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} \right). \quad (37)$$

Die Selbstinduktion ist daher um so größer, je geringer die Dicke der Drähte, und je größer ihr gegenseitiger Abstand und ihre Permeabilität ist.

Der kleinste Wert, welchen  $d$  annehmen kann, ist  $d = R_1 + R_2$ . Für diesen Wert dürfen wir aber die Formel (36) nur anwenden, falls  $\mu_0 = \mu_1 = \mu_2$  ist. Nehmen wir ihren gemeinsamen Wert zu 1 an, was z. B. eintritt, wenn Kupferdrähte in Luft lagern, so ergibt sich aus (37) für jenen kleinsten Wert von  $d$ :

$$L = l \left( 2 \lg \frac{(R_1 + R_2)^2}{R_1 R_2} + 1 \right). \quad (37')$$

In diesem Falle wird  $L$  am kleinsten, wenn man beiden Drähten gleiche Dicke gibt. Man hat dann, auf die Längeneinheit der Leitung bezogen, da  $l' = 2l$ , falls  $l'$  die Länge der ganzen Leitung ist:

$$\frac{L}{l'} = \left( \lg 4 + \frac{1}{2} \right) = 1,886. \quad (37'')$$

Am kleinsten fällt also die Selbstinduktion bei einem Stromkreise aus, wenn man seinem Draht überall die gleiche Dicke gibt und den hin-führenden Draht unmittelbar an den rückführenden anlegt. Doch auch dann verschwindet die Selbstinduktion nicht völlig, wenn sie auch bei weitem kleiner ist als in dem Fall, daß der Draht zu einem Solenoid

aufgewickelt ist, wie eine Vergleichung der Formeln (37'') und (21'') lehrt. So ist z. B. in dem der Formel (21'') zugrunde gelegten Beispiel die Selbstinduktion der Längeneinheit 2330mal größer als bei (37'').

Natürlich müssen beide Drähte voneinander isoliert sein, deshalb kann man in der Praxis diesen kleinsten Betrag (37'') nicht voll erreichen. Doch vermag man durch Anwendung breiter, flacher Metallstreifen die Selbstinduktion auf jede beliebige Kleinheit zu reduzieren.

In der Tat kann man zwei solcher sehr breiter Metallstreifen, die nahe aneinander liegen, als ein Solenoid von verschwindendem Querschnitt ansehen, und nach (21) verschwindet dessen Selbstinduktion.

Sind die Drähte Hohlzylinder von sehr geringer Wandstärke, so ergibt die Formel (26) oder (36), daß die Selbstinduktion ins Unendliche zunimmt, wenn die Wandstärke zu Null abnimmt.

c) Selbstinduktion eines Hohlzylinders, in dessen Innerem sich ein koaxialer Vollzylinder befindet. Im III. Kapitel auf S. 249 ist das Vektorpotential für diesen Fall berechnet. Nehmen wir an, daß die Summe der Stromstärken in beiden Zylindern verschwindet, d. h. daß der eine die Rückleitung des anderen ist, so lauten die auf S. 251 angegebenen Formeln (56) für das Innere des Hohlzylinders:

$$\mathfrak{A}_{z1}^{(1)} = \pi \mu_1 j_{z1} (R_1^2 - r^2) - 2 \pi \mu_1 j_{z1} R_1^2 \lg \frac{R_1}{r},$$

für das Innere des Vollzylinders:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_{z1}^{(2)} &= \pi \mu_1 j_{z1} (R_1^2 - R_1'^2) + \pi \mu_2 j_{z2} (R_2^2 - r^2) \\ &- 2 \pi \mu_1 j_{z1} R_1^2 \lg \frac{R_1}{R_1'} + 2 \pi \mu_0 j_{z2} R_2^2 \lg \frac{R_1'}{R_2}. \end{aligned}$$

Darin bedeutet  $\mu_1$  die Permeabilität des Hohlzylinders,  $\mu_2$  die des Vollzylinders,  $\mu_0$  die des Zwischenraumes zwischen beiden. Da nun ist

$$T = \frac{1}{2} \left\{ 2 \pi l j_{z1} \int_{R_1'}^{R_1} \mathfrak{A}_{z1}^{(1)} r dr + 2 \pi l j_{z2} \int_0^{R_2} \mathfrak{A}_{z1}^{(2)} r dr \right\},$$

so folgt mit Rücksicht auf

$$i_1 + i_2 = \pi j_{z1} (R_1^2 - R_1'^2) + \pi j_{z2} R_2^2 = 0:$$

$$L = l \left\{ 2 \mu_0 \lg \frac{R_1'}{R_2} + 2 \mu_1 \frac{R_1^4}{(R_1^2 - R_1'^2)^2} \lg \frac{R_1}{R_1'} - \mu_1 \frac{R_1^2}{R_1^2 - R_1'^2} + \frac{\mu_2 - \mu_1}{2} \right\}. \quad (38)$$

Die Selbstinduktion wird um so kleiner, je mehr sich Hohlzylinder und Vollzylinder einander nahe kommen, d. h. je mehr  $R_2$  gleich  $R_1'$  wird. Tritt dieser Grenzfall ein und ist  $\mu_0 = \mu_1 = \mu_2 = 1$ , so wird (38) zu:

$$L = l \frac{R_1^2}{R_1^2 - R_1'^2} \left( \frac{R_1^2}{R_1^2 - R_1'^2} \lg \frac{R_1^2}{R_1'^2} - 1 \right),$$

oder wenn man  $R_1^2 : R_1'^2 = \sigma$  setzt:

$$L = l \frac{\sigma}{\sigma - 1} \left( \frac{\sigma}{\sigma - 1} \lg \sigma - 1 \right). \quad (38')$$

Dieser Ausdruck nimmt ungefähr für  $\sigma = 2$ , d. h.  $R_1 = 1,41 R_1'$  einen Minimalwert an, nämlich  $0,76 \cdot l$ . Aber auch für andere Verhältnisse  $R_1 : R_1'$  ist die Selbstinduktion immer noch sehr gering, wie folgende Tabelle lehrt:

$\sigma$	$L : l$
1	$\infty$
1,5	1,14
2	0,76
3	0,82
4	1,12

Nennt man  $l'$  die Länge der ganzen Stromleitung, d. h. die Länge beider Zylinder, so ist  $l' = 2l$ . Die Selbstinduktion pro Längeneinheit der ganzen Leitung  $L : l'$  ist also noch die Hälfte des Quotienten  $L : l$ . — Für  $\sigma = 2$  ist daher  $L : l' = 0,38$ , d. h. die Selbstinduktion ist etwa noch 5mal kleiner als die zweier einander berührender Vollzylinder, da nach (37'') für diese  $L : l'$  den Wert 1,886 hat.

d) Ponderomotorische Wirkungen bei zwei parallelen Stromzylindern. Nach IV, 1, S. 296 stoßen sich die einzelnen Teile eines und desselben Stromsystems ab. Es wurde dort auch ein Experiment beschrieben, durch das diese Abstoßung zu demonstrieren war, indem ein Kupferbügel B auf zwei parallelen Quecksilberinnen schwimmt, denen ein elektrischer Strom zu- bzw. abgeführt wird. Besteht diese Stromleitung aus zwei parallelen sehr langen Drähten, welche die Länge  $l$  und den gegenseitigen Abstand  $d$  besitzen, so können wir die auf den Bügel B in der Richtung von  $l$  wirkende ponderomotorische Kraft jetzt berechnen, da wir den Koeffizienten der Selbstinduktion  $L$  des Stromsystems und folglich auch seine magnetische Energie  $T$  kennen. Denn nach Formel (20) auf S. 329 ist

$$T = \frac{1}{2} i^2 L,$$

falls  $i$  die Stromstärke im System bezeichnet. Die nach irgendeiner Richtung  $l$  wirkende Kraft ist daher

$$K_l = \frac{1}{2} i^2 \frac{\partial L}{\partial l},$$

da die bei Aenderung der Konfiguration um  $dl$  geleistete Arbeit  $K_l \cdot dl$  gleich ist der dadurch hervorgerufenen Aenderung  $dT$  von  $T$ .

Auf den Kupferbügel B wirkt daher nach der Formel (27) für  $L$  die fortreibende Kraft



$$K_1 = \frac{1}{2} i^2 \frac{\partial L}{\partial l} = i^2 \left( \lg \frac{d^2}{R_1 R_2} + \frac{1}{2} \right), \quad (39)$$

da durch Bewegung des Bügels nur die Länge  $l$  des Stromsystems vergrößert wird. Zur Anstellung jenes Experimentes empfiehlt es sich also, die Radien  $R_1$  und  $R_2$  der Zuleitungsdrähte klein im Vergleich zu ihrem gegenseitigen Abstand zu wählen.

Es besteht aber auch zwischen den Zuleitungsdrähten eine Tendenz, ihren gegenseitigen Abstand  $d$  zu vergrößern, entsprechend dem Satz, daß parallele, entgegengesetzt gerichtete Ströme sich abstoßen (IV, 2, S. 299). Die in dieser Richtung auf die Zuleitungsdrähte wirkende Kraft ist

$$K_d = \frac{1}{2} i^2 \frac{\partial L}{\partial d} = 2 i^2 \frac{1}{d}. \quad (40)$$

Zur Demonstration dieser Wirkung ist es also günstig, den gegenseitigen Abstand  $d$  der Drähte klein zu wählen, während es dabei auf ihre Dicken gar nicht ankommt. Formel (40) folgt auch direkt aus Formel (98) des III. Kapitels S. 285, wenn man beachtet, daß hier  $\mu = 1$ ,  $\varepsilon = 90^\circ$  und  $\varnothing$  nach Formel (41 a) des III. Kapitels (S. 246)  $= 2i/d$  zu setzen ist.

## 11. Bemerkungen über gegenseitige Induktionskoeffizienten.

Auch der Koeffizient der gegenseitigen Induktion  $L_{12}$  ist nach Formel (11), S. 302 ebenso wie der Koeffizient der Selbstinduktion  $L_{11}$  von der Dimension einer Länge und wird in denselben Einheiten wie jener ausgedrückt. Denn es wird entsprechend der Formel:

$$E_2 = -L_{12} \frac{di_1}{dt} \quad \text{oder} \quad E_1 = -L_{12} \frac{di_2}{dt}$$

in dem einen von zwei Leitersystemen, deren gegenseitiger Induktionskoeffizient den Betrag von 1 Henry hat, die elektromotorische Kraft 1 Volt induziert, wenn in dem anderen sich die Stromstärke in einer Sekunde um 1 Ampere ändert.

Während die Selbstinduktionskoeffizienten nach der Bemerkung zu Anfang des vorigen Paragraphen nicht mit der Integralformel (11) auf S. 302 berechnet werden können, ist die Berechnung für die Koeffizienten der gegenseitigen Induktion auf Grund jener Formeln möglich. Doch wollen wir die Durchrechnung spezieller Fälle hier nicht durchführen. Wir verweisen in dieser Hinsicht auf Maxwells Lehrbuch, Band II, und auf die Sammlung von Formeln über Induktionskoeffizienten von E. B. Rosa und L. Cohen<sup>1)</sup>, die alle Angaben über die neuere Literatur

<sup>1)</sup> E. B. Rosa und L. Cohen, Bull. of the Bureau of Standards, Washington, 5, Nr. 1, 1908.

enthält. Wir beschränken uns hier auf einige einfache Betrachtungen von prinzipieller Bedeutung.

Wir wollen die gegenseitige Induktion zweier Spulen erörtern zunächst unter der Annahme, daß der ganze Induktionsfluß der einen Spule auch durch die andere hindurchgehe. Der ganze in der ersten Spule durch die Stromstärke  $i_1$  erzeugte Induktionsfluß sei  $N_1$ . Geht dieser vollständig durch sämtliche Windungen  $n_2$  der zweiten Spule hindurch, so ist die in ihr bei einer Aenderung der Stromstärke  $i_1$  erzeugte elektromotorische Kraft:

$$E_2 = - n_2 \frac{d N_1}{dt} = - \frac{n_2}{n_1} n_1 \frac{d N_1}{dt} = - L_{12} \frac{di_1}{dt}.$$

Anderseits ist aber  $n_1 \frac{d N_1}{dt}$  nichts anderes als die elektromotorische Kraft der Selbstinduktion in der ersten Spule, kann also durch  $L_{11} \frac{di_1}{dt}$  ersetzt werden. Daraus folgt die Beziehung:

$$L_{12} = \frac{n_2}{n_1} L_{11}. \quad (41)$$

Liegt die Spule 2 zur Spule 1 so, daß nicht der ganze von 1 erzeugte Induktionsfluß  $N_1$ , sondern nur ein Teil  $k_1 N_1$ , wo  $k_1$  einen echten Bruch bedeutet, durch 2 hindurchgeht, so ist auch  $E_2$  entsprechend kleiner, und es gilt statt (41) die Beziehung:

$$L_{12} = k_1 \frac{n_2}{n_1} L_{11}. \quad (42)$$

Betrachtet man umgekehrt den von dem Strom  $i_2$  in der Spule 2 hervorgerufenen Induktionsfluß  $N_2$  und bezeichnet mit  $k_2 N_2$  den durch die Windungen  $n_1$  der ersten Spule hindurchgehenden Anteil von  $N_2$ , so gilt entsprechend:

$$L_{21} = k_2 \frac{n_1}{n_2} L_{22}. \quad (43)$$

Es ist aber nach Abschnitt 5 dieses Kapitels für Zustandsänderungen, wie wir sie hier betrachten,  $L_{12} = L_{21}$ . Berücksichtigt man dies, so ergeben sich aus (42) und (43) die Beziehungen:

$$\frac{L_{11}}{L_{22}} = \frac{k_2}{k_1} \frac{n_1^2}{n_2^2} \quad (44)$$

und

$$L_{12}^2 = k_1 \cdot k_2 \cdot L_{11} \cdot L_{22}. \quad (45)$$

Für zwei gegebene Spulen in bestimmter Lage zueinander sind  $k_1$  und  $k_2$  bestimmte Zahlenfaktoren. Ihr Verhältnis muß nach (44) unabhängig von der gegenseitigen Lage der Spulen sein. Ihr Produkt ist davon ab-

hängig. Man bezeichnet die Größe  $\sqrt{k_1 k_2}$  mit  $k$  und nennt sie den Koppelungsfaktor:

$$L_{12} = k \sqrt{L_{11} \cdot L_{22}}. \quad (45')$$

Ist das System so beschaffen, daß nicht bloß der ganze Induktionsfluß der ersten Spule durch die zweite, sondern auch der ganze Induktionsfluß der zweiten Spule durch die erste hindurchgeht, so ist  $k_1 = k_2 = 1$ . Dann gelten die Beziehungen:

$$\frac{L_{11}}{L_{22}} = \frac{n_1^2}{n_2^2}, \quad L_{12} = \sqrt{L_{11} \cdot L_{22}}. \quad (46)$$

Sehr angenähert ist die aufgestellte Bedingung erfüllt, wenn man die beiden Spulen über- oder nebeneinander auf einen Eisenring oder einen in sich zurücklaufenden Eisenkern von beliebiger Gestalt wickelt. Denn die außerordentliche magnetische Leitfähigkeit des Eisens bewirkt, daß der von einer Spule erzeugte Induktionsfluß ganz oder fast ganz im Eisen verläuft, also von dem Eisen auch durch die andere Spule hindurchgeleitet wird. Der Typus derartiger Apparate ist der in der Technik gebrauchte Transformator, auf dessen Anwendung wir später noch zu sprechen kommen.

## 12. Energieverlust durch Hysteresis.

Wenn durch irgendwelche Konfigurationsänderungen im Magnetfelde die Kraftlinienzahl geändert wird, welche die elektrischen Ströme des Magnetfeldes umschlingen, und diesen stets so viel elektrische Energie zugeführt wird, daß die Stärke dieser Ströme konstant bleibt, so ist nach den Folgerungen des Abschnittes 6 auf S. 319 der Gesamtwert dieser elektrischen Energie gleich

$$\sum i dN,$$

wobei die  $\Sigma$  über alle Ströme des Magnetfeldes zu erstrecken ist. Durchläuft die Konfigurationsänderung des Systemes einen Kreisprozeß, so verschwindet daher jener Gesamtwert elektrischer Energie, da sie für jeden einzelnen Strom verschwindet. Denn  $i$  soll für ihn konstant bleiben und  $dN$  ist gleich Null, falls ein Kreisprozeß durchlaufen wird. Dieser Satz bleibt immer gültig, auch wenn im Magnetfelde Körper verschoben werden, welche Hysteresis in ihrem magnetischen Verhalten zeigen.

Daher kann man von der elektrischen Energie, welche zuzuführen notwendig ist, um die Stromstärken bei Konfigurationsänderungen konstant zu erhalten, bei Kreisprozessen derselben einfach absehen.

Anders liegen die Verhältnisse, wenn die Kraftlinienzahl nicht durch Konfigurationsänderungen des Systemes verändert wird, sondern durch

Änderung in den Stromstärken. In diesem Fall wird keine mechanische Arbeit geleistet, sondern nur elektrische. Denken wir z. B., daß die Stromstärke  $i$  in einem Solenoid von  $n$  Windungen, welches einen Eisenkern vom Querschnitt  $q$  enthält, zyklisch variiert wird. Um die Stromstärke um  $di$  zu steigern, ist ein Aufwand elektrischer Energie notwendig, welcher ist

$$dE = n E i dt = n i dN.$$

Von der Zahl  $N$  der Induktionslinien, welche das Solenoid durchsetzen, mögen  $N_1$  in Luft,  $N_2$  im Eisenkern verlaufen, indem dieser das Innere des Solenoides nicht ganz ausfüllen soll. Es ist also

$$dE = ni(dN_1 + dN_2).$$

Nennt man  $\mathfrak{B}$  den Wert der magnetischen Induktion im Eisen, d. h. die Induktionslinienzahl der Flächeneinheit, so ist

$$dN_2 = q \cdot d\mathfrak{B}.$$

Ist ferner  $l$  die Länge des Solenoides und des Eisenkernes, so ist die Feldstärke  $\mathfrak{H}$  im Solenoid nach Formel (67) auf S. 258

$$\mathfrak{H} = \frac{4\pi n i}{l}, \text{ d. h. } ni = \frac{\mathfrak{H} l}{4\pi}.$$

Es läßt sich daher  $dE$  in der Form schreiben:

$$dE = n i dN_1 + \frac{\mathfrak{H} d\mathfrak{B}}{4\pi} q l.$$

Für einen Kreisprozeß, d. h. bei einer zyklischen Änderung der Stromstärke, verschwindet nun das erste der beiden Glieder der rechten Seite dieser Gleichung, weil  $N_1$  eine eindeutige Funktion von  $i$  ist, dagegen ergibt das zweite jener Glieder

$$\int dE = \frac{v}{4\pi} \int \mathfrak{H} d\mathfrak{B},$$

wo  $v$  das Volumen des Eisenkernes bedeutet.  $\int \mathfrak{H} d\mathfrak{B}$  ist gleich dem Inhalt  $J$  der Hysteresisschleife (vgl. S. 204) des Eisens, und zwar mit positivem Vorzeichen, da  $\mathfrak{H}$  mit wachsendem  $\mathfrak{B}$  größer ist als mit abnehmendem  $\mathfrak{B}$ . Es ergibt sich also

$$\int dE = \frac{J}{4\pi} v,$$

d. h. bei einer zyklischen Magnetisierungsänderung des Eisens ist pro Raumeinheit ein Aufwand an Energie notwendig, welcher gleich dem Inhalt der jenem Zyklus entsprechenden Hysteresisschleife des Eisens ist, dividiert durch  $4\pi$ . Es ist dieses dasselbe Gesetz, wie es oben in Kapitel II, Abschnitt 34 abgeleitet wurde unter der Annahme, daß der Magnetisierungszyklus durch Ortsänderung des Eisens hervorgebracht werde.

Da in dem hier betrachteten Falle, in welchem der Magnetisierungszyklus nur durch Stromänderungen bewerkstelligt wird, gar keine mechanische Arbeit geleistet wird, so muß als einzig mögliche Kompensation des Energieaufwandes eine Erwärmung des Eisens eintreten. Für diese ergibt sich daher dasselbe Gesetz, wie es schon oben abgeleitet ist unter der Annahme, daß die Stromstärke konstant bleibt und das Eisen nur Ortsänderungen erfährt.

### 13. Das Nahwirkungsgesetz der elektromotorischen Kraft für ruhende Körper.

Das anschaulichste Gesetz, welches wir bisher für die Elektroinduktionskraft abgeleitet hatten, war in den Formeln (13) der S. 319 enthalten, welche aussagen, daß die Elektroinduktionskraft in einer beliebigen geschlossenen Kurve gleich ist der Geschwindigkeit der Aenderung der Induktionslinienzahl, welche diese Kurve umfaßt. Dieses Gesetz ist aber kein Nahwirkungsgesetz. Wir sind indes schon im Abschnitt 8 (S. 323) von diesem Gesetze aus zu einem Nahwirkungsgesetze gelangt, indem dort der Satz aufgestellt wurde, daß in jedem Stück  $dl$  eines geschlossenen Leiters bei seiner Bewegung eine elektromotorische Kraft induziert wird, welche gleich der während der Bewegung von  $dl$  geschnittenen Anzahl magnetischer Induktionslinien ist, dividiert durch die während der Bewegung verstrichene Zeit  $dt$ . Ein ganz analoges Gesetz würde sich ergeben, wenn  $dl$  ruhte und eine Wanderung der Kraftlinien gegen  $dl$  hervorgebracht würde durch Aenderung der Stromstärke des Stromes  $l$  selbst oder anderer Ströme.

Analytisch kann man das Nahwirkungsgesetz der Elektroinduktionskraft aus den Formeln (13) leicht ableiten, wenn man die in der geschlossenen Kurve  $l$  induzierte elektromotorische Kraft auffaßt als das Integral der in den Elementen von  $l$  induzierten elektromotorischen Kräfte. Nennt man die Resultante der pro Längeneinheit an irgendeiner Stelle induzierten elektromotorischen Kraft  $\mathcal{E}$  und ihre Komponenten nach den Koordinatenachsen  $\mathcal{E}_x$ ,  $\mathcal{E}_y$ ,  $\mathcal{E}_z$ , so ist die in einem Elemente  $dl$  der Kurve  $l$  erzeugte elektromotorische Kraft:

$$\mathcal{E} dl \cos(\mathcal{E}l) = \mathcal{E}_x dx + \mathcal{E}_y dy + \mathcal{E}_z dz,$$

falls  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  die Projektionen des Elementes  $dl$  auf die Koordinatenachsen bedeuten. Die Integralkraft  $E$  der Induktion längs der ganzen Kurve  $l$  ist also

$$E = \int [\mathcal{E}_x dx + \mathcal{E}_y dy + \mathcal{E}_z dz]. \quad (47)$$

Wenn ein Strom schon in  $l$  fließt, so soll dieses Integral in Richtung des positiven Stromes längs  $l$  erstreckt werden. Ein positiver Wert von

E besagt dann, daß die Integralkraft E im Sinne des positiven Stromes wirkt, d. h. den schon bestehenden Strom zu verstärken sucht.

Setzt man den Wert (47) in die Formeln (13) der S. 319 ein, so entsteht:

$$\int [\mathfrak{E}_x dx + \mathfrak{E}_y dy + \mathfrak{E}_z dz] = - \frac{dN}{dt}. \quad (48)$$

Nun haben wir aber schon früher im Kapitel IV auf S. 300 die von der Kurve l umschlungene Kraftlinienzahl N durch ein über l zu erstreckendes Linienintegral dargestellt. Denn nach der dortigen Formel (7) ist

$$N = \int [\mathfrak{B}_x dx + \mathfrak{B}_y dy + \mathfrak{B}_z dz], \quad (49)$$

wobei  $\mathfrak{B}_x, \mathfrak{B}_y, \mathfrak{B}_z$  die Komponenten des Vektorpotentials (vgl. oben S. 239) bedeuten und das Integral über l zu erstrecken ist ebenfalls im Sinne des positiven Stromes, wenn ein solcher schon vorhanden sein sollte.

Wenn nun die Stromlinie l ihre Gestalt und Lage im Raum fest beibehält, was wir zunächst annehmen wollen, so kann eine Aenderung von N im Integral (49) nur dadurch veranlaßt werden, daß die Werte von  $\mathfrak{B}_x, \mathfrak{B}_y, \mathfrak{B}_z$  an einer bestimmten Stelle von l sich mit der Zeit ändern. Bezeichnet man die entsprechenden Differentialquotienten dieser Aenderung

mit  $\frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial t}, \frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial t}, \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial t}$ , so ist also nach (48) und (49):

$$\begin{aligned} E &= \int [\mathfrak{E}_x dx + \mathfrak{E}_y dy + \mathfrak{E}_z dz] \\ &= - \int \left[ \frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial t} dx + \frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial t} dy + \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial t} dz \right]. \end{aligned} \quad (50)$$

Diese Beziehung soll für jede beliebige Gestalt des Integrationsweges l gelten, d. h. für alle beliebigen Werte dx, dy, dz. Daraus folgt, daß sein muß:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_x &= - \frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial t} - \frac{\partial \chi}{\partial x}, \\ \mathfrak{E}_y &= - \frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial t} - \frac{\partial \chi}{\partial y}, \\ \mathfrak{E}_z &= - \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial t} - \frac{\partial \chi}{\partial z}, \end{aligned} \quad (51)$$

wo  $\chi$  irgendeine vorläufig noch unbestimmte eindeutige Funktion des Ortes sein muß. In der Tat kann  $\mathfrak{E}_x, \mathfrak{E}_y, \mathfrak{E}_z$  aus der Gleichheit der über eine geschlossene Kurve zu nehmenden Integrale (50) nicht vollständig aus  $\mathfrak{B}_x, \mathfrak{B}_y, \mathfrak{B}_z$  bestimmt werden, da das Integral

$$\int \left[ \frac{\partial \chi}{\partial x} dx + \frac{\partial \chi}{\partial y} dy + \frac{\partial \chi}{\partial z} dz \right]$$

den Wert Null besitzt, wenn es über eine geschlossene Kurve erstreckt wird und  $\chi$  eine eindeutige Funktion des Ortes ist.

Die Gleichungen (51) gelten offenbar an jeder Stelle des Raumes und sie sind davon unabhängig, daß wir sie aus Betrachtungen an einer beliebig durch den Raum gelegten geschlossenen Kurve gewonnen haben, eben weil die Gestalt und Lage dieser Kurve ganz willkürlich war.

Nach den Definitionsgleichungen (21) auf S. 239 im III, Kapitel für das Vektorpotential, nämlich:

$$\mu \mathfrak{G}_x = \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial z} \text{ usw.}$$

kann man nun  $\mathfrak{B}_x$ ,  $\mathfrak{B}_y$ ,  $\mathfrak{B}_z$  aus den Formeln (51) eliminieren. Man gewinnt dadurch das Formelsystem:

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial \mathfrak{G}_x}{\partial t} &= \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial y}, \\ \mu \frac{\partial \mathfrak{G}_y}{\partial t} &= \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial z}, \\ \mu \frac{\partial \mathfrak{G}_z}{\partial t} &= \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x}, \end{aligned} \quad (52)$$

welches keinerlei unbestimmte Funktion  $\chi$  mehr enthält. Die Gleichungen (52) gelten nicht nur für homogene Medien, sondern auch für inhomogene, in denen  $\mu$  mit dem Ort wechselt, da  $\mathfrak{B}_x$ ,  $\mathfrak{B}_y$ ,  $\mathfrak{B}_z$  auch für inhomogene Medien durch die Formeln (21) des III. Kapitels definiert sind, und die in diesem Kapitel aufgestellten Beziehungen (48) und (49) ebenfalls für inhomogene Medien Gültigkeit besitzen.

Die Gleichungen (52) sind nun tatsächlich ein Nahewirkungsgesetz für die Elektroinduktionskraft in ruhenden Körpern.

Wir haben hier an Stelle der induzierten Gesamtkraft  $E$  ihren Wert für die Längeneinheit der Kurve eingeführt und diese Größe mit dem Symbol  $\mathfrak{E}$  bezeichnet, das wir in der Elektrostatik für die elektrische Kraft benutzt haben. Die Berechtigung dazu liegt in dem Umstande, daß das Linienintegral der elektrischen Kraft in der Tat eine Größe darstellt, die man als elektromotorische Kraft, gemessen durch die Differenz der Potentialwerte an den Endpunkten der Linie, bezeichnet (siehe I, 8, Formel [5], S. 18) und darin, daß die Gleichungen (52) für einen statischen, d. h. mit der Zeit nicht veränderlichen Zustand in das erste Differentialgesetz der elektrischen Kraft übergehen (siehe I, 9, S. 19). Insofern sagen die Gleichungen mehr aus, als in der Grundlage, aus der sie abgeleitet sind, enthalten ist. Denn ursprünglich stellen die Gleichungen doch nur den

Induktionsvorgang dar, und die Größe  $\mathcal{E}$  ist die durch Induktion hervorgerufene elektrische Kraft, die gleich Null ist, wenn keine Induktionswirkung, d. h. kein zeitlich veränderliches Magnetfeld vorhanden ist. Aber die rechten Seiten der Gleichung (52) stellen eine solche Verknüpfung der Komponenten der Größe  $\mathcal{E}$  dar, daß diese Ausdrücke auch dann noch eine Eigenschaft von  $\mathcal{E}$  ausdrücken, wenn sie gleich Null sind, die Eigenschaft nämlich, daß  $\mathcal{E}$  in diesem Falle ein Potential hat; in den Gleichungen (51) würde  $\chi$  dieses Potential darstellen. Aber dieses  $\mathcal{E}$  muß dann natürlich eine andere Ursache haben als den Induktionsvorgang, der ja eben nicht mehr vorhanden sein soll; es muß in diesem Falle von gegebenen elektrischen Ladungen abhängen, wie wir es in der Elektrostatik behandelt haben.

Es ist aber zu beachten, daß die Größe  $\mathcal{E}$  hier durch einen ganz anderen Vorgang als in der Elektrostatik definiert ist, nämlich durch die Beziehung zur zeitlichen Veränderung der magnetischen Induktion. Damit ist die Einheit der Größe  $\mathcal{E}$  und ebenso der elektromotorischen Kraft  $\mathcal{E}$  hier eine ganz andere, als wir sie in der Elektrostatik benutzt haben. Wir werden diese Beziehungen ausführlich im nächsten Kapitel behandeln.

Außerdem ist bei den Gleichungen (52) die Analogie mit den Maxwellschen Formeln (14) der S. 232 sehr bemerkenswert, welche ein Nahewirkungsgesetz für die elektrische Kraft sind.

Man kann diese Analogie noch deutlicher hervortreten lassen, wenn man das Bild der Strömung, wie wir es in III, 11 getan haben, nicht bloß auf den Vorgang des elektrischen Stromes, sondern auch auf die Eigenschaften des magnetischen Feldes anwendet. Wir haben dort die Größen  $\mathfrak{B}_x/4\pi$ ,  $\mathfrak{B}_y/4\pi$ ,  $\mathfrak{B}_z/4\pi$  als die Komponenten der magnetischen Verschiebung bezeichnet, wobei unter Verschiebung nicht der Akt des Verschiebens, sondern das Endergebnis desselben, gewissermaßen der im statischen Felde dauernd bestehende Abstand von der Gleichgewichtslage verstanden ist, etwa im Sinne der Verrückung in

einem elastisch deformierten Körper. Die Größe  $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}$  stellt dann

den Akt des Verschiebens dar und mißt die in der Sekunde vor sich gehende Änderung der Verschiebung. Bezeichnet man diesen Vorgang

als einen magnetischen Strom, so kann man die Größe  $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}$

als die Stärke des magnetischen Stromes für die senkrecht zu den magnetischen Induktionslinien genommene Querschnittseinheit oder als die Stromdichtigkeit bezeichnen. Verwenden wir für diese den Buchstaben  $\iota$ , bzw. für die Komponenten die Symbole  $\iota_x$ ,  $\iota_y$ ,  $\iota_z$ , so lassen sich die Gleichun-



$$\begin{aligned}
 4\pi i_x &= \frac{\partial \mathfrak{G}_y}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{G}_z}{\partial y}, \\
 4\pi i_y &= \frac{\partial \mathfrak{G}_z}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{G}_x}{\partial z}, \\
 4\pi i_z &= \frac{\partial \mathfrak{G}_x}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{G}_y}{\partial x}.
 \end{aligned}
 \tag{52'}$$

Vergleicht man sie in dieser Fassung mit den Gleichungen (14) des III. Kapitels, so kann man die Analogie der beiden Formelsysteme in Worten folgendermaßen ausdrücken: Ein elektrischer Strom erzeugt um sich herum einen Wirbel magnetischer Kraft, der den Strom in demselben Sinne umkreist, in dem nach I, 10 die positive Drehung um eine Achse definiert ist. Ein magnetischer Strom erzeugt um sich herum einen Wirbel elektrischer Kraft, der die positive Richtung des magnetischen Stromes im Sinne einer negativen Drehung umkreist. Dabei ist nur im Auge zu behalten, daß es einen magnetischen Strom nur als vorübergehende Veränderung des magnetischen Zustandes gibt, aber nicht als stationären Strom, wie es der elektrische Strom in den Gleichungen (14) ist. Es gibt eben keinen magnetischen Leiter nach Analogie der elektrischen Leiter.

So wie man eine Beziehung zwischen den Stromkomponenten  $j_x$ ,  $j_y$ ,  $j_z$  und denen der elektromotorischen Kraft  $\mathfrak{G}_x$ ,  $\mathfrak{G}_y$ ,  $\mathfrak{G}_z$  herstellt, kann man aus beiden Nahwirkungsgesetzen (52) und (14) der S. 232 zwei Nahwirkungsgesetze herstellen für die magnetische und die elektrische Kraft, welche nur je eine dieser Größen enthalten. Diese Aufgabe soll weiter unten gelöst werden.

## 14. Das Nahwirkungsgesetz der elektromotorischen Kraft für bewegte Körper.

Die Ableitung des vorigen Abschnittes setzte voraus, daß die Stromlinie  $l$  ihre Gestalt und Lage im Raume fest beibehielt. Wir wollen noch den allgemeineren Fall behandeln, daß die Induktionswirkung nicht bloß durch zeitliche Veränderung des Magnetfeldes bei ruhendem Leiter, sondern auch durch Bewegung des Leiters im Magnetfelde zustande kommt. Wenn ein linearer geschlossener Stromkreis <sup>1)</sup>  $l$  im Laufe der Zeit  $dt$  auch seine Gestalt und Lage im Raume ändert, so ist die dadurch herbeigeführte Änderung  $dN$  der Zahl  $N$  der umschlungenen Induktionslinien zu berechnen, indem man die Differenz der Integrale:

<sup>1)</sup> Der Wert Stromkreis ist hier nicht im Sinne des III. Kapitels zu verstehen.

$$N + dN = \int \mu [\mathfrak{G}_x' \cos (nx) + \mathfrak{G}_y' \cos (ny) + \mathfrak{G}_z' \cos (nz)] ds \quad (53)$$

und

$$N = \int \mu [\mathfrak{G}_x \cos (nx) + \mathfrak{G}_y \cos (ny) + \mathfrak{G}_z \cos (nz)] ds \quad (54)$$

bildet, von denen das erste zu integrieren ist über diejenige Fläche  $s'$ , welche von dem Stromkreis  $l$  in seiner neuen Lage und Gestalt umrandet ist, während das zweite Integral sich auf die anfängliche von  $l$  umrandete Fläche  $s_1$  bezieht.  $\mathfrak{G}_x, \mathfrak{G}_y, \mathfrak{G}_z$  bezeichnen die anfänglichen Werte der Komponenten der magnetischen Kraft,  $\mathfrak{G}_x', \mathfrak{G}_y', \mathfrak{G}_z'$  die im Verlaufe der Zeit  $dt$  angenommenen Werte  $\mathfrak{G}_x + d\mathfrak{G}_x, \mathfrak{G}_y + d\mathfrak{G}_y, \mathfrak{G}_z + d\mathfrak{G}_z$ .

Nun ist das Integral (53) aufzufassen als die Summe zweier Integrale  $J_1$  und  $J_2$ , von denen das erste  $J_1$  über die von der anfänglichen Lage von  $l$  umrandete Fläche  $s_1$  zu erstrecken ist, während das zweite  $J_2$  über diejenige Fläche  $s_2$  zu erstrecken ist, welche von der Anfangs- und Endlage von  $l$  umrandet ist; denn es ist  $s' = s_1 + s_2$ .

Die Differenz zwischen  $J_1$  und dem Integral (54) bezieht sich nun auf ein und dieselbe vom Integrationswege umrandete Fläche  $s_1$ . Diese Differenz entsteht also nur durch Aenderung der magnetischen Kraft, weil z. B.  $\mathfrak{G}_x'$  von  $\mathfrak{G}_x$  verschieden ist. Sie kann daher, wie im vorigen Abschnitt, durch das über die Anfangslage von  $l$  zu erstreckende Linienintegral:

$$dt \left[ \frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial t} dx + \frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial t} dy + \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial t} dz \right] \quad (55)$$

ausgedrückt werden, wobei  $\frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial t}$  usw. die durch Aenderung der magnetischen Kraft herbeigeführte Aenderung der Komponente  $\mathfrak{B}_x$  usw. des Vektorpotentials an einer bestimmten Stelle von  $l$  bezeichnet.

Der zweite Teil des Integrals (53), d. h. das Integral  $J_2$ , kann nun ebenfalls in ein Linienintegral über  $l$  umgewandelt werden. Wir können nämlich ein Element  $ds$  von  $J_2$  auffassen als dasjenige Flächenstück, welches zwischen der Anfangslage eines bestimmten Elementes  $dl$  von  $l$  und der Endlage dieses Elementes liegt. Die Produkte  $\cos (nx) ds, \cos (ny) ds, \cos (nz) ds$  bedeuten dann die Projektionen dieses Flächenstücks  $ds$  auf die Koordinatenebenen. Diese Projektionen bestimmen sich nun bequem mit Hilfe des Lehrsatzes der analytischen Geometrie, daß der Flächeninhalt  $f$  eines in der  $xy$ -Ebene liegenden Parallelogramms, dessen Ecken die Koordinaten:  $a, b, a + x_1, b + y_1, a + x_2, b + y_2, a + x_1 + x_2, b + y_1 + y_2$  besitzen, gegeben ist durch:

$$f = \pm (x_2 y_1 - x_1 y_2).$$

Das positive oder negative Vorzeichen hängt davon ab, wie die Ecken 1 und 2 des Parallelogramms zueinander liegen. [Diese Formel ist sofort zu beweisen, wenn man berücksichtigt, daß  $f = pq \sin \alpha$  ist (vgl. Fig. 48) und daß, falls man den Koordinatenanfang in die eine Ecke des Parallelogramms legt, d. h.  $a = b = 0$  setzt,  $p^2 = x_1^2 + y_1^2$ ,  $q^2 = x_2^2 + y_2^2$ ,  $pq \cos \alpha = x_1 x_2 + y_1 y_2$  ist.]

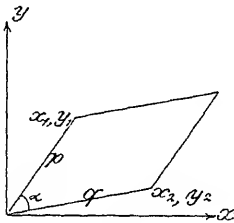


Fig. 48.

Nennen wir die Projektionen des Elementes  $dl$  auf die Koordinatenachsen  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , nennen wir ferner die Projektionen der vom Elemente  $dl$  im Laufe der Zeit  $dt$  zurückgelegten Strecke  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$ , so haben die Ecken des Parallelogramms  $ds$  folgende  $x$ -Koordinaten:  $x$ ,  $x + dx$ ,  $x + \delta x$ ,  $x + dx + \delta x$ , und folgende  $y$ -Koordinaten:  $y$ ,  $y + dy$ ,  $y + \delta y$ ,  $y + dy + \delta y$ . Es ist daher die Projektion von  $ds$  auf die  $xy$ -Ebene:

$$ds \cos(nz) = \pm (\delta x dy - \delta y dx), \quad (56)$$

und analog folgt durch zyklische Vertauschung der Buchstaben:

$$ds \cos(nx) = \pm (\delta y dz - \delta z dy),$$

$$ds \cos(ny) = \pm (\delta z dx - \delta x dz).$$

Das Vorzeichen ist in folgender Weise zu entscheiden: Die Zahl der von  $l$  umfaßten Kraftlinien wird vergrößert, d. h. die Elemente des Integrals  $J_2$  sind positiv, falls die Fortschrittingsrichtung von  $dl$  ( $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$ ), die positive Richtung von  $dl$  ( $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ ) und die positive Normale so zueinander liegen, wie die positive  $x$ -Achse zur positiven  $y$ -Achse zur positiven  $z$ -Achse, die beständig die auf S. 21 besprochene Lage zueinander besitzen sollen. Nehmen wir also z. B. an, daß die Normale  $n$  mit der  $z$ -Achse zusammenfiele, daß  $dl$  der  $y$ -Achse parallel läge, d. h. daß  $dx = 0$  ist, und daß die Fortschrittingsrichtung von  $dl$  der  $x$ -Achse parallel läge, d. h. daß  $\delta y = 0$  ist, so muß  $ds \cos(nz)$  positiv sein. Daraus erkennt man, daß das obere Zeichen der Formeln (56) zu wählen ist. Es wird daher:

$$J_2 = \int \mu [\mathfrak{H}_x' (\delta y dz - \delta z dy) + \mathfrak{H}_y' (\delta z dx - \delta x dz) + \mathfrak{H}_z' (\delta x dy - \delta y dx)].$$

$J_2$  stellt sich also als Linienintegral über  $l$  dar.

In diesem Integral können unbeschadet der Genauigkeit für  $\mathfrak{H}_x'$ ,  $\mathfrak{H}_y'$ ,  $\mathfrak{H}_z'$  die anfänglichen Werte  $\mathfrak{H}_x$ ,  $\mathfrak{H}_y$ ,  $\mathfrak{H}_z$  gesetzt werden, da  $\mathfrak{H}_x'$ ,  $\mathfrak{H}_y'$ ,  $\mathfrak{H}_z'$  mit den unendlich kleinen Größen  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  multipliziert auftreten. Man kann diese Größen durch die Komponenten  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $\dot{z}$  der Geschwindigkeit des Elementes  $dl$  ausdrücken. Es ist nämlich:

$$\delta x = \dot{x} dt, \quad \delta y = \dot{y} dt, \quad \delta z = \dot{z} dt.$$

Setzt man diese Werte in den Ausdruck für  $J_z$  ein, und setzt man  $\mathfrak{G}_x' = \mathfrak{G}$  usw., so wird

$$J_z = dt \int \mu [(\mathfrak{G}_y \dot{z} - \mathfrak{G}_z \dot{y}) dx + (\mathfrak{G}_z \dot{x} - \mathfrak{G}_x \dot{z}) dy + (\mathfrak{G}_x \dot{y} - \mathfrak{G}_y \dot{x}) dz]. \quad (57)$$

Die Differenz von (53) und (54) ist gleich der Summe von (55) und (57). Dividiert man durch  $dt$ , setzt man nach (13)  $E = -\frac{dN}{dt}$ , und stellt  $E$  durch das Linienintegral (47) der elektrischen Kraft dar, so erhält man, gerade wie im vorigen Paragraphen, die Formeln (51) aus (50) erhalten sind, hier:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_x &= -\frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial t} + \mu \mathfrak{G}_z \dot{y} - \mu \mathfrak{G}_y \dot{z} - \frac{\partial \chi}{\partial x}, \\ \mathfrak{E}_y &= -\frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial t} + \mu \mathfrak{G}_x \dot{z} - \mu \mathfrak{G}_z \dot{x} - \frac{\partial \chi}{\partial y}, \\ \mathfrak{E}_z &= -\frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial t} + \mu \mathfrak{G}_y \dot{x} - \mu \mathfrak{G}_x \dot{y} - \frac{\partial \chi}{\partial z}. \end{aligned} \quad (58)$$

Diese Beziehungen gelten nicht nur, falls der stromführende, bewegte Körper sehr dünn ist, sondern sie gelten für jede Stelle eines beliebig ausgedehnten bewegten Körpers, in welchem überhaupt ein elektrischer Strom zustande kommen kann, da man einen solchen Körper stets als Summe von unendlich vielen, unendlich dünnen, stromführenden Röhren auffassen kann.

Mit Hilfe der Definitionsgleichungen der Komponenten des Vektorpotentials [oben S. 239, Formel (21)] kann man wiederum aus (58)  $\mathfrak{B}_x$ ,  $\mathfrak{B}_y$ ,  $\mathfrak{B}_z$  eliminieren. Es fällt dadurch auch  $\chi$  heraus und man erhält:

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial \mathfrak{G}_x}{\partial t} &= \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} (\dot{x} \mu \mathfrak{G}_z - \dot{z} \mu \mathfrak{G}_x) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial y} (\dot{y} \mu \mathfrak{G}_x - \dot{x} \mu \mathfrak{G}_y) \end{aligned} \quad (59)$$

und zwei analoge Gleichungen.

Ist die Bewegungsgeschwindigkeit des Körpers, deren Komponenten  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $\dot{z}$  sind, in allen seinen Teilen dieselbe, d. h. erfährt er eine translatorische Bewegung ohne Rotation und Deformation, so wird mit Berücksichtigung der Gleichung (6') auf S. 174, nämlich:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\mu \mathfrak{G}_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\mu \mathfrak{G}_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\mu \mathfrak{G}_z)}{\partial z} &= 0: \\ \mu \frac{\partial \mathfrak{G}_x}{\partial t} &= \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial y} - \left[ \dot{x} \frac{\partial \mu \mathfrak{G}_x}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial \mu \mathfrak{G}_y}{\partial y} + \dot{z} \frac{\partial \mu \mathfrak{G}_z}{\partial z} \right]. \end{aligned} \quad (60)$$

Die aufgestellten Gleichungen (59) und (60) gelten, auch wenn  $\mu$  mit dem Ort variiert, d. h. auch in inhomogenen Körpern. Sie stellen den Induktionsvorgang im allgemeinsten Falle dar. Ist das magnetische Feld mit der Zeit unveränderlich, so sind die linken Seiten der Gleichungen gleich Null; die Gleichungen stellen alsdann die Induktionswirkung dar, die in einem Leiter ausgeübt wird, wenn er in einem zeitlich unveränderlichen magnetischen Felde bewegt wird. Ruht dagegen der Leiter relativ zum Felde, während das Feld zeitlich veränderlich ist, so gehen die Gleichungen (58) und (59) in die Gleichungen (51) und (52) des vorigen Paragraphen über.

---

## Kapitel VI.

# Elektrokinematik.

---

### 1. Elektromotorische Kräfte.

Wir haben bisher nur die magnetischen Wirkungen elektrischer Ströme behandelt, die Frage, wie diese Ströme erzeugt werden, und welche sonstigen Wirkungen sie ausüben, dagegen beiseite gelassen oder nur flüchtig gestreift. In dem vorliegenden Kapitel sollen diese Fragen ausführlicher erörtert werden.

Zunächst ist festzustellen, daß der Zustand, in dem ein Leiter um sich herum das in Kapitel III behandelte magnetische Feld erzeugt, stets dann besteht, wenn Differenzen des elektrischen Potentials auf dem Leiter vorhanden sind. Ist das elektrische Potential des Leiters in allen seinen Punkten konstant, so befindet sich der Leiter im elektrischen Gleichgewicht und übt keine magnetischen Wirkungen aus. Verbindet man dagegen zwei isolierte Leiter, die auf verschiedenes Potential geladen sind, durch einen Leiter, etwa einen Draht, miteinander, so tritt, wie wir wissen, ein Ausgleich der Ladungen ein, bis beide Leiter dasselbe Potential angenommen haben. Während der kurzen Zeit dieses Ausgleichs gehen von dem Draht die beschriebenen magnetischen Wirkungen aus. Da der Ausgleich darin besteht, daß der eine Körper einen Teil seiner Ladung verloren, der andere ebensoviel gewonnen hat, so faßt man den Vorgang des Ausgleichs auf als ein Hinüberströmen elektrischer Ladung vom einen zum anderen Körper durch den Draht hindurch. Da dieser Ausgleichszustand durch die Potentialdifferenz an den Enden des Drahtes bedingt ist, so bezeichnet man die Potentialdifferenz im Sinne der Kraft, die die Elektrizität in Bewegung setzt, als die elektromotorische Kraft. Dieser Strömungszustand ist in dem angenommenen Falle ein schnell vorübergehender. Will man ihn dauernd in Form eines konstanten Stromes erhalten, so muß man dafür Sorge tragen, daß die beiden Leiter, bzw. die Endpunkte des Drahtes dauernd auf der gegebenen Potentialdifferenz erhalten werden. Eine Möglichkeit dazu haben wir in den Induktionsvorgängen im vorigen Kapitel kennen gelernt. Eine Dynamomaschine z. B. ist ein Apparat, der durch die Induktionswirkung eines Magnetfeldes auf einen bewegten

Leiter eine bestimmte Potentialdifferenz an den Enden eines Leiters aufrechtzuerhalten gestattet. Eine zweite Möglichkeit, die besonders dann in Betracht kommt, wenn es sich um hohe Potentialdifferenzen und sehr langsamen Ausgleich handelt, bieten die Elektrisiermaschinen, vor allem die sehr kräftig und stetig wirkenden vielplattigen Influenzmaschinen. Die dritte und bequemste Möglichkeit bieten die galvanischen Elemente, deren Wirksamkeit auf dem in der Elektrostatik bereits behandelten Grundsatz der Berührungselektrizität beruht. Wir haben im I. Kapitel, Abschnitt 32 und 36 gesehen, daß die Theorie für den Uebergang eines elektrischen Feldes aus einem Medium in ein anderes die Möglichkeit eines Potentialsprunges an der Grenzfläche ergibt, und die Erfahrung lehrt, daß solche Potentialsprünge offenbar überall zwischen zwei Medien tatsächlich vorhanden sind. Da der Sprung nur von der Natur der beiden Medien abhängt, so muß er längs der ganzen Trennungsfläche einen konstanten Wert haben. Stehen daher zwei Leiter verschiedenen Materials in einem Punkte miteinander in Berührung, so sind sie auch für jeden anderen Punkt, in dem sie sich berühren, miteinander im Gleichgewicht, vorausgesetzt allerdings, daß sich die Leiter in ihrer ganzen Ausdehnung auf gleicher Temperatur befinden. Unter diesen Umständen entsteht also in einem aus zwei verschiedenen Leitern gebildeten geschlossenen Kreise kein Strom. Anders ist es, wenn der Kreis aus drei oder mehr Leitern gebildet wird. Auch in diesem Falle entsteht kein Strom, wenn die Leiter sämtlich Metalle sind. Die Erklärung dieser Tatsache hat Volta in dem nach ihm genannten Spannungsgesetz gegeben.

Bezeichnet man die Potentialdifferenz  $V_a - V_b$  zweier einander berührender Leiter mit  $V_{ab}$ , so gilt für eine Kette A, B, C, D mehrerer hintereinander geschalteter Leiter, von welchen keiner ein Elektrolyt ist:

$$V_{AB} + V_{BC} + V_{CD} = V_{AD}. \quad (1)$$

Die Spannungsdifferenz zwischen den Endmetallen ist also so, als ob diese in direkter Berührung wären, und daher entsteht kein Strom, ebenso wie bei zwei Metallen kein Strom zustande kommt. Enthält aber die Kette einen oder mehrere elektrolytisch leitende Körper, so gilt das Gesetz (1) nicht mehr — Leiter zweiter Klasse, im Gegensatz zu den Leitern erster Klasse, für die das Voltasche Spannungsgesetz besteht — und daher gelingt es in diesem Falle, durch Schluß der Kette einen dauernden elektrischen Strom zu erhalten, wie es bei der Herstellung elektrischer Ströme durch die sogenannten galvanischen Elemente verwirklicht ist.

Will man eine konstante Potentialdifferenz erhalten, so muß man dafür sorgen, daß die chemische Natur der einander berührenden Leiter

auch beim Stromdurchgang die gleiche bleibt. Das ist im allgemeinen nicht der Fall, weil mit dem Stromdurchgang chemische Zersetzungen der Elektrolyte und dadurch Veränderungen an den Elektroden (Polarisationserscheinungen) auftreten. Es bedarf besonderer Kombinationen, wie sie in den sogenannten konstanten Elementen vorliegen, oder Elektroden von besonders großer Aufnahmefähigkeit für die abgeschiedenen Produkte, wie bei den Akkumulatoren, um Apparate zu erhalten, die einen längere Zeit konstanten Strom zu liefern imstande sind.

Von dem Zustandekommen der Potentialdifferenz zwischen zwei Leitern hat man sich zuerst eine Vorstellung gemacht für den Fall zweier einander berührender Elektrolyte mit Hilfe der besonderen Vorstellungen (Ionentheorie), die man sich von der Natur elektrischer Vorgänge in den Elektrolyten gebildet hat. Doch soll in diesem Buche auf die molekular-elektrischen Vorstellungen im speziellen nicht eingegangen werden.

Auch die Gültigkeit des Voltaschen Spannungsgesetzes bei den Metallen unterliegt der Beschränkung, daß die Temperatur sämtlicher Berührungsstellen die gleiche sein muß. Bei Ungleichheit der Temperatur der Berührungsstellen besteht kein Gleichgewicht auch in einem nur aus Metallen gebildeten Kreise. Die in diesem Falle wirksamen elektromotorischen Kräfte bezeichnet man als thermoelektrische Kräfte.

## 2. Elektrizitätsmenge und Stromstärke.

Die im vorigen Abschnitt entwickelte Vorstellung, daß der elektrische Ausgleich zwischen zwei Leitern von verschiedenem Potential in einem Ueberströmen elektrischer Ladung bestehe, führt zu einer neuen Auffassung des Begriffes „Stromstärke“. Wenn die Ladung des höher geladenen Leiters in dem kleinen Zeitelement  $\Delta t$  sich um  $\Delta e$  vermindert, so ist die Elektrizitätsmenge  $\Delta e$  in dieser Zeit durch jeden Querschnitt des die Leiter verbindenden Drahtes hindurchgeströmt. Sind die Leiter mit einer Elektrizitätsquelle verbunden, die ihre Potentialdifferenz konstant erhält, so besteht die Leistung dieser Vorrichtung darin, dem Leiter in jedem Zeitelement  $\Delta t$  die abfließende Elektrizitätsmenge  $\Delta e$  wieder zuzuführen. Dann fließt konstant in jedem Zeiteilchen  $\Delta t$  die Elektrizitätsmenge  $\Delta e$  durch den Querschnitt des Drahtes, in jeder Sekunde also die Menge  $\Delta e / \Delta t$ . Diese Größe, die in einer Sekunde durch den Querschnitt strömende Elektrizitätsmenge, gibt offenbar ein anschauliches Maß für das, was man bei diesem Bilde vom Vorgange eines elektrischen Stromes als die Stromstärke bezeichnen kann. Dabei ist es gleichgültig, ob wir uns den Ausgleich denken als ein Strömen von positiver Elektrizität in der Richtung vom höheren zum tieferen Poten-



tial oder als ein Strömen von negativer Elektrizität im entgegengesetzten Sinne oder als ein gleichzeitiges Strömen von positiver und negativer Elektrizität durch- und gegeneinander. Die im Abschnitt 10 des III. Kapitels (S. 233) festgesetzte Richtung des elektrischen Stromes ist erfahrungsgemäß diejenige, in der das elektrische Potential abnimmt, also diejenige, in der die positive Elektrizität sich bewegt. Wir wollen darum unter Stromstärke in diesem neuen Sinne die in der Sekunde durch den Draht fließende positive Elektrizitätsmenge verstehen und wollen sie mit  $i_e$  bezeichnen.

Wir hatten bisher die Stromstärke definiert durch die magnetische Wirkung des Stromes (III. Kapitel, Abschnitt 4, S. 223). Es läßt sich nun der Nachweis führen, daß die magnetischen Wirkungen der in der Sekunde durch den Draht fließenden Elektrizitätsmenge proportional sind. Allerdings erhält man durch eine einzelne Entladung einer gegebenen Elektrizitätsmenge nicht die Wirkungen eines stationären elektrischen Stromes, die Nadel eines Galvanometers erhält wohl einen Stoß, aber nicht eine dauernde Ablenkung. Aber man kann letztere erhalten, indem man dafür sorgt, daß der Entladungsvorgang in möglichst kurzen Zeitintervallen unter gleichen Bedingungen wiederholt wird, was man dadurch sehr gut erreichen kann, daß man durch einen Stimmgabelunterbrecher die Platten eines Kondensators abwechselnd mit den Polen einer galvanischen Batterie in Verbindung setzt, d. h. zu einer ganz bestimmten Potentialdifferenz ladet, und dann durch die Windungen des Galvanometers hindurch entladet. Dessen Nadel zeigt alsdann eine konstante Ablenkung, gerade wie wenn ein stationärer elektrischer Strom  $i$  durch die Windungen des Galvanometers flösse. Aus der Ablenkung kann man die Stromstärke in dem früher definierten elektromagnetischen Maße messen. Das Experiment lehrt dann, daß die so berechnete Stromstärke der entladenen Elektrizitätsmenge  $e$  und der Schwingungszahl  $n$  der Stimmgabel proportional ist. Es ist also zu setzen

$$en = ci, \quad (2)$$

wo  $c$  einen Proportionalitätsfaktor bedeutet,  $e$  die durch den Draht bei einer Entladung hindurchgehende positive Elektrizitätsmenge,  $n$  die Anzahl der Entladungen in der Sekunde. Dabei bedeutet nun  $en$  nichts anderes als die in der Sekunde durch den Draht geflossene Elektrizitätsmenge, also die Stromstärke  $i_e$  in dem obigen Sinne, und wir können also sagen, daß die in diesem Sinne definierte Stromstärke proportional ist der durch die magnetischen Wirkungen definierten Größe. Bezeichnet man diese letztere mit  $i_m$ , so ist

$$i_e = c \cdot i_m. \quad (3)$$

Damit gewinnen wir die Möglichkeit, eine Beziehung herzustellen zwischen den Größen, die wir beim Studium der elektrischen Felder

kennen gelernt haben, und denjenigen, die uns bei den magnetischen Feldern entgegengetreten sind. Definieren wir die Stromstärke als die in der Sekunde durch den Leiter hindurchströmende Elektrizitätsmenge

$$i_e = \frac{e}{t}, \quad (4)$$

so kann man sich die Elektrizitätsmenge in elektrostatischem Maße nach Kapitel I, Abschnitt 17 gemessen denken; die Einheit der Stromstärke ist dann diejenige Stromstärke, bei der die elektrostatische Einheit der Elektrizitätsmenge in einer Sekunde durch den Leiter fließt. Das ist ein neues Maß der Stromstärke, das elektrostatische Maß, das zu dem bisher von uns benutzten elektromagnetischen Maß der Stromstärke in einer ganz bestimmten, durch den Faktor  $c$  ausgedrückten Beziehung steht. Man kann aber auch umgekehrt von dem elektromagnetischen Strommaß ausgehen und durch die Gleichung (4) ein neues Maß der Elektrizitätsmenge definieren. Im elektromagnetischen Maßsystem ist die Einheit der Elektrizitätsmenge diejenige Menge, die im Strome 1 durch den Querschnitt des Leiters in einer Sekunde hindurchfließt. Ebenso führt die Beziehung (4) von der in der Praxis gebräuchlichen Stromeinheit 1 Ampere zu der praktischen Einheit der Elektrizitätsmenge, die man 1 Coulomb genannt hat. Das ist die Elektrizitätsmenge, die der Strom 1 Ampere in einer Sekunde durch den Querschnitt des Leiters führt.

Sinn und Größe des Faktors  $c$  und die Methoden zu seiner Bestimmung werden wir in einem der nächsten Abschnitte behandeln.

### 3. Stromarbeit.

Die Auffassung des elektrischen Stromes als einer Bewegung von Elektrizitätsmengen unter dem Einfluß einer elektromotorischen Kraft führt unmittelbar zu dem schon im vorigen Kapitel, Abschnitt 2 benutzten Ausdruck für die Arbeit, die erforderlich ist, um den Strom zu unterhalten. Wenn an den Enden eines Leiters eine Potentialdifferenz  $V_A - V_B$  besteht und die Elektrizitätsmenge  $e$  geht durch den Leiter hindurch vom höheren Potential  $V_A$  zum niederen  $V_B$ , so verliert die Elektrizitätsmenge dabei potentielle Energie im Betrag

$$e (V_A - V_B) = e E. \quad (5)$$

In Verbindung mit (4) ergibt sich für die vom Strom  $i$  in der Zeit  $t$  geleistete Arbeit  $W$  der Ausdruck

Dieser Ausdruck stellt die Energie dar, die die Elektrizität beim Strömen durch den Leiter abgibt. Das ist andererseits auch diejenige Energie, die die Elektrizitätsquelle aufwenden muß, um den Strom zu erhalten. Woher sie diese Energie nimmt, das hängt von der Natur dieser Quelle ab; sie entsteht auf Kosten mechanischer Energie in den Dynamomaschinen, die mit Kraftmaschinen angetrieben werden müssen, um Strom zu liefern, auf Kosten chemischer Energie in den Elementen, in denen jede Stromlieferung mit chemischen Umsetzungen verknüpft ist. Im Leiter geht die von der Stromquelle gelieferte elektrische Energie wieder als solche verloren. Sie verwandelt sich hier, falls der Strom keine mechanische Arbeit leistet, ausschließlich in Wärme.

Nun hat Joule gefunden, daß diese Wärmemenge  $W$  proportional zu der Zeit  $t$  und dem Quadrate der Stromstärke  $i$  ist, wenn man dafür sorgt, daß dem Drahte immer so viel Wärme entzogen wird, als er entwickelt, so daß seine Temperatur konstant bleibt. Setzt man den Proportionalitätsfaktor gleich  $w$ , so ist also

$$W = i^2 w t, \quad (7)$$

wenn man die entwickelte Wärme  $W$  in mechanischem oder Arbeitsmaß gemessen denkt.

#### 4. Das Ohmsche Gesetz für lineare Leiter.

Indem man die Ausdrücke (6) und (7) einander gleichsetzt und durch  $it$  dividiert, erhält man

$$E = i w, \quad (8)$$

d. h.

$$i = \frac{E}{w}. \quad (9)$$

Diese Formel gibt den Zusammenhang der Stromstärke mit der elektromotorischen Kraft. Sie heißt nach ihrem Entdecker das Ohmsche Gesetz. Da  $w$  bei gleichbleibender Temperatur ein konstanter Faktor ist für einen gegebenen Leiter, so sagt die Formel aus, daß die Stromstärke der treibenden elektromotorischen Kraft proportional ist. Diese Proportionalität hat sich für metallische sowohl wie für elektrolytische Leiter in weitem Umfange an den Tatsachen bestätigt. Daraus folgt, daß sich die Elektrizität in diesen Fällen so bewegt wie ein materieller Körper unter dem Einfluß einer ponderomotorischen Kraft, wenn sich der Bewegung ein so großer Widerstand entgegensetzt, daß die Beschleunigungsarbeit verschwindet gegenüber der Arbeit, die die Kraft zur Ueberwindung des Widerstandes leisten muß. Solcherart ist die Bewegung einer fallenden Kugel in einer zähen Flüssigkeit; die anfänglich beschleunigte

Bewegung geht nach kurzer Zeit in eine Bewegung von konstanter Geschwindigkeit über, und die Fallarbeit, die die Schwerkraft leistet, wird durch die Reibung in der Flüssigkeit vollständig in Wärme verwandelt. Dabei ist die konstante Geschwindigkeit der treibenden Kraft direkt, dem Reibungswiderstande umgekehrt proportional. Etwas Entsprechendes drückt das Ohmsche Gesetz für die Bewegung der Elektrizität in Leitern aus. Allerdings ist die Stromstärke nicht direkt gleich der Geschwindigkeit der Elektrizität; wieviel Elektrizität in der Sekunde durch den Querschnitt des Leiters hindurchgeht, hängt nicht bloß von der Geschwindigkeit der Bewegung, sondern auch von der Dichtigkeit ab, mit der gewissermaßen die Elektrizität den Leiter erfüllt. Denkt man sich als allgemeinsten Fall, daß in einem konstanten Strome von der Stärke  $i$  positive Elektrizität von der Dichte  $\delta_+$  mit der Geschwindigkeit  $u_+$  und negative von der Dichtigkeit  $\delta_- (= -\delta_+ \text{ im neutralen Leiter})$  in der entgegengesetzten Richtung mit der Geschwindigkeit  $u_-$  strömt, so ist die durch den Querschnitt  $q$  des Leiters in der Sekunde hindurchgehende Elektrizitätsmenge:

$$i = \delta (u_+ + u_-) q. \quad (10)$$

Nimmt man an, daß die Geschwindigkeiten  $u_+$  und  $u_-$  der treibenden elektromotorischen Kraft proportional, die Dichtigkeiten aber von ihr unabhängig sind, so führt die Gleichung (10) unmittelbar zum Ohmschen Gesetz. Bei den elektrolytischen Leitern ist die Dichtigkeit nach der Ionentheorie (auf die wir hier nicht näher eingehen) der Konzentration der die Elektrizität transportierenden materiellen Träger proportional und die Geschwindigkeiten  $u_+$  und  $u_-$  sind die Geschwindigkeiten dieser materiellen Träger, die sich durch Versuche ermitteln lassen. Bei den Metallen dagegen vollzieht sich der Elektrizitätstransport ohne Transport von Materie; hier geben die Versuche nur die Stromstärke als Ganzes, ohne die Möglichkeit, einen der Faktoren des Produktes  $\delta \times u$  einzeln zu bestimmen. Doch lassen diese Ueberlegungen auf alle Fälle die Analogie zwischen dem elektrischen und dem erwähnten mechanischen Vorgänge erkennen.

Entsprechend dieser Analogie wird der Faktor  $w$  des Ohmschen Gesetzes der galvanische Widerstand des Leiters genannt. Er hängt von den Dimensionen und dem Material des Leiters ab, und zwar ist er für einen linearen Leiter direkt proportional der Länge  $l$  des Drahtes, umgekehrt proportional seinem Querschnitt  $q$  und einer nur von dem Material des Drahtes und seiner Temperatur abhängenden Konstanten  $\sigma$ , d. h. es ist

$$w = \frac{l}{q \sigma}. \quad (11)$$

$\sigma$  wird die spezifische Leitfähigkeit des Drahtes genannt.

Besteht ein Stromkreis aus mehreren hintereinander geschalteten Stücken 1, 2 usw. von verschiedenem galvanischen Widerstand  $w_1$ ,  $w_2$  usw., so ist die ganze entwickelte Wärmemenge gleich der Summe der in den einzelnen Drähten entwickelten Wärmemengen, d. h. es ist, da nach Kapitel III, Abschnitt 11 die Stromstärke  $i$  in allen Teilen des unverzweigten Stromkreises die gleiche ist:

$$W = i^2 t (w_1 + w_2 + \dots).$$

Bringt man diese Summe wieder auf die Form

$$W = i^2 t w,$$

wo man dann  $w$  den Gesamtwiderstand des ganzen Stromkreises nennen würde, so ist zu setzen

$$w = w_1 + w_2 + \dots,$$

d. h. der Widerstand des ganzen Stromkreises ist gleich der Summe der Widerstände seiner hintereinander geschalteten Teile.

Hieraus ergibt sich, daß der galvanische Widerstand  $w$  eines Schließungsdrahtes, dessen Querschnitt  $q$  und Leitfähigkeit  $\sigma$  an verschiedenen Stellen seiner Länge verschieden ist, durch die Formel gegeben wird:

$$w = \int \frac{dl}{q \cdot \sigma}, \quad (12)$$

wobei das Integral über die Länge des Drahtes zu erstrecken ist.  $dl$  bedeutet dabei die Länge eines kleinen Stückes des Schließungsdrahtes, dessen Querschnitt den Wert  $q$  und dessen Leitfähigkeit den Wert  $\sigma$  besitzt.

Wie das Ohmsche Gesetz für beliebig viele hintereinander geschaltete Leiter gilt, so gilt es auch für jeden beliebigen Teil eines Leiters. Damit im Element  $dl$  eines Leiters ein Strom fließt, muß zwischen den Enden des Elementes eine Potentialdifferenz bestehen. Rechnen wir die positive Richtung des Elementes in dem Sinne, in dem der Strom fließt, so muß das Potential in dieser Richtung abnehmen. Bezeichnen wir also die Potentialdifferenz längs des Elementes mit  $dV$ , so hat das Ohmsche Gesetz für das Leiterelement die Form:

$$-dV = \frac{i dl}{q \sigma}$$

oder

$$-\frac{dV}{dl} = \frac{j}{\sigma}. \quad (13)$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist aber nichts anderes als die elektrische Kraft  $\mathcal{E}$ , die Stärke des elektrischen Feldes, das in dem Leiter besteht und dessen Kraftlinien in der Richtung des linearen Leiters vom

höheren zum niederen Potential verlaufen. Man kann also das Ohmsche Gesetz ganz allgemein für einen beliebigen Teil eines Leiters in der Form aussprechen:

$$j = \mathfrak{E} \cdot \sigma. \quad (14)$$

Die Stromdichtigkeit an irgendeiner Stelle eines Leiters ist gleich dem Produkte der an dieser Stelle wirksamen elektrischen Kraft in die spezifische Leitfähigkeit des Materials an dieser Stelle.

In Kapitel III, Abschnitt 11 haben wir den Satz ausgesprochen, daß es nur geschlossene Ströme gibt. Wenden wir das Ohmsche Gesetz auf den ganzen, in sich geschlossenen, unverzweigten Stromkreis an, so haben wir es in der Form

$$\int \mathfrak{E} \, dl = \int \frac{j \, dl}{\sigma}$$

oder

$$-\int dV = i \int \frac{dl}{q\sigma}$$

zu schreiben und das Integral über die geschlossene Leiterbahn zu erstrecken. Dabei hat das Integral auf der rechten Seite einen bestimmten Wert, den man als den Widerstand des ganzen Stromkreises bezeichnet. Das Integral der linken Seite hat man als Summe der Integrale über die einzelnen homogenen Teile der Strombahn zu berechnen, da beim Uebergange von einem Material zum anderen die in Abschnitt 1 bereits besprochenen Potentialsprünge zu berücksichtigen sind. Besteht der Stromkreis aus drei verschiedenen Leitern  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , die in den Punkten 1, 2, 3 zusammenstoßen, und zirkuliert der Strom in der Richtung von  $a$  nach  $b$ , so ergibt die Integration für die linke Seite:

$$-\int dV = V_{a1} - V_{a2} + V_{b2} - V_{b3} + V_{c3} - V_{c1}$$

oder

$$= V_{a1} - V_{c1} + V_{c3} - V_{b3} + V_{b2} - V_{a2}.$$

Dieser Ausdruck ist aber nichts anderes als die Summe der Potentialsprünge an den drei Berührungsstellen:

$$V_{ac} + V_{cb} + V_{ba}.$$

Nur wenn dieser Ausdruck von Null verschieden ist, zirkuliert ein Strom in dem Leiterkreis, also nur dann, wenn die drei Leiter nicht dem Voltaschen Spannungsgesetze folgen, wie es schon in Abschnitt 1 erörtert ist.

Die andere Möglichkeit, daß  $\int \mathfrak{E} \, dl$  von Null verschieden ist, auch dann, wenn die Leiterbahn nur aus einem homogenen Material besteht, ist dann gegeben, wenn die geschlossene Leiterbahn einen magnetischen

Strom umschlingt, wenn also der Strom durch Induktionswirkung entsteht. Denn ebenso, wie das Linienintegral der magnetischen Kraft längs einer Kurve, die einen elektrischen Strom umschlingt, gleich  $4\pi$  mal der elektrischen Stromstärke ist (siehe Kapitel III, Abschnitt 4), so ist das Linienintegral der elektrischen Kraft längs einer Kurve, die einen magnetischen Strom umschließt, gleich  $4\pi$  mal der magnetischen Stromstärke (im Sinne der Darlegungen des Abschnitts 13, Kapitel V), und wie in dem ersten Fall das magnetische Potential eine vieldeutige Funktion ist mit der Stromstärke als Periodizitätsmodul (siehe Kapitel III, Abschnitt 7), so ist hier das elektrische Potential eine vieldeutige Funktion, deren Periodizitätsmodul die magnetische Stromstärke ist.

## 5. Einheit des Widerstandes.

### Wert der spezifischen Leitfähigkeit in absolutem Maße.

Aus dem Ohmschen Gesetze (9) folgt, daß derjenige Stromkreis die Einheit des Widerstandes besitzt, in welchem die elektromotorische Kraft 1 die Stromstärke 1 hervorbringt. Da früher angegeben ist, daß man die elektromotorische Kraft und die Stromstärke in absolutem Maße messen kann, d. h. numerisch durch die Einheiten der Masse, Länge und Zeit ausdrücken kann, so ist dies also auch für den galvanischen Widerstand möglich.

Die Dimensionsformel für den Widerstand  $w$  ergibt sich nach (9) und den Dimensionsformeln für  $E$  (S. 312) und  $i$  (S. 224) zu:

$$[w] = \frac{[E]}{[i]} = \frac{M^{1/2} L^{3/2} T^{-2}}{M^{1/2} L^{1/2} T^{-1}} = L T^{-1}. \quad (15)$$

Die Dimension des galvanischen Widerstandes ist also eine Geschwindigkeit. In der Tat kann man experimentelle Anordnungen angeben, durch die der Widerstand eines Drahtes direkt durch eine Geschwindigkeit gemessen wird. Senden wir z. B. in eine Tangentenbussole den Induktionsstrom, den man bei Rotation einer Drahtschleife um eine senkrechte Achse durch die Wirkung der Horizontalkomponente des erdmagnetischen Feldes erhält, und den man durch einen Kommutator in einen stets gleich gerichteten Strom verwandelt, so wird die Nadel der Tangentenbussole um einen gewissen Winkel aus dem magnetischen Meridian abgelenkt. Erteilen wir nun der Drahtschleife eine solche Rotationsgeschwindigkeit, daß der Ablenkungswinkel einen bestimmten Wert besitzt, etwa  $45^\circ$ , so kann man den Widerstand des angewandten Stromkreises durch die Rotationsgeschwindigkeit der Drahtschleife numerisch ausdrücken, wenn man noch die Größe ihres Flächeninhaltes und den Radius der kreisförmigen Stromleitung der Tangentenbussole

mißt. Da nach Formel (64) in Abschnitt 17 des III. Kapitels die Tangente des Ablenkungswinkels der Stromstärke direkt, der Horizontalintensität des Erdmagnetismus umgekehrt proportional ist, die Stromstärke in diesem Falle aber durch Induktionswirkung der Horizontalintensität des Erdmagnetismus entsteht, also der Horizontalintensität proportional ist, so fällt letztere Größe aus der Gleichung für die Ablenkung heraus. Diese Widerstandsmessung ist also unabhängig von der Horizontalintensität des Erdmagnetismus und ebenso von der Polstärke der Bussolennadel. Sie erfordert nur die Messung einiger Längen und einer Zeit und reduziert sich bei bestimmt gewählten Dimensionsverhältnissen der Drahtschleife und der Tangentenbussole lediglich auf die Messung einer Geschwindigkeit.

Da die gebräuchliche Einheit der Stromstärke (1 Ampere)  $10^{-1}$  absolute Einheiten, die Einheit der elektromotorischen Kraft (1 Volt)  $10^8$  absolute Einheiten des elektromagnetischen cgs-Systems sind, so wählt man als gebräuchliche Einheit des Widerstandes denjenigen Widerstand, in welchem 1 Volt 1 Ampere erzeugt, welcher also gleich  $10^9$  absoluten Einheiten des elektromagnetischen cgs-Systemes ist. Diese Widerstandseinheit nennt man ein Ohm. Es ist also

$$1 \text{ Ohm} = 10^9 \text{ cm sek}^{-1}, \quad (16)$$

oder 1 Ohm ist gleich der Geschwindigkeit, mit der  $10^9$  cm, d. h. der Erdquadrant, in der Sekunde durchlaufen wird.

Daß man zu Einheiten des Widerstandes, der elektromotorischen Kraft und der Stromstärke nicht diejenigen gewählt hat, welche im cgs-System den Wert 1 besitzen, sondern diejenigen, welche im cgs-System gleich gewissen Potenzen von 10 sind, hat seinen Grund in folgenden praktischen Rücksichten. Vor Einführung des absoluten Maßsystems für die elektrischen und elektromagnetischen Erscheinungen war die sogenannte Siemenssche Widerstandseinheit S.E. üblich, nämlich der Widerstand einer Quecksilbersäule von 1 m Länge und 1 qmm Querschnitt bei  $0^\circ$  Temperatur. Man wollte nun die absolute Widerstandseinheit möglichst nahe der bis dahin gebräuchlichen S.E. anschließen, und dies konnte man, da eine Potenz von 10 aus Rechnungsbequemlichkeiten beizubehalten wünschenswert ist, durch den Faktor  $10^9$  erreichen. Genauere Untersuchungen haben jetzt gezeigt, daß eine Quecksilbersäule von 106,3 cm Länge, 1 qmm Querschnitt und  $0^\circ$  Temperatur den Widerstand 1 Ohm ( $\Omega$ ) hat; es ist also

$$1 \Omega = 1,063 \text{ S.E.} \quad (17)$$

Ferner war es wünschenswert, daß die elektromotorische Kraft der gebräuchlichen galvanischen Elemente möglichst annähernd gleichkomme der absoluten Einheit der elektromotorischen Kraft. Dies konnte man



erreichen, indem man  $10^8$  absolute Einheiten zur Einheit der elektromotorischen Kräfte wählte. Es ergibt sich so, daß die elektromotorische Kraft eines Daniellschen Elementes etwa gleich 1,1 Volt ist, diejenige eines Bunsenschen Elementes etwa gleich 1,8 Volt. Da auf diese Weise die Potenzen von 10 für die Einheiten des Widerstandes und der elektromotorischen Kraft festgelegt waren, ergab sich nach dem Ohmschen Gesetz von selbst der Faktor  $10^{-1}$  für die Einheit der Stromstärke.

Die Dimension der spezifischen Leitfähigkeit  $\sigma$  ergibt sich nach (10) zu:

$$[\sigma] = \frac{1}{[w] \cdot q} = \frac{1}{[w] L} = L^{-2} T^{+1}. \quad (18)$$

Für Quecksilber ist die Leitfähigkeit in absolutem Maße leicht nach Formel (10) anzugeben. Denn setzt man darin  $l = 106,3$ ;  $q = 0,01$ , so muß sich  $w$  gleich 1 Ohm, d. h.  $10^9$  cgs-Einheiten ergeben. Es ist also für Quecksilber:

$$10^9 = \frac{106,3}{\sigma \cdot 0,01}, \text{ d. h. } \sigma = 1,063 \cdot 10^{-5}. \quad (19)$$

Für andere Metalle als Quecksilber ist

$$\sigma = 1,063 \cdot 10^{-5} \cdot \sigma', \quad (20)$$

falls  $\sigma'$  das Verhältnis ihres Leitungsvermögens zu dem des Quecksilbers bedeutet.

Ueber die experimentellen Methoden zur Vergleichung von Widerständen und Leitfähigkeiten vergleiche man F. Kohlrausch, Leitfaden der praktischen Physik, oder Heydweiller, Hilfsbuch für die Ausführung elektrischer Messungen, Leipzig 1892; über ihre Bestimmung in absolutem Maß: Maxwell, Lehrbuch, 2. Bd., Kapitel XVIII, S. 501. — Mascart et Joubert, Leçons sur l'électricité et le magnétisme, Paris 1886, II. Bd. — G. Wiedemann, Die Lehre von der Elektrizität, Braunschweig 1898, IV. Bd., Abschnitt VI, S. 633.

## 6. Das Verhältnis des elektrostatischen Maßsystems zum elektromagnetischen.

In Abschnitt 2 dieses Kapitels haben wir gesehen, daß sich für die Stromstärke vom elektrostatischen Ausgangspunkte aus eine neue Definition und eine neue Maßeinheit aufstellen läßt. Da sich auch die elektromotorische Kraft als Differenz von Potentialwerten in elektrostatischem Maße ausdrücken läßt, so gibt es auch für den Widerstand neben der oben betrachteten elektromagnetischen eine elektrostatische Einheit. Die Beziehung dieser Größen zu den elektromagnetischen ist durch den Faktor  $c$  in Formel (2) und (3) bestimmt.

Der Faktor  $c$  ist nicht eine dimensionslose Zahl, sondern ist von der Dimension einer Geschwindigkeit. Denn es ist

$$[c] = \frac{[i_e]}{[i_m]} = \frac{M^{1/2} L^{3/2} T^{-2}}{M^{1/2} L^{1/2} T^{-1}} = L T^{-1}. \quad (21)$$

Man kann diese Zahl  $c$  dadurch ermitteln, daß man in dem in Abschnitt 2 beschriebenen Versuche wirklich die entladene Elektrizitätsmenge  $e$  des Kondensators in absolutem elektrostatischem Maße mißt (am einfachsten durch Messung der Kapazität und der Potentialdifferenz nach absolutem Maße) und ebenso die aus der Ablenkung der Galvanometernadel resultierende Stromstärke  $i$  nach absolutem elektromagnetischem Maße. Zum ersten Male wurden derartige Versuche von R. Kohlrausch und W. Weber 1857 ausgeführt<sup>1)</sup>. (Ueber weitere Bestimmungen von  $c$  vgl. die oben zitierten Werke von G. Wiedemann Bd. IV, Abschnitt VI, S. 784 ff., Maxwell, 2. Bd., Kap. XIX, S. 516 ff. und Mascart et Joubert, 2. Bd., 8. Kap., S. 517 ff.) Es hat sich aus diesen Versuchen ergeben, daß  $c$  mit sehr großer Annäherung den Wert besitzt:

$$c = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm sek}^{-1}. \quad (22)$$

Das heißt also, daß in einem Strom von der elektromagnetisch gemessenen Stärke 1 in jeder Sekunde eine Elektrizitätsmenge von  $3 \cdot 10^{10}$  elektrostatisch gemessenen Einheiten durch den Querschnitt des Leiters hindurchgeht, in einem Ampere also  $3 \cdot 10^9$  elektrostatische Einheiten.

Man kann die Größe  $c$  noch auf einem ganz anderen Wege bestimmen, der ebenfalls schon von R. Kohlrausch angegeben worden ist. Man kann nämlich die magnetische Wirkung untersuchen, die von einer mechanisch fortbewegten elektrostatischen Ladung ausgeübt wird. Daß ein geladener Körper, wenn er bewegt wird, in der Tat eine magnetische Wirkung ausübt, ist zuerst von Rowland<sup>2)</sup> nachgewiesen worden. Er ließ eine vergoldete Ebonitscheibe, die durch Spitzenwirkung kräftig geladen wurde, sehr schnell in ihrer Ebene um eine vertikale Achse rotieren und zeigte, daß ein empfindliches astatisches Nadelpaar, dessen untere Nadel dicht über der Scheibe schwebte, so abgelenkt wurde, als ob ein Strom im Sinne der Elektrizitätsbewegung in der Scheibe flösse. Vielfache genauere Wiederholungen dieser Versuche, besonders die letzten sehr exakten Messungen Himstedts<sup>3)</sup> haben ergeben, daß die magnetischen Wirkungen eines Konvektionsstromes, d. h. einer mechanisch fortbewegten elektrostatischen Ladung genau die gleichen sind, auch quantitativ, wie die eines Leitungsstromes,

<sup>1)</sup> Siehe Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 142.

<sup>2)</sup> H. A. Rowland, Pogg. Ann. **158**, S. 487, 1876; Physical Papers, Baltimore 1902, S. 128.

<sup>3)</sup> F. Himstedt, Ann. d. Physik **13**, S. 100, 1904.

so kann aus (45) der Wert für  $\frac{di_1}{dt}$  in (47) eingesetzt werden. Man erhält dann, unter Berücksichtigung der Beziehungen (46), die Gleichung:

$$C_2 L_2 \frac{d^2 V_2}{dt^2} + C_2 w_2 \frac{d V_2}{dt} + V_2 = - \frac{L_{21} J_0 v_1}{\cos^2 \epsilon_1} e^{-\delta_1 t} \sin(v_1 t + 2\epsilon_1), \quad (48)$$

die in ihrer Form mit der Gleichung (34) übereinstimmt. Also folgt aus den Ergebnissen des vorigen Abschnittes, daß in der Sekundärspule unter der gemachten Annahme sich zwei Schwingungen übereinander lagern müssen: die freien Eigenschwingungen des sekundären Kreises und die Schwingungen, die durch die Schwingungen des primären Kreises im sekundären erzwungen werden. Man kann demnach die Lösung der Gleichung (48) in der Form ansetzen:

$$V_2 = V_0 e^{-\delta_2 t} \sin(v_2 t + \epsilon_2) + V_0' e^{-\delta_1 t} \sin(v_1 t + \Delta). \quad (49)$$

Darin ist der zweite Summand das partikuläre Integral der vollständigen Gleichung (48). Durch Einsetzen dieses Ausdruckes in die Gleichung erhält man zwei Gleichungen, die  $V_0'$  und  $\Delta$  bestimmen. Der erste Summand aber ist das Integral der entsprechenden homogenen Gleichung — Gleichung (48) ohne rechtes Glied —. Die Größen  $\delta_2$  und  $v_2$  haben die den Gleichungen (46) entsprechende Bedeutung für den Sekundärkreis:

$$v_2^2 = \frac{1}{L_2 C_2} - \delta_2^2; \quad \delta_2 = \frac{w_2}{2 L_2}. \quad (50)$$

$V_0$  und  $\epsilon_2$  sind durch die Anfangsbedingungen zu bestimmen. Diese aber lauten, da im Sekundärkreis vor der Unterbrechung des Primärstroms weder Ladung noch Strom besteht:

$$\text{für } t = 0: V_2 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d V_2}{dt} = 0.$$

Um die Rechnung zu vereinfachen, wollen wir die Dämpfung so klein annehmen, daß wir ihren Einfluß wenigstens auf die Phasenkonstante vernachlässigen können; dann dürfen  $\epsilon_1$  und  $\Delta$  gleich Null gesetzt werden. Aus den Anfangsbedingungen folgt alsdann, daß auch  $\epsilon_2 = 0$  und

$$V_0 = - \frac{v_1}{v_2} V_0' \quad (51)$$

zu setzen ist. Dann läßt sich (49) angenähert in der Form schreiben:

$$V_2 = V_0' v_1 \left( e^{-\delta_1 t} \frac{\sin v_1 t}{v_1} - e^{-\delta_2 t} \frac{\sin v_2 t}{v_2} \right), \quad (52)$$

und daraus folgt nach (5):

$$i_2 = - C_2 V_0' v_1 (e^{-\delta_1 t} \cos v_1 t - e^{-\delta_2 t} \cos v_2 t), \quad (53)$$

wenn wir die Glieder, die  $\frac{\delta_1}{\nu_1}$  oder  $\frac{\delta_2}{\nu_2}$  als Faktor enthalten, wieder vernachlässigen. Für  $V_0'$  aber ergibt sich unter den gleichen Vernachlässigungen:

$$V_0' = L_{21} J_0 \frac{\nu_1 \nu_2^2}{(\nu_1^2 - \nu_2^2)}. \quad (54)$$

Wir fragen nach dem größten Werte, den die Spannung an den Enden der Sekundärspule erreicht. Ist die Sekundärspule, wie wir es angenommen haben, mit einer Leidener Flasche verbunden, so ist die Dauer der Schwingungen im Sekundärkreis erfahrungsgemäß beträchtlich größer als die der Schwingungen im Primärkreis; also  $\nu_2$  klein gegen  $\nu_1$ . Daher überwiegt in (52) das zweite Glied über das erste. Außerdem ist die Dämpfung der Primärschwingungen  $\delta_1$  größer als die der Sekundärschwingungen; denn da der galvanische Widerstand  $w$  proportional der Drahtlänge einer Spule ist, ihre Selbstinduktion  $L$  dagegen annähernd proportional zum Quadrate der Windungszahl der Spule (nach S. 329), d. h. auch proportional zum Quadrate ihrer Drahtlänge, so ist die Dämpfung  $\delta = w : 2L$  um so größer, je kürzer der Draht der Spule ist. Daher klingt das erste Glied in (52) und (53) schnell ab. Die Stromstärke ist nach kurzer Zeit darstellbar durch

$$i_2 = + C_2 V_0' \nu_1 e^{-\delta_2 t} \cos \nu_2 t$$

und die Spannung durch

$$V_2 = - V_0' \frac{\nu_1}{\nu_2} e^{-\delta_2 t} \sin \nu_2 t.$$

Die Schwingung beginnt also angenähert mit dem größten Stromwerte und die Spannung erreicht, wenn man den Einfluß der Dämpfung vernachlässigt, nach einer Viertelschwingung ihren größten Wert. Dieser beträgt unter Vernachlässigung des Dämpfungsfaktors:

$$V_{2 \text{ (max)}} = V_0' \frac{\nu_1}{\nu_2}$$

oder unter Berücksichtigung von (54) und unter Vernachlässigung von  $\frac{\nu_2^2}{\nu_1^2}$  gegen 1:

$$V_{2 \text{ max}} = L_{21} \nu_2 J_0 = \frac{L_{21}}{\sqrt{L_2 C_2}} J_0.$$

Da die beiden Kreise mit gemeinschaftlichem Eisenkern eng miteinander gekoppelt sind, so ist  $L_{21}$  nahezu  $\sqrt{L_1 L_2}$  (siehe Kapitel V, Abschnitt 11, S. 340). Daher

$$V_{2 \text{ max}} = J_0 \sqrt{\frac{L_1}{C_2}}. \quad (55)$$

Man kann diese Beziehung auch durch eine einfache energetische Betrachtung ableiten. Die magnetische Energie des Primärkreises vor der Unterbrechung ist nach Kapitel IV, Abschnitt 2, S. 298:  $\frac{1}{2} L_1 J_0^2$ ; die elektrostatische Energie der sekundären Kapazität im Augenblick des Maximums ihrer Ladung ist  $\frac{1}{2} C_2 V_2^2$  (max). Würde die erstere ohne jeden Verlust in die letztere umgewandelt, so würde sich aus der Gleichsetzung beider Ausdrücke Gleichung (55) ergeben<sup>1)</sup>. Die obige Ableitung läßt genauer die Vernachlässigungen erkennen, mit deren Hilfe man diese angenäherte Beziehung erhält. Die entwickelten Gleichungen enthalten die Theorie der oben S. 444 ff. beschriebenen Versuche von v. Helmholtz, Schiller, W. König. Auch auf eine Arbeit von W. Heß<sup>2)</sup> möge noch verwiesen werden, der die oszillatorischen Potentialschwankungen der sekundären Kapazität direkt mit Hilfe elektrischer Doppelbrechung gemessen hat.

Bei der gewöhnlichen Anwendung des Induktionsapparates ist die Sekundärspule nicht mit einer größeren Kapazität verbunden, sondern nur mit den Kugeln oder mit Spitze und Platte eines Funkenmikrometers.  $C_2$  ist dann sehr viel kleiner, aber schwer zu beurteilen, da sich in diesem Falle Ladungen auch auf den Endwindungen der Sekundärspule ansammeln können, so daß auch der Spule selbst eine gewisse Eigenkapazität zuzuschreiben wäre. Jedenfalls sprechen die Versuche dafür, daß  $C_2$  in diesem Falle sehr klein ist. Es wäre denkbar, daß jetzt  $v_1$  gegen  $v_2$  klein wäre. Dann würde das erste Glied in (52) überwiegen und die Maximalamplitude wäre diejenige, die nach einer Viertelschwingung des Primärkreises einträte. Das ergäbe:

$$V_{2\max} = V_0' = L_{21} J_0 v_1 = \frac{L_{21}}{\sqrt{C_1 L_1}} J_0$$

und bei der Annahme sehr enger Koppelung:

$$V_{2\max} = J_0 \sqrt{\frac{L_2}{C_1}}. \quad (56)$$

Diese Gleichung würde aussagen, daß ein Induktor um so größere Schlagweiten gibt, je kleiner der Fizeausche Kondensator in ihm ist. Das ist insofern nicht richtig, als der Kondensator seine Aufgabe, die Öffnungsfunken möglichst unschädlich zu machen, um so schlechter erfüllt, je kleiner er ist. Andererseits aber ist es richtig, daß je größer der Kondensator ist, um so langsamer der in ihn einfließende Strom

<sup>1)</sup> Nach Lord Rayleigh, Phil. Mag. 2, S. 581, 1901; Scient. Papers IV, S. 557.

<sup>2)</sup> W. Heß, Wied. Ann. 66, S. 980, 1898.

abnimmt und um so geringer daher seine induzierende Wirkung ist. Es wird daher für jeden Induktor eine günstigste Größe des Kondensators geben, die sich aber theoretisch nur aufstellen läßt, indem man für die Wirkung des Oeffnungsfunkens eine Formulierung sucht, worauf hier nicht eingegangen werden kann. Experimentell ist die Tatsache einer günstigsten Größe der Primärkapazität von Walter<sup>1)</sup> und Mizuno<sup>2)</sup> nachgewiesen worden.

Formel (56) ist von Walter aufgestellt worden, Formel (55) von Rayleigh<sup>3)</sup>. Die allgemeine Theorie der Schwingungen eines Induktionsapparates ist zuerst von Colley<sup>4)</sup> entwickelt worden. Wie sich aus dessen Gleichungen die genannten Formeln ableiten, hat Oberbeck<sup>5)</sup> gezeigt.

Eine besondere Diskussion würde der Fall verlangen, daß die Schwingungsdauern des primären und des sekundären Kreises übereinstimmen. Nach Messungen von Walter<sup>6)</sup> scheint dieser Fall bei größeren Induktorien eintreten zu können. Auch würde er sich, wenn die Eigenkapazität der Sekundärspule genügend klein ist, auf alle Fälle durch passende Wahl der an die Pole der Sekundärspule angehängten Kapazität verwirklichen lassen. Aber wir unterlassen die Durchführung dieses Falles auf Grund der hier entwickelten Theorie, da es einerseits an experimenteller Prüfung der Erscheinungen fehlt, andererseits die Theorie auf alle Fälle unvollständig ist. Die strenge Theorie der Schwingungen in Induktorien würde verlangen, daß die Rückwirkung der Vorgänge in der Sekundärspule auf die Primärspule in Betracht gezogen wird. Diese Forderung führt zu einem neuen Problem, dem der Schwingungen in gekoppelten Systemen, dessen allgemeiner Behandlung der nächste Abschnitt gewidmet ist. Doch werden wir uns dort auf einfache Thomsonsche Schwingungskreise beschränken und auf die Induktorien nicht noch einmal zurückkommen. Die Anwendung der ganzen Theorie, sowohl der hier entwickelten als der der gekoppelten Systeme, auf die Induktorien begegnet nämlich noch der weiteren Schwierigkeit, daß die Anwendung eines Eisenkernes eine der Theorie kaum zugängliche Verwicklung herbeiführt. Denn die magnetischen Wirkungen sind dann nicht mehr der Stromstärke proportional, oder die Induktionskoeffizienten dürfen nicht mehr als konstant behandelt werden. Dies macht die Ausarbeitung einer strengen Theorie der Induktorien so gut wie illusorisch.

<sup>1)</sup> B. Walter, Wied. Ann. 62, S. 317, 1897.

<sup>2)</sup> T. Mizuno, Phil. Mag. 45, S. 447, 1898.

<sup>3)</sup> Rayleigh, s. o.

<sup>4)</sup> R. Colley, Wied. Ann. 44, S. 109, 1891.

<sup>5)</sup> A. Oberbeck, Wied. Ann. 64, S. 203, 1898. Eine Zusammenstellung der Literatur über den Induktionsapparat bis 1905 findet man in dem Büchlein „La Bobine d'induction“ von H. Armagnat, Paris 1905.

<sup>6)</sup> B. Walter, Wied. Ann. 66, S. 623, 1898.

Es bedarf schließlich wohl kaum eines besonderen Hinweises darauf, daß die ganzen Betrachtungen nur gelten, solange der Sekundärkreis offen ist, und ihre Gültigkeit verlieren, sobald irgendeine Entladung zwischen den Polen des Induktoriums auftritt, da damit die Bedingungen im Sekundärkreis völlig geändert werden.

## 8. Zwei gekoppelte Schwingungskreise.

Bei den in den vorigen Abschnitten behandelten Fällen war die erregende Schwingung als gegeben angenommen, und es war stillschweigend vorausgesetzt, daß sie durch den Schwingungsvorgang im Resonator nicht beeinflusst wird. Es soll nun die Wirkung, die der Resonator erfährt, von einem Schwingungskreis ähnlicher Art ausgehen, es soll die Einwirkung dieses primären Kreises auf den sekundären dadurch stattfinden, daß ein Teil der magnetischen Kraftlinien des primären Kreises durch die Windungsfläche des sekundären Kreises hindurchgeht. Ist diese magnetische Koppelung der beiden Kreise sehr lose, so haben wir den Fall des Abschnittes 6. Werden im primären Kreis Schwingungen erregt, so induzieren sie Schwingungen im sekundären Kreise, ohne daß sie selbst von diesen wesentlich geändert würden. Ist aber die Koppelung nicht sehr klein, so tritt ein neuer Fall ein, der einer ganz besonderen Untersuchung bedarf. Für jeden Kreis gilt dann die Fundamentalgleichung (6) des Thomsonschen Schwingungskreises; nur muß noch diejenige elektromotorische Kraft hinzugefügt werden, die aus der Induktionswirkung des anderen Kreises hervorgeht. Es sollen alle auf den primären Kreis bezüglichen Größen durch den Index 1, alle auf den sekundären Kreis bezüglichen durch den Index 2 bezeichnet werden. Der gegenseitige Induktionskoeffizient sei  $L_{12}$  für die Wirkung, die 1 von 2 empfängt, und  $L_{21}$  für die Wirkung, die 2 von 1 empfängt. Sind die Bedingungen einer quasistationären Strömung (siehe Abschnitt 3) für beide Kreise erfüllt, so ist nach Kapitel V, Abschnitt 5  $L_{12} = L_{21}$ . Aber die Gleichungen lassen sich auch auf Fälle anwenden, in denen diese Gleichheit nicht besteht. Das ist z. B. bei einem Tesla-Transformator der Fall, wie P. Drude<sup>1)</sup> bewiesen hat. Wir wollen daher die Möglichkeit einer Ungleichheit von  $L_{12}$  und  $L_{21}$  von vornherein offen lassen. Für die Formelentwicklung kommt das zunächst gar nicht in Betracht, da die beiden Größen nur gemeinsam in der Gestalt des Koppelungskoeffizienten vorkommen. Diesen hatten wir früher (Kapitel V, Abschnitt 11, Formel 45') definiert durch

$$k^2 = \frac{L_{12}^2}{L_1 \cdot L_2}.$$

Er soll jetzt allgemeiner definiert sein durch die Gleichung:

$$k^2 = \frac{L_{12} \cdot L_{21}}{L_1 \cdot L_2}. \quad (57)$$

Unter Berücksichtigung der gegenseitigen Induktion nimmt die Gleichung (4) für den ersten Kreis die Gestalt an:

$$\left. \begin{aligned} w_1 i_1 &= -L_1 \frac{di_1}{dt} + V_1 - L_{12} \frac{di_2}{dt} \\ \text{und für den zweiten Kreis:} \\ w_2 i_2 &= -L_2 \frac{di_2}{dt} + V_2 - L_{21} \frac{di_1}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Durch Berücksichtigung der Gleichung (5), die für beide Kreise gilt, erhält man die beiden Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} L_1 C_1 \frac{d^2 V_1}{dt^2} + L_{12} C_2 \frac{d^2 V_2}{dt^2} + C_1 w_1 \frac{dV_1}{dt} + V_1 &= 0 \\ L_2 C_2 \frac{d^2 V_2}{dt^2} + L_{21} C_1 \frac{d^2 V_1}{dt^2} + C_2 w_2 \frac{dV_2}{dt} + V_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

Um Gleichungen zu gewinnen, die nur  $V_1$  oder nur  $V_2$  enthalten, kann man die beiden Gleichungen zunächst noch zweimal nach  $t$  differenzieren und dann für  $\frac{d^2 V_1}{dt^2}$  in der ersten Gleichung den Wert einsetzen, den man direkt aus der zweiten Gleichung in der obigen Form erhält, und umgekehrt. Man erhält dann für  $V_1$  und  $V_2$  identische Differentialgleichungen vierten Grades:

$$\begin{aligned} &\left(1 - \frac{L_{12} \cdot L_{21}}{L_1 L_2}\right) \frac{d^4 V_1}{dt^4} + \left(\frac{w_1}{L_1} + \frac{w_2}{L_2}\right) \frac{d^3 V_1}{dt^3} \\ &+ \left(\frac{1}{L_1 C_1} + \frac{1}{L_2 C_2} + \frac{w_1 w_2}{L_1 L_2}\right) \frac{d^2 V_1}{dt^2} + \left(\frac{w_1}{C_2} + \frac{w_2}{C_1}\right) \frac{1}{L_1 L_2} \frac{dV_1}{dt} + \frac{V_1}{L_1 L_2 C_1 C_2} = 0 \end{aligned} \quad (60)$$

und ebenso für  $V_2$ .  $V_1$  und  $V_2$  werden also durch die gleichen Funktionen der Zeit dargestellt. Als Lösung der Gleichungen können wir ansetzen:

$$V_1 = A e^{xt}, \quad V_2 = B e^{xt}. \quad (61)$$

Man erhält dann für  $x$  eine Gleichung vierten Grades. Diejenigen Fälle, in denen die Vorgänge in den beiden Kreisen aperiodisch verlaufen, interessieren uns hier nicht. Wir wollen also von vornherein die Annahme machen, daß die Dämpfungskonstanten klein genug sind, um ausschließlich periodische Vorgänge zu ermöglichen. Dann müssen die sämtlichen vier Wurzeln der Gleichung für  $x$  komplex, je zwei konjugiert sein, also



$$\begin{aligned}x_1 &= a + ib, & x_3 &= c + id, \\x_2 &= a - ib, & x_4 &= c - id.\end{aligned}$$

Bezeichnet man mit  $A_1, A_2, A_3, A_4$  Integrationskonstanten, so läßt sich  $V_1$  darstellen in der Form:

$V_1 = A_1 e^{at} \cos bt + A_2 e^{at} \sin bt + A_3 e^{ct} \cos dt + A_4 e^{ct} \sin dt$   
oder bei Einführung anderer Konstanten:

$$\left. \begin{aligned}V_1 &= A_1' e^{at} \cos (bt + \varepsilon_1') + A_1'' e^{ct} \cos (dt + \varepsilon_1'') \\ \text{und entsprechend:} \\ V_2 &= A_2' e^{at} \cos (bt + \varepsilon_2') + A_2'' e^{ct} \cos (dt + \varepsilon_2'').\end{aligned} \right\} \quad (62)$$

Dieses allgemeine Resultat zeigt, daß in jedem der beiden Kreise immer gleichzeitig zwei Schwingungen von verschiedener Schwingungsdauer und verschiedener Dämpfung auftreten, und zwar in beiden Kreisen die gleichen, die nur durch Amplitude und Phase voneinander verschieden sind;  $b$  und  $d$  sind die zyklischen Schwingungszahlen,  $a$  und  $c$  die Dämpfungskonstanten dieser Schwingungen. Wir wollen nun die zyklischen Schwingungszahlen und die Dämpfungskonstanten, die jeder Kreis besitzen würde, wenn er ohne Beeinflussung durch den anderen schwingen würde, wie bisher mit  $\nu_1, \nu_2, \delta_1$  und  $\delta_2$  bezeichnen. Bildet man dann die Koeffizienten der biquadratischen Gleichung für  $x$  in bekannter Weise aus den  $a, b, c$  und  $d$  und vergleicht diese Ausdrücke mit den Koeffizienten, wie sie sich aus Gleichung (60) unter Berücksichtigung von (46) ergeben, so erhält man zur Bestimmung von  $a, b, c$  und  $d$  die vier Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned}a + c &= -\frac{\delta_1 + \delta_2}{(1 - k^2)} \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 4ac &= \frac{\nu_1^2 + \nu_2^2 + \delta_1^2 + \delta_2^2 + 4\delta_1\delta_2}{1 - k^2} \\ a(c^2 + d^2) + c(a^2 + b^2) &= -\frac{\delta_1(\nu_2^2 + \delta_2^2) + \delta_2(\nu_1^2 + \delta_1^2)}{1 - k^2} \\ (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) &= \frac{(\nu_1^2 + \delta_1^2)(\nu_2^2 + \delta_2^2)}{1 - k^2}\end{aligned} \right\} \quad (63)$$

Für die zyklischen Schwingungszahlen  $b$  und  $d$  kann man leicht sehr angenäherte Werte erhalten für den Fall nicht zu großer Dämpfung, wenn man den Satz berücksichtigt, den wir oben (S. 454) gefunden haben, daß die Schwingungsdauer durch die Dämpfung nur sehr wenig beeinflusst werde. Man kann dann für die Berechnung von  $b$  und  $d$   $\delta_1$  und  $\delta_2$  und entsprechend  $a$  und  $c = 0$  setzen und erhält:

$$\left. \begin{aligned}
 b^2 &= \frac{\nu_1^2 + \nu_2^2}{2(1-k^2)} - \sqrt{\frac{(\nu_1^2 + \nu_2^2)^2}{4(1-k^2)^2} - \frac{\nu_1^2 \nu_2^2}{1-k^2}} \\
 &= \frac{\nu_1^2 + \nu_2^2 - 2k\nu_1\nu_2 \sqrt{1 + \frac{(\nu_1^2 - \nu_2^2)^2}{4k^2\nu_1^2\nu_2^2}}}{2(1-k^2)} \\
 d^2 &= \frac{\nu_1^2 + \nu_2^2}{2(1-k^2)} + \sqrt{\frac{(\nu_1^2 + \nu_2^2)^2}{4(1-k^2)^2} - \frac{\nu_1^2 \nu_2^2}{1-k^2}} \\
 &= \frac{\nu_1^2 + \nu_2^2 + 2k\nu_1\nu_2 \sqrt{1 + \frac{(\nu_1^2 - \nu_2^2)^2}{4k^2\nu_1^2\nu_2^2}}}{2(1-k^2)}
 \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

Ist die Koppelung  $k$  nicht zu gering und sind andererseits die Schwingungsdauern der beiden Kreise so wenig voneinander verschieden, daß man  $(\nu_1 - \nu_2)^2$  gegen  $\nu_1$  und  $\nu_2$  vernachlässigen kann, so erhält man einfach:

$$b^2 = \frac{\nu_1 \nu_2}{1+k} \quad \text{und} \quad d^2 = \frac{\nu_1 \nu_2}{1-k}. \quad (65)$$

Sind beide Schwingungskreise vor der Koppelung genau aufeinander abgestimmt ( $\nu_1 = \nu_2$  oder  $T_1 = T_2 = T$ ), so entstehen gleichwohl nach der Koppelung in jedem Kreise stets zwei Schwingungen von den Schwingungsdauern

$$T' = T\sqrt{1+k} \quad \text{und} \quad T'' = T\sqrt{1-k}. \quad (66)$$

Je enger die Koppelung ist, um so mehr entfernen sich die Schwingungsdauern der beiden Schwingungen, die eine nach oben, die andere nach unten, von der Schwingungsdauer der Einzelsysteme<sup>1)</sup>.

Führt man die Werte (65) für  $b^2$  und  $d^2$  in die Gleichungen (63) ein, so kann man aus der ersten und dritten dieser Gleichungen angenäherte Werte für  $a$  und  $c$  berechnen, unter der Voraussetzung, daß die Dämpfungskonstanten  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  und entsprechend  $a$  und  $c$  so klein sind gegen  $\nu_1$ ,  $\nu_2$ ,  $b$  und  $d$ , daß man ihre höheren Potenzen und ihre Produkte vernachlässigen kann. Man erhält dann in Fällen, die der Resonanz ( $\nu_1 = \nu_2$ ) nahe liegen, für die Dämpfungskonstanten der beiden Schwingungen die Werte:

$$a = -\frac{\delta_1 + \delta_2}{2} \frac{1}{1+k} \quad \text{und} \quad c = -\frac{\delta_1 + \delta_2}{2} \frac{1}{1-k}. \quad (67)$$

Die langsamere Schwingung mit der Periode  $T'$  hat also kleinere Dämpfung als die schnellere Schwingung mit der Periode  $T''$ . Will man

<sup>1)</sup> Der Nachweis dieser Eigentümlichkeit gekoppelter Systeme ist nahezu gleichzeitig 18 von J. v. Geitl r. Fürst Galitzin und A. Oberbeck geführt worden.

statt der Dämpfungskonstanten die logarithmischen Dekremente einführen, so muß man nach (22) a mit  $T'$ , c mit  $T''$  multiplizieren, entsprechend  $\delta_1$  mit  $T_1$ ,  $\delta_2$  mit  $T_2$ . Bezeichnet man die Dekremente mit  $\gamma'$ ,  $\gamma''$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ , so hat man im Resonanzfalle unter Anwendung von (66)

$$\gamma' = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \frac{1}{\sqrt{1+k}}, \quad \gamma'' = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \frac{1}{\sqrt{1-k}}. \quad (68)$$

Es ist also auch das logarithmische Dekrement für die langsamere Schwingung kleiner als für die schnellere, und das gilt auch dann, wenn die beiden Kreise bei gegenseitiger Nichtbeeinflussung gleiche Dekremente haben.

Führt man nun die durch (62) gegebenen Lösungen in die Gleichungen (59) ein, so erhält man Beziehungen zwischen den Konstanten  $A_1$  und  $A_2$ ,  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$ . Wir wollen auch diese Rechnung der Einfachheit halber nur unter Vernachlässigung der Dämpfung durchführen. Die Gleichungen (59) ergeben dann unter Benutzung von (65) ohne weiteres die Beziehungen:

$$\operatorname{tg} \varepsilon_1' = \operatorname{tg} \varepsilon_2', \quad \operatorname{tg} \varepsilon_1'' = \operatorname{tg} \varepsilon_2'',$$

$$A_2' = A_1' \sqrt{\frac{L_{21} C_1}{L_{12} C_2}} \frac{k + \frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1}}{k}, \quad A_2'' = -A_1'' \sqrt{\frac{L_{21} C_1}{L_{12} C_2}} \frac{k - \frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1}}{k} \quad (69)$$

für Fälle, in denen  $\nu_1$  und  $\nu_2$  wenig voneinander abweichen. Im Resonanzfalle ist also:

$$A_2' = A_1' \sqrt{\frac{L_{21} C_1}{L_{12} C_2}}, \quad A_2'' = -A_1'' \sqrt{\frac{L_{21} C_1}{L_{12} C_2}}. \quad (70)$$

Die nun noch unbestimmt bleibenden Konstanten  $A_1'$ ,  $A_1''$ ,  $\varepsilon_1'$ ,  $\varepsilon_1''$  sind durch die Anfangsbedingungen zu bestimmen. Diese sind verschieden, je nach der Natur des behandelten Problems. Der bekannteste Apparat, der auf einer Koppelung elektrischer Schwingungskreise beruht, ist der von Tesla erfundene Transformator, in dem die Entladung einer Leidener Flasche durch einen Schließungsdraht von einer oder einigen Windungen geleitet wird und induzierend auf eine innerhalb dieser Primärwindungen befindliche Sekundärspule einwirkt. Je nach der Anwendung, die man von dem Transformator macht, sind die Enden der Sekundärspule mit Kapazität verbunden oder nicht. In letzterem Falle wirkt die Spule selber als Kapazität, indem sich auf ihren Windungen nach den Enden zu die elektrischen Ladungen bei den Schwingungsvorgängen anhäufen. Wie sich Kapazität und Selbstinduktion einer solchen Spule berechnen, soll hier nicht ausgeführt werden<sup>1)</sup>. In jedem

<sup>1)</sup> Berechnungen und Untersuchungen darüber hat P. Drude angestellt. Ann. d. Physik (4) 13, S. 512, 1904 und 16, S. 116, 1905.

Falle, mit oder ohne Endkapazität, läßt sich die Spule so dimensionieren, daß sie mit dem Primärkreis gleiche Schwingungsdauer hat. Die Anfangsbedingungen bestehen nun für diesen Fall unseres Problems darin, daß die primäre Kapazität zu Beginn der Entladung auf das Entladungspotential  $F$  geladen, der sekundäre Kreis ungeladen und der Strom in beiden Kreisen Null ist; also

$$\left. \begin{aligned} \text{für } t = 0: \quad V_1 &= F, & V_2 &= 0, \\ \frac{dV_1}{dt} &= 0, & \frac{dV_2}{dt} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

Nimmt man auch hier die Dämpfung wieder als verschwindend an, so folgt aus den beiden letzten dieser Gleichungen sofort, daß  $\varepsilon_1' = \varepsilon_1'' = 0$ , und dann aus den beiden ersten Gleichungen, daß  $A_1' = A_1'' = \frac{F}{2}$  ist.

Also lauten für diesen Fall unter den angegebenen Vernachlässigungen die angenäherten Lösungen:

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{F}{2} \left\{ e^{\frac{-\gamma' t}{T'}} \cos \frac{2\pi t}{T'} + e^{\frac{-\gamma'' t}{T''}} \cos \frac{2\pi t}{T''} \right\} \\ V_2 &= \sqrt{\frac{L_{21} C_1}{L_{12} C_2}} \frac{F}{2} \left\{ e^{\frac{-\gamma' t}{T'}} \cos \frac{2\pi t}{T'} - e^{\frac{-\gamma'' t}{T''}} \cos \frac{2\pi t}{T''} \right\} \end{aligned} \quad (72)$$

oder bei vollständiger Vernachlässigung der Dämpfung:

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{F}{2} \left( \cos \frac{2\pi t}{T'} + \cos \frac{2\pi t}{T''} \right), \\ V_2 &= \sqrt{\frac{L_{21} C_1}{L_{12} C_2}} \frac{F}{2} \left( \cos \frac{2\pi t}{T'} - \cos \frac{2\pi t}{T''} \right). \end{aligned} \quad (72')$$

Bezeichnet man das Verhältnis der beiden Schwingungsdauern  $T'/T''$  mit  $q$ , wobei also im Resonanzfalle  $q = \sqrt{\frac{1+k}{1-k}}$  ist, so läßt sich der Verlauf der Erscheinung folgendermaßen beschreiben. Nach Beginn der Entladung verlaufen die Schwingungen im Primärkreise anfangs mit der Amplitude  $F$ . Infolge der Verschiedenheit von  $T'$  und  $T''$  weichen die beiden Kosinusfunktionen in der Klammer allmählich voneinander ab, nehmen entgegengesetzte Vorzeichen an und heben sich schließlich auf.

Das ist zuerst der Fall, wenn  $t = \frac{T'}{2(q-1)}$  ist. Wenn sich zu dieser Zeit die beiden Kosinus in dem Ausdruck für  $V_1$  gerade aufheben, so addieren sie sich in dem Ausdruck für  $V_2$ . Die Energie, die ursprünglich in dem Primärkreis mit dem Betrage  $\frac{1}{2} C_1 F^2$  vorhanden gewesen war, ist also nach Ablauf der Zeit  $\frac{T'}{2(q-1)}$  im Primärkreis ganz er-

loschen, während im Sekundärkreis jetzt die Energie  $\frac{1}{2}C_2V_2^2$  enthalten ist, die, wenn  $L_{12} = L_{21}$  und die Summe der Kosinus = 2 ist, den Betrag  $\frac{1}{2}C_1F^2$  annimmt. Es ist also die ganze Energie des Primärkreises auf den Sekundärkreis übergegangen. Von diesem strömt sie im weiteren Verlauf auf den Primärkreis zurück und wandelt so zwischen beiden Kreisen hin und her. Die Zeitdauer dieses Uebergangs ist um so kürzer, je größer  $q$ , d. h. je fester die Koppelung ist.

Die Amplitude der Sekundärschwingung, d. h. der Maximalwert, den das Potential im sekundären Kreise annimmt, ist gleich der primären Schwingung multipliziert mit  $\sqrt{\frac{C_1}{C_2}}$ , wenn  $L_{12} = L_{21}$  gesetzt wird. Um ein möglichst hohes Potential im sekundären Kreise zu erreichen, empfiehlt es sich also, die Kapazität des sekundären Kreises möglichst klein, die des primären möglichst groß zu machen, wobei natürlich, um die Resonanzbedingung zu erfüllen, die Selbstinduktionskoeffizienten umgekehrt für den primären Kreis klein, für den sekundären groß sein müssen.

Diese Gesichtspunkte sind maßgebend für die rationelle Konstruktion von Tesla-Transformatoren. Man macht, um hohe sekundäre Potentiale zu erzielen, den primären Kreis am besten aus einer einzigen Windung eines möglichst dicken Drahtes, der die beiden Belegungen einer Leidener Flasche über eine Funkenstrecke hinweg verbindet, während die sekundäre Spule eine eng gewickelte Spule von vielen Windungen ist. Die Koppelung der beiden Kreise kann bei den gewöhnlichen Transformatoren, bei denen die Spulen in Luft stehen, nicht sehr hoch gemacht werden, weil bei zu enger Umschließung der sekundären Spule durch die primäre Büschelentladungen zwischen ihnen übergehen. Dieser Uebelstand läßt sich vermeiden und die Koppelung größer wählen, wenn man die Spulen in Petroleum einbettet. Auf das maximale Potential in dem Sekundärkreis hat allerdings nach der obigen Formel der Koppelungsgrad gar keinen Einfluß. Das ist nur verständlich, wenn man sich daran erinnert, daß dies Resultat unter vollständiger Vernachlässigung der Dämpfung gewonnen wurde. In diesem Falle wird der sekundäre Kreis durch die Einwirkung des primären immer bis zu der gleichen Maximalamplitude angeregt; nur wird diese Maximalamplitude bei starker Koppelung schnell erreicht, bei schwacher erst nach längerer Zeit. In Wirklichkeit wird die immer vorhandene Dämpfung den Verlauf der Erscheinungen und die abgeleiteten Gesetzmäßigkeiten erheblich abändern.

Die vollständigere Theorie der Schwingungen gekoppelter Systeme unter Berücksichtigung der Dämpfung ist von M. Wien<sup>1)</sup> und in be-

<sup>1)</sup> M. Wien, Wied. Ann. 61, S. 151, 1897.

sonderer Anwendung auf den Tesla-Transformator von P. Drude<sup>1)</sup> eingehend behandelt worden. Es möge aus dieser vollständigen Theorie hier nur das Resultat angegeben werden, daß bei Berücksichtigung der Dämpfung in den Formeln (65) bis (68) an Stelle von  $k$  eine Größe  $k'$  tritt, die durch die Gleichung bestimmt ist

$$k'^2 = k^2 - \left( \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2\pi} \right)^2, \quad (73)$$

vorausgesetzt, daß die Koppelung groß genug gegenüber der Differenz der bezüglichen Dekremente ist, um für  $k'$  einen reellen Wert zu geben.

Der Koppelungsfaktor  $k$  oder im allgemeineren Falle  $k'$  läßt sich mit Genauigkeit auf Grund der Gleichung (66) durch Messung der Schwingungsdauern  $T$ ,  $T'$  und  $T''$  ermitteln. Man bedient sich dazu eines geeichten Thomsonschen Schwingungskreises, dessen Schwingungsdauer durch Veränderung der Kapazität oder der Selbstinduktion in meßbarer Weise verändert werden kann. Man stellt diesen Meßkreis in der Nähe der beiden gekoppelten Kreise so auf, daß er von magnetischen Kraftlinien dieses Systems geschnitten wird. Er wird dann in sehr loser Koppelung von den Schwingungen des Systems miterregt. Wenn man über den Kondensator des Meßkreises eine Geißlersche Röhre legt, so kann man den Meßkreis auf maximale Leuchtwirkung einregulieren. Wird er durch die Schwingungen des gekoppelten Systems erregt, so findet man maximale Leuchtwirkung für zwei verschiedene Schwingungsdauern des Meßkreises, während bei alleiniger Einwirkung des Primärkreises (nach Entfernung des Sekundärkreises) nur eine Resonanzlage des Meßkreises gefunden wird. Aus den so am Meßkreis abgelesenen Werten von  $\nu$  und  $\nu'$ , entsprechend den oben mit  $b$  und  $d$  bezeichneten Werten, berechnet sich der Koppelungsfaktor nach Formel (65) durch die Gleichung:

$$k^2 = \frac{\nu'^2 - \nu^2}{\nu'^2 + \nu^2}. \quad (74)$$

Dabei ist es nicht erforderlich, daß Primär- und Sekundärkreis genau aufeinander abgestimmt seien, da Formel (65) bei geringen Unterschieden von  $\nu_1$  und  $\nu_2$  bereits gültig ist<sup>2)</sup>.

Eine andere wichtige Anwendung finden die gekoppelten Systeme in der drahtlosen Telegraphie. Nach Marconis Erfindung werden elektromagnetische Wellen dadurch auf große Entfernungen hin ausgesandt, daß in einem an hohem Maste vertikal ausgespannten Drahte, der Antenne, elektrische Schwingungen erregt werden. Während Marconi diese Schwingungen wie die eines Thomson-Kreises durch direkte

<sup>1)</sup> P. Drude. Annalen d. Physik (4) 9 S. 293 u. 59 . 902; 13. S. 512. 1904;

Ladung des Drahtes und Entladung durch eine Funkenstrecke erzeugte, bedient man sich heute nach dem Vorschlage von F. Braun dazu der Resonanzwirkung in einem gekoppelten Systeme. Es werden zunächst durch Funkenentladung die Schwingungen eines geschlossenen Thomson'schen Kreises erregt. Diese werden auf die Antenne übertragen, indem entweder die Antenne an dem einen Ende einer von dem Primärkreis durch Induktion erregten Sekundärspule liegt, deren anderes Ende mit der Erde verbunden ist, oder indem die Antenne direkt an den Primärkreis angelegt ist. Die Vorgänge, die sich bei dieser Art der Schwingungserregung abspielen, sind von denen, die durch unsere Gleichungen über gekoppelte Systeme dargestellt werden, vor allem in zwei Punkten wesentlich verschieden. Die Antenne wirkt erstens nicht als einfache Kapazität, auch dann nicht, wenn sie am Ende der induktiv erregten Sekundärspule sitzt; sondern Strom- und Ladungsvorgänge verteilen sich an ihr in eigentümlicher Weise. Zweitens aber tritt zu den dämpfenden Ursachen, die wir bisher nur in den Widerständen gesucht haben, noch der Energieverlust hinzu, der in der Ausstrahlung von Wellen seitens der Antennen besteht. Beide Punkte können wir erst später ausführlich behandeln. Streng genommen lassen sich also unsere Gleichungen auf die Vorgänge in den Sendern der drahtlosen Telegraphie nicht übertragen. Gleichwohl haben die Beobachtungen gelehrt, daß auch in diesen Fällen die eigentümlichen Eigenschaften gekoppelter Systeme deutlich hervortreten. In der Antenne sind, wie wir später sehen werden, im allgemeinen mehrere Schwingungen von verschiedener Schwingungsdauer möglich. Wird der Primärkreis auf eine von ihnen, etwa auf die Grundschwingung mit der größten Schwingungsdauer, abgestimmt, so wird bei loser Koppelung durch die Schwingungen des Primärkreises nur diese Schwingung in der Antenne mit starker Amplitude erregt. Unter diesen Umständen wird bei jeder Funkenentladung im Primärkreis ein längerer Wellenzug von scharf ausgeprägter Schwingungsdauer von der Antenne entsandt. Damit ist auch für den Empfänger die Möglichkeit einer scharfen Abstimmung auf den Sender gegeben. Aber bei dieser Art der Erregung ist die maximale Amplitude in der Antenne und damit die Reichweite der ausgesandten Wellen nicht sehr groß. Denn bei schwacher Koppelung werden die Schwingungen in der Antenne nur langsam erregt, und da sie zugleich durch die Ausstrahlung stark gedämpft sind, so erreichen sie keine beträchtliche Höhe. Man kann die Amplitude und damit die Reichweite steigern, indem man die Koppelung fester wählt. Aber dann tritt der Uebelstand ein, daß entsprechend den obigen Ausführungen statt einer zwei Schwingungen in dem Systeme auftreten. Der Empfänger, der nur auf eine dieser Schwingungen abgestimmt sein kann, empfängt entsprechend auch nur etwa die Hälfte der Energie, die

in beiden Schwingungen steckt. Diese Schwierigkeit wird beseitigt in einer neueren Anordnung gekoppelter Sender von M. Wien. Während beim Braunschen Sender die Dämpfung der beiden Kreise nicht sehr verschieden ist, benutzt M. Wien einen Primärkreis mit sehr großer Dämpfung<sup>1)</sup> gegenüber einem Sekundärkreis von kleiner Dämpfung. Bei verhältnismäßig enger Koppelung geht dann die Energie des Primärkreises schnell auf den Sekundärkreis über; die Schwingungen im Primärkreis erlöschen und der Sekundärkreis schwingt allein und mit seiner Eigenschwingung langsam aus. Das Wesentliche dieser sogenannten Stoßerregung liegt aber nicht in der großen Dämpfung des Primärkreises allein — diese würde doch nicht verhindern, daß die Schwingungen des Sekundärkreises wieder rückwärts auf den primären wirken —, sondern in einer eigentümlichen Funktion der Funkenstrecke. Wenn nämlich die primären Schwingungen so weit herabgedrückt werden, daß der Funken erlischt, so ist der Primärkreis von da ab unterbrochen und kann durch die Schwingungen im Sekundärkreis nicht wieder angeregt werden. Diese Löschfunken spielen also bei diesen Systemen die Rolle eines Unterbrechers, der den primären Kreis ausschaltet, nachdem seine Energie zum großen Teil auf den sekundären Kreis übertragen ist. Dieser schwingt dann als freies System mit seiner Eigenschwingung.

In den behandelten Fällen hat es sich immer um Resonanzprobleme gehandelt, um Fälle, bei denen  $\nu_1$  und  $\nu_2$  nahezu oder ganz gleich waren. Wir wollen noch den Fall behandeln, daß  $\nu_1$  und  $\nu_2$  sehr weit voneinander verschieden sind. Es soll  $\nu_1$  sehr groß sein gegenüber  $\nu_2$ , so daß

$\frac{\nu_2}{\nu_1}$  eine Größe ist, deren höhere Potenzen vernachlässigt werden können.

Dann lassen sich die Gleichungen (64) folgendermaßen umformen:

$$b^2 = \frac{\nu_1^2}{2(1-k^2)} \left(1 + \frac{\nu_2^2}{\nu_1^2}\right) \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4\nu_2^2(1-k^2)}{\nu_1^2 \left(1 + \frac{\nu_2^2}{\nu_1^2}\right)^2}}\right) = \nu_2^2$$

$$d^2 = \frac{\nu_1^2}{2(1-k^2)} \left(1 + \frac{\nu_2^2}{\nu_1^2}\right) \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4\nu_2^2(1-k^2)}{\nu_1^2 \left(1 + \frac{\nu_2^2}{\nu_1^2}\right)^2}}\right) = \frac{\nu_1^2}{1-k^2}$$

oder

$$b = \nu_2 \quad d = \frac{\nu_1}{\sqrt{1-k^2}}. \quad (75)$$

In diesem Falle wird durch die Koppelung der beiden Kreise die langsame Schwingung nicht beeinflusst, die schnelle Schwingung in ihrer Schwingungszahl dagegen noch erhöht.

<sup>1)</sup> M. Wien, Ann. d. Physik (4), 25, S. 644, 1908.



Es gibt eine andere Art der Koppelung zweier Kreise, bei der das Gegenteil stattfindet. Es soll auch dieser Fall noch kurz erörtert werden, weil er bei der üblichen Erzeugung Hertzscher Schwingungen in Betracht kommt. Wir wollen annehmen, daß die beiden Schwingungskreise nicht magnetische, sondern elektrische Kraftlinien miteinander gemein haben. Es soll also im ersten Kreise außer der elektromotorischen Kraft, die von der Selbstinduktion herrührt, und außer der Spannung, die infolge der Aufladung der Kapazität durch den Strom im ersten Kreise wirksam wird, auch noch eine Spannungsdifferenz bestehen, die ein Bruchteil der auf der Kapazität des zweiten Kreises bestehenden Spannungsdifferenz ist, und umgekehrt. Die Gleichungen (58) nehmen dann die Form an:

$$\left. \begin{aligned} w_1 i_1 &= -L_1 \frac{di_1}{dt} + V_1 + k_1 V_2 \\ w_2 i_2 &= -L_2 \frac{di_2}{dt} + V_2 + k_2 V_1 \end{aligned} \right\} \quad (58')$$

und gehen durch Berücksichtigung von (5) über in:

$$\left. \begin{aligned} L_1 C_1 \frac{d^2 V_1}{dt^2} + C_1 w_1 \frac{dV_1}{dt} + V_1 + k_1 V_2 &= 0 \\ L_2 C_2 \frac{d^2 V_2}{dt^2} + C_2 w_2 \frac{dV_2}{dt} + V_2 + k_2 V_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (59')$$

Daraus ergibt sich durch das gleiche Verfahren wie oben, wenn  $k_1 k_2 = k^2$  gesetzt wird, die Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 V_1}{dt^4} + \left( \frac{w_1}{L_1} + \frac{w_2}{L_2} \right) \frac{d^3 V_1}{dt^3} + \left( \frac{1}{L_1 C_1} + \frac{1}{L_2 C_2} + \frac{w_1 w_2}{L_1 L_1} \right) \frac{d^2 V_1}{dt^2} \\ + \left( \frac{w_1}{C_2} + \frac{w_2}{C_1} \right) \frac{1}{L_1 L_2} \frac{dV_1}{dt} + \frac{(1 - k^2)}{L_1 L_2 C_1 C_2} V_1 = 0. \end{aligned} \quad (60')$$

Die Lösungen lassen sich wieder in den Formen (61) und (62) ansetzen. Die Gleichungen (63) aber nehmen in diesem Falle die Form an:

$$\left. \begin{aligned} a + c &= -(\delta_1 + \delta_2) \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 4ac &= \nu_1^2 + \nu_2^2 + \delta_1^2 + \delta_2^2 + 4\delta_1 \delta_2 \\ a(c^2 + d^2) + c(a^2 + b^2) &= -\delta_1(\nu_2^2 + \delta_2^2) - \delta_2(\nu_1^2 + \delta_1^2) \\ (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) &= (1 - k^2)(\nu_1^2 + \delta_1^2)(\nu_2^2 + \delta_2^2) \end{aligned} \right\} \quad (63')$$

Berechnet man die Dauer der beiden in jedem Kreise auftretenden Schwingungen unter Vernachlässigung der Dämpfung, so findet man:

$$b^2 = \frac{\nu_1^2 + \nu_2^2}{2} - \sqrt{\frac{(\nu_1^2 + \nu_2^2)^2}{4} - (1 - k^2) \nu_1^2 \nu_2^2}$$

$$= \frac{\nu_1^2 + \nu_2^2 - 2k\nu_1\nu_2}{2} \sqrt{1 + \frac{(\nu_1^2 - \nu_2^2)^2}{4k^2\nu_1^2\nu_2^2}},$$

$$d^2 = \frac{\nu_1^2 + \nu_2^2}{2} + \sqrt{\frac{(\nu_1^2 + \nu_2^2)^2}{4} - (1 - k^2) \nu_1^2 \nu_2^2}$$

$$= \frac{\nu_1^2 + \nu_2^2 + 2k\nu_1\nu_2}{2} \sqrt{1 + \frac{(\nu_1^2 - \nu_2^2)^2}{4k^2\nu_1^2\nu_2^2}}.$$

Für den Resonanzfall,  $\nu_1 = \nu_2$ , wird jetzt

$$b = \nu_1 \sqrt{1 - k}, \quad d = \nu_1 \sqrt{1 + k},$$

oder

$$T_1' = \frac{T}{\sqrt{1 - k}}, \quad T'' = \frac{T}{\sqrt{1 + k}}.$$

Ist andererseits  $\nu_1$  sehr groß gegen  $\nu_2$ , so wird

$$b^2 = \frac{\nu_1^2}{2} \left(1 + \frac{\nu_2^2}{\nu_1^2}\right) \left(1 - \sqrt{1 - \frac{(1 - k^2) 4\nu_2^2}{\nu_1^2 \left(1 + \frac{\nu_2^2}{\nu_1^2}\right)^2}}\right)$$

und durch Reihenentwicklung und Vernachlässigung von  $\frac{\nu_2^2}{\nu_1^2}$  gegen 1:

$$b = \nu_2 \sqrt{1 - k^2}, \quad (75')$$

ferner:

$$d^2 = \frac{\nu_1^2}{2} \left(1 + \frac{\nu_2^2}{\nu_1^2}\right) \left(1 + \sqrt{1 - \frac{(1 - k^2) 4\nu_2^2}{\nu_1^2 \left(1 + \frac{\nu_2^2}{\nu_1^2}\right)^2}}\right)$$

oder mit der gleichen Annäherung:

$$d = \nu_1. \quad (75'')$$

In diesem Falle ist es also die schnelle Schwingung, die bei der Koppelung ungeändert bleibt, während die langsame Schwingung durch die Koppelung noch mehr verlangsamt wird.

Hinsichtlich der experimentellen Untersuchung der Eigenschaften gekoppelter Systeme muß auf die Werke von J. Zenneck verwiesen werden <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> J. Zenneck, Elektromagnetische Schwingungen und drahtlose Telegraphie. Stuttgart, F. Enke, 1905. — Leitfad. der drahtlosen Telegraphie. Stuttgart, F. Enk. 190.

## 9. Der Koeffizient der Selbstinduktion des Schließungskreises.

In den Formeln, die wir in diesem Kapitel für die Vorgänge in elektrischen Schwingungskreisen aufgestellt haben, ist jeder Schwingungskreis definiert durch seine Kapazität, seine Selbstinduktion und seinen Widerstand. Die Kapazität eines Plattenkondensators, einer Leidener Flasche oder einer Flaschenbatterie, wie man sie in Thomsonschen Schwingungskreisen zu benutzen pflegt, kann man leicht berechnen<sup>1)</sup> oder experimentell mit anderen bekannten Kapazitäten vergleichen, z. B. aus der Stärke des Entladungsstromes bei bekannter Potentialdifferenz oder mit Hilfe von Wechselströmen durch die Anwendung einer Schaltung, wie sie als Wheatstonesche Brücke zur Bestimmung galvanischer Widerstände bekannt ist (vgl. Kapitel VI, Abschnitt 19, S. 404).

Nach dem letzteren Verfahren kann man, wie an den genannten Stellen ebenfalls ausgeführt ist, auch den Koeffizienten der Selbstinduktion experimentell mit bekannten Induktionskoeffizienten vergleichen, oder man kann auch Methoden angeben, um ihn in absolutem Maße zu messen. Bei den hier behandelten Fällen elektrischer Schwingungen sind aber die Selbstinduktionskoeffizienten des Schließungskreises stets außerordentlich klein, da ja z. B. bei den Versuchen Feddersens der Schließungsdraht nur aus langen, geradlinig geführten Stücken bestand. Noch kleiner sind sie in den unten näher zu studierenden Fällen von elektrischen Schwingungen an geraden, kurzen Drähten, wie sie Hertz kennen gelehrt hat. Solche kleine Selbstinduktionskoeffizienten lassen sich wohl mit anderen von gleicher Größenordnung experimentell vergleichen. Aber ihren absoluten Betrag zu messen, dafür versagen die sonst benutzten Methoden. Es ist daher erforderlich, für gewisse einfache Formen des Schließungskreises, bzw. der Strombahn, den Betrag der Selbstinduktion auf theoretischem Wege zu ermitteln.

Die Theorie erlaubt ja nun auch für jede bestimmte Gestalt des Schließungskreises ihren Selbstinduktionskoeffizienten  $L$  zu berechnen, jedoch nur, wenn die Stromverteilung innerhalb des Querschnittes des Schließungskreises als bekannt angesehen wird. So haben wir oben in Kapitel V für gewisse einfache Fälle  $L$  berechnet. Nach der dortigen Formel (37) auf S. 335 ist für zwei einander parallel geführte Voll-

---

<sup>1)</sup> Bei dieser Berechnung wird dann allerdings vorausgesetzt, daß dieselben Formeln für statische Ladungen und für schnell wechselnde Ladungen gelten. Dies ist streng genommen nicht der Fall, wie wir weiter unten in Kapitel IX, Abschnitt 20

gesetzt wird:

$$L = 1 \left( 2 \lg \frac{d^2}{R^2} + 1 \right),$$

wobei  $d$  den Abstand der Drähte voneinander bedeutet. Diese Formel wäre also anzuwenden, wenn bei den Feddersenschen Versuchen der Schließungsdraht aus einer geraden Hinleitung und einer parallelen Rückleitung bestanden hätte. Nennt man  $l'$  die Länge der ganzen Leitung (nicht nur der Hinleitung oder Rückleitung allein), so ist in obiger Formel  $l'$  gleich  $2l$  zu setzen. Es entsteht daher:

$$L = 2 l' \left( \lg \frac{d}{R} + \frac{1}{4} \right). \quad (76)$$

Dieselbe Formel ist anwendbar, wenn der Schließungskreis aus mehreren solcher Paare paralleler Leitungen besteht, welche gegenseitig keine Induktion aufeinander ausüben. In gewisser Annäherung kann der Fall, daß der Schließungsdraht ein Quadrat (von der Seitenlänge  $s$ ) bildet, als eine Uebereinanderlagerung zweier paralleler Leitungspaare angesehen werden, bei denen das eine Paar deshalb nicht induzierend auf das andere Paar wirkt, weil die Richtung der Stromfäden des einen Paares senkrecht zu denen des anderen Paares ist. In der Tat zeigt ja die oben S. 302 abgeleitete Neumannsche Formel der Induktionskoeffizienten, daß dieselben verschwinden, falls  $\epsilon = \frac{\pi}{2}$  wird.

Es ist daher nach Formel (76), in welcher  $d = s$ ,  $l' = 2s$  zu setzen ist, und in welcher der Faktor 2 zuzufügen ist, da der Schließungsdraht aus zwei gleichen Paaren besteht:

$$L = 2 \cdot 4s \left( \lg \frac{s}{R} + \frac{1}{4} \right),$$

oder falls wir wieder die ganze Länge  $4s$  des Schließungskreises mit  $l'$  bezeichnen:

$$\begin{aligned} L &= 2 l' \left( \lg \frac{1}{4} \frac{l'}{R} + \frac{1}{4} \right) = 2 l' \left( \lg \frac{l'}{R} + \lg \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) \\ &= 2 l' \left( \lg \frac{l'}{R} - 1,13 \right). \end{aligned} \quad (77)$$

Die Formel kann nicht ganz streng richtig sein, weil bei ihrer Ableitung vorausgesetzt ist, daß der Abstand  $d$  der Drähte groß gegen ihre Länge  $l'$  ist, was bei unserem jetzt betrachteten Falle des Quadrates nicht erfüllt ist. Man erhält denn auch in der Tat durch strengere Berechnung:

$$L = 2 l' \left( \lg \frac{l'}{R} - 1,9 \right). \quad (77')$$

Ist der Schließungsdraht ein Kreis, so erhält man nach strenger Berechnung:

$$L = 2l' \left( \lg \frac{l'}{R} - 1,5 \right). \quad (77'')$$

Die drei verschiedenen Werte von  $L$  nach (77), (77') und (77'') unterscheiden sich prozentisch wenig voneinander, wenn, wie es meist der Fall ist,  $\frac{l'}{R}$  eine sehr große Zahl ist. So betrug bei dem einen Versuche Feddersens  $l' = 134\,300$  cm,  $R = 0,067$  cm, d. h.  $l' : R = 2 \cdot 10^6$ ,  $\lg \frac{l'}{R} = 14,5$ ; die Formeln (77), (77') bis (77'') ergeben daher für  $L$  Werte, welche sich höchstens um etwa 5 % unterscheiden, und da die Schwingungsdauer  $T$  nach (21) proportional  $\sqrt{L}$  ist, so würden sich die entsprechenden Werte von  $T$  nur etwa um 2,5 % unterscheiden.

Wenn  $l' : R$  groß ist, so kann man daher auch den Subtrahend in den Formeln (77) bis (77'') ganz fortlassen, und einfach für den Koeffizienten der Selbstinduktion eines Schließungskreises, welcher möglichst in der Form geradliniger Strecken in der Weise geführt ist, daß die von den Strecken umrandete Fläche von der Größenordnung des Quadrates der Länge der Strecken ist, näherungsweise die Formel anwenden:

$$L = 2l' \lg \frac{l'}{R}. \quad (77''')$$

Die bisherigen Entwicklungen für  $L$  gelten nur für den Fall, daß im ganzen Querschnitt des Schließungsdrahtes die Stromverteilung gleichförmig sei. Dieses findet aber bei elektrischen Schwingungen streng genommen jedenfalls nicht statt. Denn nach den Ueberlegungen, welche wir oben in Kapitel VI, S. 391 anstellten, ergibt sich, daß die Stromdichte bei schnell stattfindenden Stromänderungen nach dem Inneren des Leiters zu abnimmt. Bei den sehr schnellen Schwingungen, wie sie bei der oscillatorischen Entladung Leidener Flaschen vorkommen, muß daher der Strom wesentlich nur in der äußeren Schicht des Leiters verlaufen, während sein Inneres ganz stromfrei ist.

Dies hat zur Folge, daß einerseits der galvanische Widerstand des Schließungsdrahtes für schnelle elektrische Schwingungen bedeutend größer ausfällt als für stationäre Ströme, da der stromführende Querschnitt für erstere ein viel kleinerer ist als für letztere. Dieser Umstand kann indes, solange der Widerstand immer noch klein gegen  $2\sqrt{L:C}$  ist, nur auf die Dämpfung der Schwingungen [gemäß der Formel (22)] Einfluß haben, dagegen nicht auf die Schwingungsdauer gemäß den Betrachtungen auf S. 454. Dagegen wäre es möglich, daß auch die Selbstinduktion durch die ungleichförmige Stromverteilung

merklich geändert wäre, so daß aus diesem Grunde die Formel (21) nicht ganz richtig sein kann, wenn man in ihr  $L$  aus der Annahme einer gleichförmigen Stromverteilung berechnet.

Suchen wir nun diese Annahme dadurch zu verbessern, daß wir voraussetzen, daß der Strom allein in einer dünnen Oberflächenschicht der Drähte fließt, und wenden wir daher für  $L$  die in Kapitel V auf S. 335 abgeleitete Formel (36) für zwei parallele Hohlzylinder an, so stoßen wir dabei auf die Schwierigkeit, daß die Selbstinduktion  $L$  unendlich groß wird, wenn die durchströmte Oberflächenschicht unendlich dünn wird ( $R_1 = R_1'$ ,  $R_2 = R_2'$ ). Dies Resultat kann aber nach den allgemeinen Ueberlegungen des Kapitels VI, Abschnitt 14, S. 384 nicht richtig sein, in denen gezeigt wurde, daß bei schnellen Stromwechseln die Stromverteilung stets in der Weise stattfindet, daß die magnetische Energie, d. h. die Selbstinduktion, ein Minimum wird. Je schneller daher die Stromwechsel erfolgen, und je mehr sich der Strom auf die Oberfläche des Drahtes zusammenzieht, um so kleiner muß der Koeffizient der Selbstinduktion werden.

Daß wir durch die Voraussetzung gleichförmig durchströmter Hohlzylinder zu einem falschen Resultate für  $L$  kommen, liegt daran, daß in der Oberflächenschicht der Drähte bei schnellen Stromwechseln die Stromdichte ebenfalls nicht gleichförmig ist, sondern daß dicht nebeneinander Ströme von verschiedener Phase laufen, die sogar entgegengesetzt gerichtet sein können. Es folgte dies ja aus der oben S. 390 erläuterten Analogie mit der Wärmebewegung.

Wir können nun unsere dortigen Ueberlegungen leicht in der Weise vervollständigen, daß wir eine strengere Theorie der oszillatorischen Entladung mit Rücksicht auf die ungleichförmige Stromverteilung im Querschnitt erhalten<sup>1)</sup>. Es soll dies im nächsten Abschnitte geschehen.

## 10. Die Stromstärke ist im Querschnitt ungleichförmig verteilt.

Wir wollen annehmen, ein Kondensator werde durch zwei einander parallel geführte gerade Drähte entladen. Legt man die  $z$ -Achse ihrer Richtung parallel, so findet die elektrische Strömung nur parallel der  $z$ -Achse statt.

Nach der Formel (88) des Kapitels VI, S. 388 ist:

$$\frac{j}{\sigma} = -\frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial t} + \mathfrak{E}, \quad (78)$$

falls  $j$  die Stromdichte an einer bestimmten Stelle des Leiters,  $\sigma$  die spezifische Leitfähigkeit an jener Stelle,  $\mathfrak{B}_z$  das Vektorpotential und  $\mathfrak{E}$  die pro Längeneinheit wirkende äußere elektromotorische Kraft bezeichnet. Es ist nun in unserem Falle die ganze auf der Länge  $l'$  des Schließungsdrahtes wirkende elektromotorische Kraft

$$E = \int \mathfrak{E} dl = V_1 - V_2,$$

d. h. gleich der Potentialdifferenz des Kondensators. Wir wollen annehmen, es solle  $j$  und ebenso daher  $\mathfrak{B}_z$  und  $\mathfrak{E}$  unabhängig von der Entfernung  $l$  vom Ende der Leitung sein. Es ergibt sich dann aus der letzten Gleichung:

$$\mathfrak{E} = \frac{V_1 - V_2}{l'}. \quad (79)$$

Die Gleichungen (78) und (79) gelten für jede Stelle innerhalb des Querschnittes des Leitungsdrahtes. Aber man kann nicht für eine beliebige Stelle des Querschnittes den dort herrschenden Wert  $\mathfrak{B}_z$  des Vektorpotentials angeben, ohne die Stromverteilung im Inneren der Drähte zu kennen. Wohl gelingt dies aber für eine Stromfaser an der Oberfläche des Drahtes, falls dieser als Kreiszylinder aufzufassen ist.

Wie nämlich oben S. 245 nachgewiesen wurde, ist das Vektorpotential an der Oberfläche eines kreiszylinderförmigen durchströmten Drahtes nicht abhängig von der speziellen Art der Stromverteilung im Drahte, sondern bestimmt sich nur aus der gesamten im Drahte fließenden Stromstärke. Wird diese mit  $i$  bezeichnet, sowie der Radius des Drahtes mit  $R$ , so ist nämlich nach Formel (36) auf S. 245 an der Oberfläche des Drahtes

$$\mathfrak{B}_z = -2\mu i \lg R + C_1, \quad (80)$$

wo  $C_1$  eine gewisse Konstante bedeutet, welche, falls die Rückleitung des Stromes ein im Abstände  $d$  befindlicher paralleler Zylinder ist, den Wert besitzt (vgl. oben S. 251)

$$C_1 = +2\mu i \lg d. \quad (80')$$

$\mu$  bedeutet in diesen Formeln die Permeabilität des Raumes. Sie ist bei der oben ausgeführten Ableitung der Formeln zunächst überall als von einerlei Wert angenommen. Aus den später auf S. 334 angestellten Ueberlegungen folgt aber, daß, falls die Permeabilität der Drähte von der ihrer Umgebung verschieden sein sollte, dann die Formeln (80) und (80') noch bestehen bleiben, falls die beiden stromführenden Drähte sich nicht gegenseitig sehr nahe kommen; d. h. falls  $d$  groß gegen den Radius  $R$  ist. Wie aus der dortigen Formel (34) hervorgeht, muß dann dem  $\mu$  in (80) und (80') der Wert der Permeabilität in der Umgebung des Drahtes beigelegt werden. Nennt man diesen Wert  $\mu_0$ , so wird daher

$$\mathfrak{B}_z = +2i\mu_0 (\lg d - \lg R). \quad (81)$$

Setzt man diesen Wert von  $\mathfrak{B}_z$  in (78) ein und benutzt (79), so entsteht:

$$\frac{j'}{\sigma} = -2\mu_0(\lg d - \lg R) \frac{di}{dt} + \frac{V_1 - V_2}{l'}, \quad (82)$$

wobei  $j'$  die Stromdichte in der Oberfläche des Drahtes bedeutet.

Die Gesamtstromstärke  $i$  ist nun mit der Potentialdifferenz  $V_1 - V_2$  durch die Formel (5) der S. 449 verknüpft, nämlich:

$$i = -C \frac{d(V_1 - V_2)}{dt}, \quad (83)$$

wo  $C$  die Kapazität (nach elektromagnetischem Maße) des Kondensators bedeutet.

Aus den beiden Gleichungen (82) und (83) kann man leicht  $V_1 - V_2$  eliminieren, indem man (82) nach  $t$  differenziert. Indes bleibt dann in gewisser Weise als störendes Glied  $\frac{1}{\sigma} \frac{dj'}{dt}$  stehen, was deshalb stört, weil wir nicht wissen, in welcher Weise  $j'$  mit  $i$  zusammenhängt. Indes kann man dies Glied einfach fortlassen, wenn wir auch hier, gerade wie oben, voraussetzen, daß der galvanische Widerstand des Schließungskreises verhältnismäßig klein, d. h.  $\sigma$  verhältnismäßig groß ist. Jenes Glied kann dann nämlich nur auf die Dämpfung der elektrischen Schwingungen von Einfluß sein, während es die Periode nicht modifiziert. Zur Berechnung der letzteren können wir daher einfach  $\sigma = \infty$  annehmen, und erhalten so aus (82) und (83):

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{i}{C \cdot 2l' \mu_0 (\lg d - \lg R)} = 0. \quad (84)$$

Wenn man diese Differentialgleichung für  $i$  mit der oben abgeleiteten Differentialgleichung (7) vergleicht, so erkennt man, daß an Stelle des Koeffizienten  $L$  der Selbstinduktion des gleichmäßig durchströmten Drahtes hier der Ausdruck tritt:

$$L' = 2l' \mu_0 (\lg d - \lg R), \quad (85)$$

welcher, gemäß der Ableitung der Formel (82), die physikalische Bedeutung des Koeffizienten der Induktion des Stromes auf eine Stromfaser in seiner Oberfläche besitzt. Es gilt daher auch hier für die Schwingungsdauer der Oszillationen eine der Formel (21) analoge Formel, nämlich:

$$T = 2\pi \sqrt{L' C}. \quad (86)$$

Lagert der Schließungskreis nicht in einem Medium von hoher Magnetisierungskonstante (d. h. in Eisen, Nickel, Kobalt), so ist  $\mu_0 = 1$  zu setzen.

Es wird dann (85) zu



$$L' = 2l' \lg \frac{d}{R} \quad (87)$$

Vergleicht man diesen Wert von  $L'$  mit dem bei gleichförmiger Verteilung der Stromdichte sich ergebenden Werte von  $L$  der Formel (76), so erkennt man, daß in der Tat, wie es ja auch nach den am Ende des vorigen Abschnittes angeführten allgemeinen Ueberlegungen sein muß,  $L'$  etwas kleiner als  $L$  ist. Indes ist bei dem großen Werte, den  $\lg \frac{d}{R}$  bei den angestellten Versuchen hat (vgl. oben S. 486), die Abweichung des  $L'$  und  $L$  und daher um so mehr die Differenz der Schwingungsdauern  $T$ , wenn man sie nach (21) oder nach (86) berechnet, völlig unmerkbar.

Anders gestalten sich die Verhältnisse, wenn der Schließungskreis aus Material von hoher Magnetisierungskonstante, z. B. Eisen, besteht. Sind zwei relativ weit voneinander (um  $d$ ) entfernte parallele Eisenzylinder (Permeabilität  $\mu$ ) gleichförmig von einem hin- bzw. rücklaufenden Strome durchflossen, so ist nach Formel (37) der S. 335 ihr Koeffizient  $L$  der Selbstinduktion, falls die Eisendrähte in Luft lagern ( $\mu_0 = 1$ ) und  $l'$  die Gesamtlänge beider Drähte ist,

$$L = 2l' \left( \lg \frac{d}{R} + \frac{\mu}{4} \right).$$

Da  $\mu$  eine erhebliche Größe besitzt, z. B. der Wert  $\mu = 120$  noch sehr gering ist, so müßte hiernach  $L$  bedeutend größer und daher die elektrischen Schwingungen nach (21) bedeutend langsamer ausfallen, wenn der Schließungsdraht aus Eisen, als wenn er z. B. aus Kupfer besteht. So müßte in dem S. 486 berechneten Beispiel, wo  $\lg \frac{l'}{R} = 14,5$  ist,  $L$  für  $\mu = 120$  etwa dreimal so groß ausfallen, d. h. die Schwingungsdauer etwa 1,7mal so groß.

Dagegen kann nach der in diesem Abschnitte angestellten strengeren Betrachtungsweise, d. h. nach der Formel (86), ein Einfluß des Materials des Schließungskreises auf die Schwingungsdauer  $T$  nicht bestehen, da in (85) die Permeabilität  $\mu$  der Leitung nicht auftritt, sondern nur die Permeabilität  $\mu_0$  der Umgebung.

Dieses Resultat ist nun auch in der Tat bei sehr schnellen Schwingungen, die noch weit schneller als die bisher betrachteten Kondensator-entladungen erfolgen, experimentell bestätigt. Es soll davon unten ausführlicher die Rede sein.

Da wir oben S. 391 sahen, daß bei hoher Permeabilität die Schwingungen viel mehr nach der Oberfläche hingedrängt werden, als bei  $\mu = 1$ , so muß der galvanische Widerstand durch ein großes  $\mu$

wachsen, da sich der Strom auf einen kleineren Querschnitt zusammen-drängt. Infolgedessen muß die Dämpfung der Schwingungen von dem Material des Schließungskreises wesentlich beeinflusst werden, indem sie nicht nur mit abnehmender Leitfähigkeit  $\sigma$ , sondern auch mit wachsender Magnetisierungskonstante  $\mu$  des Drahtes erheblich wachsen muß. Auch dieses Verhalten ist experimentell bestätigt, wie wir weiter unten sehen werden.

Es mag hier hervorgehoben werden, daß aus dem Umstande, daß die Schwingungsdauer bei Anwendung eines Eisendrahtes dieselbe wie bei der eines Kupferdrahtes ist, nicht folgt, daß die Ampèreschen Molekularströme, welche die hohe Magnetisierungskonstante des Eisens bedingen (vgl. oben S. 263), schnellen Schwingungen nicht mehr zu folgen imstande sind. Im Gegenteil wird dies Folgen durch die erhöhte Dämpfung der Schwingungen in einem Eisendrahte gegenüber denen in einem Kupferdrahte erwiesen.

Wenn der Schließungskreis nicht mehr die angegebene einfache Gestalt zweier paralleler Drähte besitzt, so ergibt sich aus den Entwicklungen dieses Abschnittes, daß die Formel (86) für die Schwingungsdauer des Systems bestehen bleibt.  $L'$  bedeutet darin den Koeffizienten der Induktion des Stromsystems auf eine Stromfaser in seiner Oberfläche.

## 11. Weitere Vervollständigung der Theorie.

Die bisher vorgetragene Theorie der oszillatorischen Entladung bedarf noch aus mehreren Gründen der Verbesserung. Es ist nämlich 1. bisher angenommen, daß elektrische Strömung nur im Schließungsdrahte bzw. an seiner Oberfläche, dagegen nicht in dem ihn umgebenden Isolator stattfände. Denn nur unter dieser Annahme gilt die Formel (81) für das Vektorpotential  $\mathfrak{B}_z$ , während man den Wert von  $\mathfrak{B}_z$  an der Oberfläche des Drahtes ohne weiteres nicht angeben kann, wenn im umgebenden Isolator Ströme von unbekannter Verteilung vorhanden sind. — Die Annahme, daß Ströme nur im Leiter existieren, kann aber nicht streng richtig sein, denn auch im umgebenden Isolator existiert infolge der oszillatorischen Entladungen eine periodisch wechselnde elektrische Kraft, welche daher auch im Isolator alternierende Ströme (sogenannte Verschiebungsströme, siehe oben S. 414) wachrufen muß. Wir können dies auch daran erkennen, daß das Vektorpotential, gerade wie die elektrische und magnetische Kraft selber, in der Luft der oben im vorigen Kapitel, S. 434 abgeleiteten Formel (34), in welcher  $\mu = \epsilon = 1$  zu setzen ist, nämlich:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{B}_z}{\partial t^2} = \Delta \mathfrak{B}_z$$

genügen muß. Da nun nach Gleichung (24) des III. Kapitels auf S. 240 ist:

$$\Delta \mathfrak{R}_z = -4\pi j_z,$$

so folgt für die Stromdichte  $j_z$  in der Luft:

$$j_z = -\frac{1}{4\pi c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{R}_z}{\partial t^2}. \quad (88)$$

Es ist also  $j_z$  nur dann gleich Null, wenn  $\mathfrak{R}_z$  unabhängig von  $t$  ist, d. h. wenn im Schließungsdrahte ein konstanter Strom fließt. Je schneller aber derselbe und damit auch  $\mathfrak{R}_z$  variiert, um so mehr müssen sich Verschiebungsströme im Isolator ausbilden.

Da der Faktor  $\frac{1}{4\pi c^2}$  auf der rechten Seite der Gleichung (88) sehr klein ist, so müssen die Stromwechsel schon sehr schnell erfolgen, wenn die Korrektur merklich werden soll. Bei welcher Wechselzahl dies eintritt, können wir leicht aus (88) schätzen. Falls nämlich ein Strom der Gesamtstärke  $i$  in einem geraden Leiter hinfließt und in einem im Abstände  $d$  von ihm befindlichen parallelen Leiter zurückfließt, so ist für einen Punkt  $P$  außerhalb der Leiter, welcher von deren Achsen die Abstände  $r_1$  und  $r_2$  besitzt, nach Formel (57) auf S. 251 bei Nichtberücksichtigung der Verschiebungsströme zu setzen:

$$\mathfrak{R}_z = 2i \lg \frac{r_2}{r_1}.$$

Nennt man  $i'$  die Stromstärke, welche in der Luft in einem Zylinder fließt, welcher den einen der Drähte umgibt und sich bis zur Mitte des Abstandes zwischen beiden Drähten erstreckt, und bezeichnet man mit  $\varphi$  den Winkel zwischen  $r_1$  und  $d$ , so ist

$$i' = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{R_1}^{d/2} j_z r_1 dr_1 = -\frac{1}{2\pi c^2} \frac{d^2 i}{dt^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{R_1}^{d/2} r_1 dr_1 \lg \frac{r_2}{r_1}$$

oder, da

$$\frac{d^2 i}{dt^2} = -\frac{4\pi^2}{T^2} i,$$

falls  $T$  die Schwingungsdauer der Oszillationen bezeichnet,

$$\frac{i'}{i} = \frac{2\pi}{T^2 c^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{R_1}^{d/2} r_1 \lg \frac{r_2}{r_1} dr_1.$$

Um einen Anhalt über den ungefähren Wert des Integrals zu gewinnen, wollen wir für  $r_2$ , das innerhalb des Integrationsgebietes zwischen  $\frac{d}{2}$  und  $3\frac{d}{2}$  schwankt, den Mittelwert  $d$  setzen. Dann gibt die Ausrechnung des Integrals den Wert:

$$2\pi \left[ \frac{d^2}{8} \left( \frac{1}{2} + \lg 2 \right) - \frac{R_1^2}{2} \left( \lg \frac{d}{R_1} + \frac{1}{2} \right) \right].$$

Nimmt man  $d$  als sehr groß gegen  $R_1$  an, was meist erfüllt ist, so kann man daher näherungsweise schreiben:

$$\frac{i'}{i} = \frac{4\pi^2}{T^2 c^2} d^2 \cdot 0,15 = 6 \frac{d^2}{T^2 c^2}. \quad (89)$$

Wie man hieraus ersieht, kommt es auf das Verhältnis  $d:Tc$  an, ob die Stromstärke  $i'$  in der Luft mit zu berücksichtigen ist oder nicht. — Wir haben oben S. 434 gesehen, daß nach der hier gegebenen Maxwell'schen Theorie ebene elektrische Wellen sich mit der Geschwindigkeit  $c$  in der Luft fortpflanzen müssen. Bei periodischer Wiederholung der Wellen mit der Periode  $T$  hat daher  $Tc$  nach der Formel (1) auf S. 441 die Bedeutung der sogenannten Wellenlänge der Wellen. Ob daher unsere bisherige Annäherung ausreicht oder nicht, wird davon abhängen, ob die Distanz der Schließungsdrähte verschwindet gegenüber der Wellenlänge, mit welcher sich ebene elektrische Wellen gleicher Periode in der Luft fortpflanzen würden, oder nicht.

Für den Feddersenschen Versuch lag  $T$  zwischen  $2,6 \cdot 10^{-6}$  und  $45,4 \cdot 10^{-6}$  sek, die Wellenlänge  $Tc$  daher zwischen  $7,8 \cdot 10^4$  und  $136 \cdot 10^4$  cm, d. h. zwischen 0,78 und 13,6 km. Gegen diese Strecken verschwindet natürlich völlig die gegenseitige Entfernung  $d$  der Schließungsdrähte, da in bedeckten Räumen Entfernungen von mehr als 100 m überhaupt meist nicht zu verwirklichen sind. Deshalb ist auch nach (89) die Stromstärke  $i'$  in der Luft gegen die im Drahte zu vernachlässigen, und wir können also die bisherige Theorie als ausreichend ansehen für die Feddersenschen Versuche.

Da wir aber unten sehen werden, daß Hertz elektrische Schwingungen von der Periode  $T = 2 \cdot 10^{-9}$  sek hergestellt hat, denen also, als ebenen Wellen in Luft verlaufend, eine Wellenlänge von 60 cm zukommt, so verschwindet bei solch schnellen Schwingungen die gegenseitige Entfernung der Teile des Schließungskreises voneinander nicht mehr gegen die Wellenlänge  $Tc$ . Daher würde für diese Schwingungen die bisherige Theorie nicht ausreichend sein.

Jedoch läßt sich leicht angeben, wie man den Ausgangspunkt für eine in jedem Falle strenge Theorie zu wählen hat. Im vorigen Kapitel sind nämlich auf S. 420 die Gleichungen (20) und (21) aufgestellt, denen die elektrische und magnetische Kraft in jedem Isolator zu genügen hat. Stellt man analoge Gleichungen für das Innere der Leiter auf, die aber wegen des Vorhandenseins der sogen. Leitfähigkeit entsprechend abzuändern sind (vgl. VII, 6), so hat man ein System von Differentialgleichungen, welches zur Bestimmung der elektrischen und magnetischen Kraft völlig

ausreichen muß, wenn man noch die Bedingungen an der Grenze zwischen Leiter und Isolator, sowie den zur Zeit  $t = 0$  als gegeben anzusehenden Anfangszustand berücksichtigt. — Zur Berechnung der aus der Theorie fließenden Resultate sind also nur noch mathematische Schwierigkeiten zu überwinden, die sich der Auffindung passender Integrale der Differentialgleichungen entgegenstellen können. Solche Schwierigkeiten sind nun in der Tat meist in bedeutendem Maße vorhanden, indes lassen sie sich gut überwinden, wenn, gerade wie bei der im vorigen Abschnitt behandelten angenäherten Theorie der oszillatorischen Entladung, der galvanische Widerstand der Leitung als verschwindend, d. h. die spezifische Leitfähigkeit  $\sigma$  als unendlich groß angenommen wird. Diese vollständige Theorie soll jedoch erst weiter unten auseinandergesetzt werden, nachdem die Experimente besprochen sind, welche zu einer Vervollständigung der Theorie aus den obengenannten Gründen nötigen.

Zunächst sollen noch zwei andere Punkte der bisherigen Theorie besprochen werden, welche der Vervollständigung bedürfen. Nämlich:

2. ist zur Berechnung der Kapazität des Kondensators oben S. 448 eine Formel angewandt, welche nur aus elektrostatischen Erscheinungen abgeleitet ist. Auch diese Formel wird nur bei langsamen Schwingungen Gültigkeit behalten, denn sie setzt voraus, daß die Kondensatorplatten überall dieselbe Ladungsdichte besitzen, d. h. die Dichtigkeit der Verschiebungsströme überall zwischen den Kondensatorplatten konstant ist. Für schnelle Schwingungen muß jedoch dieselbe wegen der Selbstinduktion nach den Rändern der Kondensatorbelegungen zunehmen, gerade wie auch die Dichtigkeit der Leitungsströme wegen der Selbstinduktion nach ihrer Begrenzung zu wachsen muß. Daher ist die Kapazität eines Kondensators nicht ein Begriff, der völlig unabhängig von der Schnelligkeit der Ladungen und Entladungen ist (selbst wenn man einen Luft- oder Vakuumkondensator hat, in dessen Isolator also irgendwelche Nachwirkungs- oder Leitungserscheinungen völlig fehlen); indes ist eine merkwürdige Aenderung der Kapazität eines Kondensators wiederum erst bei sehr schnellen Schwingungen zu erwarten, deren Häufigkeit die bei der oszillatorischen Entladung von Leidener Flaschen eintretende weit übersteigt. Diese Korrektur soll daher ebenfalls erst weiter unten (IX, 20) besprochen werden.

3. Aber ein dritter Punkt erscheint auch für die bisher betrachteten langsamen Entladungen Feddersens noch näherer Prüfung wert. Es wurde nämlich vorausgesetzt (vgl. oben S. 448), daß die Stromstärke im ganzen Schließungsdrahte, d. h. längs seiner ganzen Länge, dieselbe sei, was dasselbe bedeutet, als wenn wir sagen: es sollen die elektrischen Stromlinien nur aus den Kondensatorflächen austreten, dagegen nicht aus den Seitenflächen des Schließungsdrahtes. Da wir elektrische Strom-

linien, welche in einen Leiter aus- oder eintreten, als mit der Zeit abnehmende oder wachsende elektrische Ladungen des Leiters auffassen können (vgl. VII, 6, S. 425), so ist also die bisherige Voraussetzung die, daß elektrische Ladungen nur auf dem Kondensator, dagegen nicht auf dem Schließungsdraht vorhanden sein sollen. In dieser Fassung erkennt man, daß diese Voraussetzung um so eher erfüllt sein wird, je größer die Kapazität des Kondensators im Vergleich zu der des Schließungskreises ist. Die Voraussetzung wird also gelten bei der Entladung eines Kondensators von großer Kapazität durch einen dünnen und nicht zu langen Schließungsdraht. Da dieser aber bei den Feddersenschen Versuchen zum Teil eine Länge von 1,34 km besaß, so erscheint es als möglich, daß hier obige Voraussetzung nicht mehr genügend erfüllt ist.

Die Kapazität eines geraden Kreiszylinders der Länge  $l$  ist nun leicht zu berechnen. Für Punkte außerhalb desselben ist nämlich

$$\Delta V = 0,$$

falls  $V$  das Potential seiner Ladung bezeichnet. Ist  $l$  so groß gegen den Radius  $R$  des Zylinders, daß das Potential  $V$  der Ladung nur von  $r$ , der senkrechten Entfernung von der Zylinderachse, abhängig ist, so geht nach S. 244, Formel (33) obige Differentialgleichung über in

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dV}{dr} \right) = 0,$$

deren allgemeines Integral ist:

$$V = A \lg r + B.$$

Die Konstante  $A$  bestimmt sich durch Anwendung der Beziehung zwischen Kraftfluß und Elektrizitätsmenge (siehe S. 34). Ist nämlich  $e$  die auf der Längeneinheit des Zylinders befindliche Elektrizitätsmenge (sie sei nach elektrostatischem Maße gemessen, gerade wie auch der Potentialwert  $V$ ), so ist nach jenem Satze:

$$2\pi r \frac{dV}{dr} = -4\pi e,$$

d. h.

$$V = -2e \lg r + B.$$

Befindet sich dem Zylinder gegenüber in der Entfernung  $d$  ein paralleler Zylinder, welcher entgegengesetzt geladen ist, und ist  $d$  groß gegen  $R$ , so ist daher

$$V = -2e \lg \frac{r_1}{r_2},$$

falls  $r_1$  die Entfernung des Aufpunktes  $P$  von der Achse des ersten (mit  $+e$  geladenen) Zylinders bezeichnet,  $r_2$  die Entfernung zwischen  $P$  und

Begleiterscheinung hochfrequenter Wechselströme als Hauteffekt (englisch „skin effect“).

Die beschriebene Art der Stromverteilung hat zur Folge, daß ein Draht für einen Strom von sehr hoher Wechselzahl einen viel größeren galvanischen Widerstand besitzen muß als für einen konstanten Strom, da in ersterem Falle sich der Strom nur auf eine dünne Oberflächenschicht verteilt, während er im letzteren Falle den Querschnitt gleichförmig erfüllt. Es möge ausdrücklich dazu bemerkt werden, daß diese Widerstandserhöhung eine wirkliche ist, nicht eine scheinbare, wie wir sie oben in Abschnitt 13 als sogenannte Impedanz kennen gelernt haben. Denn dieser scheinbare Widerstand ist nach (76) als Verhältnis der Amplitude der elektromotorischen Kraft zur Stromamplitude definiert; die Wärmeentwicklung im Stromkreis aber ist nach (80) durch das Produkt des zeitlichen Mittelwertes des Quadrats der Stromstärke mit dem Gleichstromwiderstand  $w$  und nicht mit dem scheinbaren Widerstand bestimmt. Dieser Berechnung liegt natürlich die Vorstellung zugrunde, daß der Strom gleichmäßig über den Querschnitt des Leitungsdrahtes verteilt ist. Im vorliegenden Falle ist nun diese Voraussetzung nicht mehr erfüllt; dann muß entsprechend den Ausführungen des Abschnittes 10 die Stromwärme größer sein als bei gleichmäßig verteilter Stromdichte. Diese Erhöhung der Stromwärme aber ist gleichbedeutend mit einer tatsächlichen Erhöhung des Widerstandes. Man kann denjenigen Widerstand berechnen, der für den gleichen Strom unter der Annahme einer gleichmäßigen Verteilung dieselbe Stromwärme erzeugen würde. Man findet ihn, indem man den zeitlichen Mittelwert der erzeugten Stromwärme durch den zeitlichen Mittelwert des Quadrats des Gesamtstromes dividiert:

$$w' = \frac{\frac{1}{T} \int Q \, dt}{\frac{1}{T} \int i^2 \, dt}.$$

Den so definierten Widerstand bezeichnet man als den effektiven Widerstand des Leiters. Zur Berechnung dieser Verhältnisse setzt man zweckmäßig den stromführenden Körper in der Form eines langen, geraden Kreiszyinders voraus, so daß die Stromdichte  $j$  nur eine Funktion von  $t$  und der senkrechten Entfernung  $r$  von der Achse des Zylinders ist. Da in diesem Falle nach der Gleichung (33) des III. Kapitels auf S. 244 die Operation  $\Delta$  identisch ist mit  $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right)$ , so ist nach den Gleichungen (93) in diesem Abschnitt:

$$\frac{\partial j}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\mu\sigma r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial j}{\partial r} \right) = \frac{1}{4\pi\mu\sigma} \left( \frac{\partial^2 j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial j}{\partial r} \right). \quad (95)$$

Diese Differentialgleichung kann mit Hilfe sogenannter Besselscher Funktionen integriert werden; man vergleiche hierüber Maxwell, Lehrbuch, 2. Bd., S. 393; E. Cohn, Das elektromagnetische Feld, S. 357; Lord Rayleigh, Phil. Mag. (5) 21, S. 381, 1886, und J. Stefan, Wied. Ann. 41, S. 400, 1890. Von diesen Arbeiten soll hier nur das Resultat Stefans erwähnt werden, daß bei sehr hohen Wechselzahlen der Widerstand  $w'$  des Drahtes für einen Strom, dessen Schwingungsperiode  $T$  Sekunden betrage, den Wert hat

$$w' = w \left( \pi R \sqrt{\frac{\mu \sigma}{T}} + \frac{1}{4} \right), \quad (96)$$

wobei  $w$  den Widerstand des Drahtes für einen konstanten Strom bezeichnet,  $R$  den Radius, d. h. die halbe Dicke des Drahtes. Die Stefanische Formel (96) geht für sehr schnell wechselnde Ströme, d. h. für sehr kleine Werte von  $T$ , über in die von Lord Rayleigh angegebene Formel:

$$w' = w \pi R \sqrt{\frac{\mu \sigma}{T}}. \quad (97)$$

Die verhältnismäßige Widerstandserhöhung  $w':w$  für einen Wechselstrom ist also proportional zu  $\sqrt{\sigma}$ , d. h. um so größer, je größer die Leitfähigkeit  $\sigma$  des Drahtes ist; der absolute Wert  $w'$  selber für den Widerstand ist aber allemal um so kleiner, je größer  $\sigma$  ist, da  $w$  umgekehrt proportional zu  $\sigma$  ist.

Nach den auf S. 386 im vorigen Abschnitt angestellten Ueberlegungen muß die Selbstinduktion eines Drahtes durch die ungleichförmige Stromverteilung für einen Strom von hoher Wechselzahl kleiner sein als für einen Strom von kleiner Wechselzahl. Denn die ungleichförmige Stromverteilung sucht die magnetische Energie möglichst klein zu machen. Diese Verkleinerung der Selbstinduktion ist aber bei einem massiven geraden Drahte, welcher dünn im Vergleich zu seiner Länge ist, nicht erheblich.

Die Formeln (96) und (97) gelten für einen geraden Draht. Wird der Draht zu einer Spule aufgewunden, bei der das magnetische Feld jetzt nicht mehr symmetrisch um den Draht herum, sondern auf seiner einen Seite, nämlich im Innenraum der Spule, liegt, so tritt eine andere Verteilung des Stromes über den Drahtquerschnitt ein. Denn die Kraftlinien des magnetischen Feldes schneiden hier den Draht senkrecht zu seiner Längsrichtung und das magnetische Feld ist stark auf der nach dem Innenraum der Spule gelegenen Seite des Drahtes und nimmt, wenn man durch den Drahtquerschnitt hindurchgeht, nach außen hin stark ab. Infolgedessen treten bei den durch Stromschwankungen erzeugten Schwankungen dieses Feldes in der Drahtmasse Wirbelströme



auf, die so verlaufen, daß sie den Strom auf der Innenseite verstärken, auf der Außenseite schwächen. Der Strom kondensiert sich daher im Drahte nach der Innenseite der Spule hin. Auch aus dem im vorigen Abschnitt abgeleiteten allgemeinen Satze läßt sich die Notwendigkeit dieser Verteilung der Stromdichtigkeit einsehen. Denn für einen gegebenen Gesamtstrom ist die magnetische Energie im Hohlraum der Spule eine gegebene Größe. Die Energie des ganzen Feldes aber enthält noch die Energie des Anteils des Feldes, der auf den von der Drahtmasse ausgefüllten Raum entfällt. Dieser Teil aber wird um so kleiner, je mehr sich der Strom, anstatt sich gleichmäßig über den Querschnitt zu verteilen, nach der Innenwand der Spule hin kondensiert. Die genauere Berechnung des Problems ist von M. Wien<sup>1)</sup>, A. Sommerfeld<sup>2)</sup> und G. Picciati<sup>3)</sup> durchgeführt worden. In erster Annäherung ergibt sich nach Sommerfeld für den Widerstand einer Spule, die aus einer Lage Draht vom Radius  $R$  gewickelt ist, eine mit der Rayleighschen Formel für den geraden Draht bis auf einen Zahlenfaktor übereinstimmende Formel.

## 16. Transformator.

Wir kehren zurück zur Betrachtung langsamerer Veränderungen und behandeln das Problem zweier Stromkreise von den Widerständen  $w_1$  und  $w_2$ , den Selbstinduktionskoeffizienten  $L_{11}$  und  $L_{22}$  und dem gegenseitigen Induktionskoeffizienten  $L_{12}$ . Verläuft in dem Stromkreis 1 ein Wechselstrom  $i_1$ , der von einer elektromotorischen Kraft

$$E = E_0 \sin \nu t$$

hervorgerufen wird ( $\nu = \frac{2\pi}{T}$ , wenn  $T$  die Periode des Wechselstroms

bedeutet), so wird in dem Stromkreis 2, in dem sonst keine elektromotorischen Kräfte wirksam sein sollen, ein Wechselstrom  $i_2$  von offenbar gleicher Periode induziert. Berücksichtigt man die durch eigene und wechselseitige Induktion in jedem Stromkreis wirkenden elektromotorischen Kräfte, so erhält man als Ausdruck des Ohmschen Gesetzes für die beiden Stromkreise die beiden simultanen Differentialgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} i_1 w_1 + L_{11} \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt} &= E_0 \sin \nu t \\ i_2 w_2 + L_{22} \frac{di_2}{dt} + L_{12} \frac{di_1}{dt} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (98)$$

Wir verfahren wie in Abschnitt 13, setzen wieder an Stelle der Kreisfunktion den komplexen Ausdruck  $E_0 e^{i\nu t}$  und beschränken uns

<sup>1)</sup> M. Wien, Ann. d. Phys. 14, S. 12, 1904.

<sup>2)</sup> A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. 15, S. 673, 1904; 21, S. 609, 1907.

<sup>3)</sup> G. Picciati, Nuovo Cimento 11, S. 351, 1907.

wieder auf die Betrachtung desjenigen Zustandes, der eintritt, nachdem eine hinreichend lange Zeit seit dem Anlegen der Wechselspannung an den Stromkreis 1 verflossen ist. Dann muß in jedem Stromkreis ein Wechselstrom von derselben Periode fließen, die die Spannung hat. Man kann also schreiben:

$$i_1 = J_1 e^{i\nu t} \quad \text{und} \quad i_2 = J_2 e^{i\nu t} \quad (99)$$

und erhält für die komplexen Größen  $J_1$  und  $J_2$  die beiden Bestimmungsgleichungen:

$$\begin{aligned} w_1 J_1 + i\nu L_{11} J_1 + i\nu L_{12} J_2 &= E_0, \\ w_2 J_2 + i\nu L_{22} J_2 + i\nu L_{12} J_1 &= 0. \end{aligned}$$

Bezeichnet man mit  $a_1$  und  $a_2$  die Widerstandsoperatoren der beiden Kreise:

$$a_1 = w_1 + i\nu L_{11}, \quad a_2 = w_2 + i\nu L_{22}, \quad (100)$$

und setzt man

$$b = i\nu L_{12}, \quad (101)$$

so hat man die einfachen Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_1 J_1 + b J_2 &= E_0, \\ b J_1 + a_2 J_2 &= 0, \end{aligned} \quad (102)$$

aus denen folgt:

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= E_0 \frac{a_2}{a_1 a_2 - b^2} = \frac{E_0}{a_1 - b^2/a_2} \\ J_2 &= -E_0 \frac{b}{a_1 a_2 - b^2} = -\frac{b}{a_2} \frac{E_0}{a_1 - b^2/a_2} \end{aligned} \right\} \quad (103)$$

Setzen wir ferner wieder:

$$J_1 = i_0' e^{-i\delta_1} \quad \text{und} \quad J_2 = i_0'' e^{-i\delta_2},$$

so erhält man zunächst die Beziehung:

$$\frac{i_0''}{i_0'} e^{-i(\delta_2 - \delta_1)} = -\frac{b}{a_2} = -\frac{i\nu L_{12}}{w_2 + i\nu L_{22}}.$$

Daraus ergeben sich die beiden reellen Gleichungen:

$$\frac{i_0''}{i_0'} = \frac{\nu L_{12}}{\sqrt{w_2^2 + \nu^2 L_{22}^2}} \quad (104)$$

und

$$\operatorname{tg}(\delta_2 - \delta_1) = -\frac{w_2}{\nu L_{22}}. \quad (105)$$

Die erste dieser Gleichungen stellt das Verhältnis der sekundären zur primären Stromstärke dar, die zweite bestimmt die Phasendifferenz zwischen diesen beiden Strömen. Will man die einzelnen Stromstärken und ihre Phasendifferenzen gegen die Spannung darstellen, so empfiehlt es sich, für den Ausdruck (104) einen abkürzenden Buchstaben einzuführen. Wir setzen:

$$p = \frac{\nu L_{12}}{\sqrt{w_2^2 + \nu^2 L_{22}^2}}. \quad (106)$$

Dann ist

$$\frac{b^2}{a_2} = -p^2 (w_2 - \nu L_{22})$$

und aus (103) folgt:

$$J_1 = \frac{E_0}{w_1 + p^2 w_2 + \nu (L_{11} - p^2 L_{22})}. \quad (107)$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem Ausdruck (74) für einen einzelnen Stromkreis, so ersieht man, daß die Anwesenheit des zweiten Stromkreises den Stromverlauf im ersten Stromkreise in doppelter Weise beeinflusst; der Widerstand des primären Kreises erscheint vermehrt um  $p^2 w_2$  und seine Selbstinduktion verkleinert um  $p^2 L_{22}$ . Bezeichnet man die so geänderten Werte mit  $W$  und  $L$ , also

$$W = w_1 + p^2 w_2 \quad \text{und} \quad L = L_{11} - p^2 L_{22}, \quad (108)$$

so läßt sich  $J_1$  wieder in der Form (74) schreiben:

$$J_1 = \frac{E_0}{W + \nu L}$$

und es ist entsprechend (76) und (77)

$$i_0' = \frac{E_0}{\sqrt{W^2 + \nu^2 L^2}}, \quad (109)$$

$$\operatorname{tg} \delta_1 = \frac{\nu L}{W}. \quad (110)$$

Ist  $w_2$  unendlich groß, d. h. ist der sekundäre Kreis offen, so ist natürlich  $i_0''$  gleich Null und für den primären Kreis reduzieren sich die Gleichungen auf diejenigen des Abschnitts 13 für einen einzigen Stromkreis. In diesem Fall ist

$$\operatorname{tg} \delta_1 = \frac{\nu L_{11}}{w_1}$$

und  $\delta_1$  ist, wenn  $\nu L_{11}$  groß ist gegen  $w$ , nahezu gleich  $\frac{\pi}{2}$  und  $i_0'$  nach Gleichung (79) nahezu gleich Null. Wird der Widerstand des sekundären Kreises allmählich verringert, so nimmt  $L$  ab und  $W$  zu; die Phasendifferenz  $\delta_1$  des primären Stromes gegen die Spannung wird daher kleiner und die Stromstärke  $i_0'$  wird größer. Schiebt man über eine von einem Wechselstrom durchflossene Spule von großer Impedanz einen geschlossenen Zylinder von gut leitendem Metall, so erscheint die Impedanz vermindert und die Stromstärke steigt.

Die Phasendifferenz zwischen dem sekundären und dem primären Strom ist für großes  $w_2$  nach (105) etwas größer als  $\frac{\pi}{2}$ , wächst mit

abnehmendem Widerstand des Sekundärkreises und nähert sich der Grenze  $\pi$ , wenn  $w_2$  sehr klein wird gegen  $v L_{22}$ . In diesem Grenzfalle fließt der sekundäre Strom in jedem Augenblick entgegengerichtet dem primären.

Auf dieser Ueberlegung beruht die Erklärung der eigentümlichen Abstoßungserscheinungen, die zuerst von Elihu Thomson beobachtet worden sind, als er einen massiven Ring aus gut leitendem Metall über eine von einem Wechselstrom durchflossene Spule mit lamelliertem Eisenkerne schob. Da die beiden Ströme während des größten Teiles der Periode einander entgegengerichtet sind, so bestehen ihre elektrodynamischen Wirkungen aufeinander in jedem Augenblicke in abstoßenden Kräften, die sich für den größten Teil der Periode summieren. Ein Aluminiumring wird daher von der Spule kräftig in die Höhe geschleudert.

In Abschnitt 11 des V. Kapitels wurden die Beziehungen zweier einander induzierender Kreise durch den Koppelungsfaktor  $k$  ausgedrückt nach Gleichung (45') daselbst:

$$L_{12} = k \sqrt{L_{11} L_{22}}.$$

Führt man diese Bezeichnungsweise in die vorstehenden Formeln ein, so lassen sich die Größen  $W$  und  $L$  folgendermaßen ausdrücken:

$$W = w_1 \frac{w_2^2 + v^2 L_{22}^2 \left(1 + k^2 \frac{w_2}{w_1} \cdot \frac{L_{11}}{L_{22}}\right)}{w_2^2 + v^2 L_{22}^2} \quad (111)$$

$$L = L_{11} \frac{w_2^2 + v^2 L_{22}^2 (1 - k^2)}{w_2^2 + v^2 L_{22}^2}.$$

Ist  $k = 0$ , d. h. wirken die beiden Spulen gar nicht aufeinander, so reduzieren sich die Ausdrücke für  $W$  und  $L$  auf  $w_1$  und  $L_{11}$ , wie es dem einfachen Kreise entspricht. Mit wachsendem  $k$  wird  $L$  kleiner und  $W$  größer. Im Grenzfalle der engsten Koppelung ( $k = 1$ ) wird

$$W = w_1 \frac{w_2^2 + v^2 \frac{L_{22}}{w_1} (w_1 L_{22} + w_2 L_{11})}{w_2^2 + v^2 L_{22}^2} \quad (112)$$

$$L = L_{11} \frac{w_2^2}{w_2^2 + v^2 L_{22}^2}.$$

Dieser Grenzfalle ist nahe verwirklicht im technischen Transformator, bei dem die beiden Spulen auf denselben in sich geschlossenen Eisenring gewickelt sind. Wir wollen annehmen, daß die Widerstände der beiden Spulen klein seien gegen die Produkte  $v L_{11}$  bzw.  $v L_{22}$ ; während aber die primäre Spule direkt an der wirksamen Wechselspannung liegen soll, mögen die sekundären Spulen durch einen induktionsfreien

Widerstand  $w_2$  (z. B. Glühlampen) geschlossen sein. Setzen wir also  $w_1$  gleich Null, so wird

$$W = \frac{\nu^2 w_2 L_{11} L_{22}}{w_2^2 + \nu^2 L_{22}^2},$$

während  $L$  unverändert bleibt. Eingesetzt in (109) und (104) ergeben diese Werte für den primären und den sekundären Strom:

$$i_0' = \frac{E_0}{w_2} \frac{\sqrt{w_2^2 + \nu^2 L_{22}^2}}{\nu L_{11}}, \quad (113)$$

$$i_0'' = \frac{E_0}{w_2} \sqrt{\frac{L_{22}}{L_{11}}}. \quad (114)$$

Berücksichtigen wir, daß nach (46) in Abschnitt 11 des V. Kapitels

$$\frac{L_{22}}{L_{11}} = \frac{n_2^2}{n_1^2}$$

ist, wo  $n_1$  und  $n_2$  die Windungszahlen der beiden Spulen sind, so erhalten wir für die sekundäre Stromstärke im Nutzstromkreis:

$$i_0'' = \frac{n_2}{n_1} \frac{E_0}{w_2}. \quad (115)$$

Würde die Wechselspannung  $E_0$  direkt an den Nutzstromkreis gelegt, so würde in diesem ein Wechselstrom von der Amplitude  $E_0/w_2$  fließen. Durch die Zwischenschaltung des Transformators entsteht ein Wechselstrom, dessen Amplitude um den Faktor  $\frac{n_2}{n_1}$  vergrößert ist. Er kann angesehen werden als herrührend von der transformierten Spannung  $E_2$ , die zur gegebenen Spannung im Verhältnis der Windungszahlen der sekundären zur primären Spule steht. Dieses Verhältnis der Windungszahlen nennt man daher das Umsetzungsverhältnis des Transformators.

Die von der Wechselstromquelle gelieferte Energie ist entsprechend der Gleichung (80) durch

$$A = \frac{1}{2} E_0 i_0' \cos \delta_1$$

gegeben. Unter Bezugnahme auf (110) und (109) läßt sich diese Gleichung umformen in die Gleichung:

$$A = \frac{1}{2} i_0'^2 W$$

und unter Benutzung von (108), (106) und (104) in

$$A = \frac{1}{2} i_0'^2 w_1 + \frac{1}{2} i_0''^2 w_2. \quad (116)$$

Ist  $w_1$  zu vernachlässigen, so ist der erste Summand gleich Null und die ganze gelieferte Energie geht auf den Nutzstromkreis über, wo sie

im Widerstand  $w_2$  in Stromwärme verwandelt wird. Der Nutzeffekt des Transformators würde unter der gemachten Annahme gleich 100 Prozent sein. In der Wirklichkeit sind die Widerstände der Transformatorspulen nicht Null; sie bedingen also einen gewissen Energieverlust durch Wärmeentwicklung innerhalb des Transformators. Außerdem ist  $k$  nicht streng gleich 1; ferner verlangt die Ummagnetisierung des Eisens einen gewissen Energieaufwand, der ebenfalls als Wärme — Hysteresiswärme — im Eisen auftritt, und endlich werden trotz der Lamellierung des Eisenkernes Wirbelströme und dadurch verursachte Erwärmung im Eisen nicht ganz zu vermeiden sein. Alle diese Umstände setzen den Nutzeffekt des Transformators herab.

## 17. Kapazität im Wechselstromkreis.

Die Pole einer Wechselstrommaschine sollen durch induktionsfreie Widerstände mit den beiden Belegen eines Kondensators verbunden sein. Es sei  $w$  der Gesamtwiderstand der Leitung zwischen den Belegen,  $C$  die Kapazität des Kondensators. Ist der Kondensator zunächst ungeladen, so muß infolge der Potentialdifferenz zwischen seinen Belegen und den Polen der Maschine in den einen Beleg positive Elektrizität einströmen, in den anderen negative Elektrizität, oder positive von diesem fortströmen. Der Kondensator wird dadurch geladen. Zur Zeit  $t$  sei die Potentialdifferenz seiner Belege  $V$ . Die treibende elektromotorische Kraft in der Leitung ist dann die Differenz der Wechselstromspannung und der Kondensatorspannung, und nach dem Ohmschen Gesetz gilt für die Strömung der Elektrizität in dem Leiter die Formel:

$$i w = E_0 \sin \nu t - V. \quad (117)$$

Ist  $e$  die positive Ladung, die die eine Seite des Kondensators zur Zeit  $t$  enthält, so ist

$$e = C V$$

und andererseits

$$i = \frac{de}{dt} = C \frac{dV}{dt},$$

wenn man den Strom positiv rechnet, der jener Seite des Kondensators die positive Ladung zuführt. Durch Differentiation geht dann (117) über in

$$w \frac{di}{dt} = \nu E_0 \cos \nu t - \frac{i}{C}.$$

Bedient man sich wieder wie in Abschnitt 13 der komplexen Darstellung, so lautet die Gleichung:

$$\frac{i}{C} + w \frac{di}{dt} = v E_0 e^{i v t}. \quad (118)$$

Nach genügend langer Zeit ist auch hier der Vorgang wieder rein periodisch von der Periode der angelegten Wechselspannung. Man kann ansetzen:

$$i = J e^{i v t}$$

und erhält für die komplexe Stromamplitude den Ausdruck:

$$J = \frac{E_0}{w - \frac{i}{v C}}. \quad (119)$$

Der Widerstandsoperator hat in diesem Falle die Form:

$$a = w - \frac{i}{v C}. \quad (120)$$

Um die reellen Größen zu finden, setze man

$$J = i_0 e^{i \delta}$$

und man erhält

$$i_0 = \frac{E_0}{\sqrt{w^2 + \frac{1}{v^2 C^2}}}, \quad (121)$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{1}{v C w} \quad (122)$$

und endlich

$$i = i_0 \sin (v t + \delta) \quad (123)$$

und für die Potentialdifferenz des Kondensators:

$$V = \frac{i_0}{v C} \sin \left( v t + \delta - \frac{\pi}{2} \right) = E_0 \sin \delta \sin \left( v t + \delta - \frac{\pi}{2} \right). \quad (124)$$

Während in dem Fall des Abschnitts 13 der Strom hinter der Spannung hindereinhinkte, weil die Selbstinduktion der Spannung entgegenarbeitete, eilt hier der Strom der Spannung um  $\delta$  voraus. Ist  $w$  sehr klein, so erreicht  $\delta$  nahezu den Wert  $\frac{\pi}{2}$  und  $i_0$  den Wert  $v C E_0$ .

Der Kondensator besitzt dann in jedem Augenblick die volle Spannung des Wechselstroms; der Strom, der ihn auflädt, hat sein Maximum in dem Augenblick, in dem die Kondensatorspannung gleich Null ist, und wird zu Null in dem Augenblick, in dem der Kondensator sich auf das Maximum der Spannung aufgeladen hat. Je größer  $w$  wird, um so kleiner wird  $\delta$ ,  $i_0$  und  $V$ . Bei gegebenem  $w$  aber wird  $\delta$  um so kleiner, je größer  $v$  und  $C$  sind; gleichzeitig nimmt  $V$  ab,  $i_0$  aber zu.

Enthalten die Zuleitungen zu dem Kondensator noch eine Selbstinduktion, so addiert sich zu den wirkenden elektromotorischen Kräften

in (117) noch diejenige der Selbstinduktion. Die Stromgleichung (118) lautet dann:

$$w \frac{di}{dt} + L \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{i}{C} = \iota \nu E_0 e^{\iota \nu t}. \quad (125)$$

Man erhält für die komplexe Stromamplitude

$$J = \frac{E_0}{w + \iota \left( \nu L - \frac{1}{\nu C} \right)},$$

und der Widerstandsoperator hat in diesem allgemeinsten Falle den Wert

$$a = w + \iota \left( \nu L - \frac{1}{\nu C} \right). \quad (126)$$

Man ersieht daraus, daß durch passende Wahl von Selbstinduktion und Kapazität der Widerstandsoperator sich auf den Ohmschen Widerstand  $w$  reduzieren kann; dies ist der Fall, wenn

$$\nu L = \frac{1}{\nu C}$$

ist, oder wenn  $L$  und  $C$  so gewählt sind, daß

$$L C = \frac{1}{\nu^2} = \frac{T^2}{4\pi^2}. \quad (127)$$

## 18. Das quasistationäre Verhalten in den behandelten Wechselstromproblemen.

Der in den letzten Abschnitten durchgeführten Behandlung der Wechselstromprobleme liegt die Vorstellung zugrunde, daß die Stromstärke in der ganzen Ausdehnung eines unverzweigten Leiterteiles in jedem Augenblicke stets denselben Wert habe. Wir werden im VIII. Kapitel bei der Behandlung der elektrischen Schwingungen Fälle kennen lernen, in denen diese Bedingung nicht mehr erfüllt ist. Wenn in einem solchen Fall die Stromstärke in einer bestimmten Richtung eines Leiters z. B. abnimmt, so rührt dies daher, daß die in dieser Richtung strömende Elektrizität sich auf der Oberfläche des Leiters zum Teil ansammelt. Der Leiter wirkt also dabei als Kapazität, auf der ein Anstauen der zuströmenden Ladungen stattfindet. Wir werden sehen, daß solche Fälle bei sehr hohen Wechselzahlen eintreten können. In allen hier behandelten Fällen sollen die Wechselzahlen kleiner sein, so daß in jedem unverzweigten Leiter in jedem Augenblicke die Stromstärke in seiner ganzen Erstreckung die gleiche sein soll. Ansammlungen der Elektrizität sollen nicht auf den durchströmten Leitern, sondern nur auf den an die stromführenden Leiter angehängten, besonders in Rechnung zu stellenden Kapazitäten statt-



finden. In diesen aber sollen andererseits die Strömungen der Elektrizität, die ja naturgemäß mit der Ausbreitung der elektrischen Ladungen auf der Kapazität, z. B. auf den Kondensatorplatten verbunden sein müssen, vernachlässigt werden. Die Verteilung der Ladungen auf der Kapazität soll also in jedem Augenblicke so sein wie im statischen Zustande, und die Verteilung der Stromstärke längs der Leiter soll in jedem Augenblicke so sein wie bei stationären Strömen. Man bezeichnet diese Wechselströme, deren Periodendauer groß genug ist, um die genannten Bedingungen als erfüllt ansehen zu können, als quasistationäre. Wie diese Bedingungen von den Dimensionen des Leiternetzes abhängen, werden die Betrachtungen in Kapitel VIII erkennen lassen.

Unter der Voraussetzung quasistationären Verhaltens lassen sich auch auf die Verteilung von Wechselströmen in verzweigten Netzen mit Hilfe des Widerstandsoperators die Gesetzmäßigkeiten übertragen, die wir in Abschnitt 9 für einen Gleichstrom kennen gelernt haben. Ist eine Wechselspannung ( $E_0 e^{i\omega t}$ ) in einem System beliebig verzweigter Leiter wirksam, in dessen Zweigen Kapazitäten und Selbstinduktionen in gegebener Verteilung enthalten sind, so erzeugt sie nach hinreichend langer Zeit in allen Zweigen Wechselströme der gleichen Periodendauer von bestimmter Stromamplitude und bestimmten Phasendifferenzen gegeneinander. Sie lassen sich also für jeden Zweig durch  $J e^{i\omega t}$  darstellen. Da Ansammlungen der Elektrizität bei der vorausgesetzten Wechselzahl auf den Leitern nicht stattfinden, so muß der erste Kirchhoffsche Satz (siehe Abschnitt 9) auch hier für jeden Verzweigungspunkt gelten; daraus folgt

$$\sum J = 0 \quad (128)$$

für jeden Verzweigungspunkt. Entsprechend gilt auch in jedem Augenblicke für einen geschlossenen Zug des Leitungsnetzes der zweite Kirchhoffsche Satz, wenn man an dem im Augenblicke wirkenden Betrag der Wechselspannung innerhalb dieses Umlaufes die aus der Selbstinduktion und den Ladungen der Kapazitäten der in Betracht kommenden Zweige sich ergebenden Gegenspannungen in Abzug bringt:

$$\sum i w = \sum \left( E_0 e^{i\omega t} - L \frac{di}{dt} - \frac{e}{C} \right)$$

für jeden geschlossenen Umlauf. Durch Differentiation nach  $t$  und Einsetzung von  $J e^{i\omega t}$  für  $i$  geht diese Gleichung in die Form über:

$$\sum a J = \sum E_0 \quad (129)$$

und für einen Umlauf, in dem keine Wechselstromquelle enthalten ist:

$$\sum a J = 0. \quad (130)$$

Dabei sind  $a$  und  $J$  komplexe Größen. Die Kirchhoffschen Gleichungen in dieser Form geben daher doppelt so viel Bestimmungsgleichungen

wie im Falle des Gleichstroms, entsprechend dem Umstande, daß für jeden Zweig zwei zu bestimmende Größen vorhanden sind: Amplitude des Wechselstroms und Phase.

## 19. Messungen in der Brücke mit Gleichstrom und mit Wechselstrom.

Die Anwendung der Sätze des vorigen Abschnitts möge an demjenigen verzweigten System erläutert werden, das unter dem Namen der Wheatstoneschen Brücken-Anordnung bekannt ist. Sie besteht aus vier Widerständen, die zu einem geschlossenen Umlauf vereinigt sind.

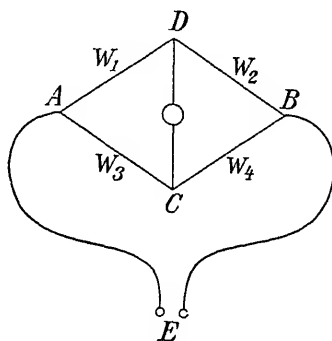


Fig. 49.

An zwei entgegengesetzten Vereinigungspunkten (A und B) wird der Strom eines an die Punkte E angeschlossenen Elementes eingeleitet (siehe Fig. 49). Zwischen die beiden anderen Vereinigungspunkte (C und D) wird ein Galvanometer gelegt. Die Widerstände können so abgeglichen werden, daß das Galvanometer in der Brücke CD keinen Ausschlag anzeigt. Die Anwendung der Kirchhoffschen Sätze auf die Umläufe A D C und B C D ergibt für den Fall, daß der Strom in der Brücke Null ist, sofort die Beziehung

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{w_3}{w_4}. \quad (131)$$

Die Abgleichung der Widerstände läßt sich am bequemsten ausführen, indem man zwischen A und B als Widerstand  $w_3 + w_4$  einen geraden Meßdraht ausspannt und den Vereinigungspunkt C als Schleifkontakt auf diesem Draht verschiebbar macht. An Stelle des Widerstandsverhältnisses  $w_3/w_4$  tritt dann das Verhältnis der beiden Drahtabschnitte A C/B C oder  $s/(1 - s)$ , wenn s den Abschnitt A C und l die ganze Drahtlänge bedeutet.

Die Methode erfährt eine außerordentliche Erweiterung ihrer An-

wendungsmöglichkeit, wenn man das Element durch eine Wechselstromquelle, das Galvanometer durch ein auf Wechselströme ansprechendes Instrument (Elektrodynamometer, Telephon, optisches Telephon von M. Wien, Vibrationsgalvanometer von Rubens) ersetzt. Die Bedingung dafür, daß kein Wechselstrom in der Brücke fließt, läßt sich dann durch dieselbe Gleichung wie oben ausdrücken; nur treten an die Stelle der Ohmschen Widerstände die Widerstandsoperatoren. Bedient man sich des geraden Meßdrahtes, der für die bei solchen Messungen gewöhnlich benutzten Frequenzen als kapazitäts- und selbstinduktionsfrei anzusehen ist, so reduzieren sich die Widerstandsoperatoren für die Zweige 3 und 4 auf die Ohmschen Widerstände, ihr Verhältnis also wieder auf das Längenverhältnis  $s/(1-s)$ , das mit  $q$  bezeichnet werden möge. Die Zweige 1 und 2 aber mögen im allgemeinsten Fall Widerstand, Selbstinduktion und Kapazität enthalten. Dann gilt für den Strom Null in der Brücke die Bedingung:

$$\frac{a_1}{a_2} = q \quad \text{oder} \quad \frac{w_1 + i \left( \nu L_1 - \frac{1}{\nu C_1} \right)}{w_2 + i \left( \nu L_2 - \frac{1}{\nu C_2} \right)} = q. \quad (132)$$

Diese Gleichung aber zerfällt in die beiden reellen Gleichungen:

$$\frac{w_1}{w_2} = q \quad \text{und} \quad \frac{\nu L_1 - \frac{1}{\nu C_1}}{\nu L_2 - \frac{1}{\nu C_2}} = q. \quad (133)$$

Die Methode kann für folgende Fälle benutzt werden:

1. Die Zweige 1 und 2 enthalten nur Ohmschen Widerstand; dann ist die Methode ganz gleichwertig der Messung mit Gleichstrom.

2. Die Zweige enthalten Kapazitäten, z. B. je einen Kondensator; die Zuleitungen sollen von verschwindend kleinem Widerstande und frei von Selbstinduktion sein. Dann liefert die zweite Gleichung (133) die Beziehung:

$$\frac{C_2}{C_1} = q$$

und die Methode dient zum bequemen Vergleich von Kapazitäten.

3. Die Zweige enthalten die Selbstinduktionen  $L_1$  und  $L_2$ , die zugleich Widerstände  $w_1$  und  $w_2$  darstellen. Dann ist vollkommene Stromlosigkeit in der Brücke nur zu erreichen, wenn nicht bloß  $\frac{L_1}{L_2} = q$ , sondern auch  $\frac{w_1}{w_2} = q$  ist. Beide Bedingungen werden natürlich durch die Selbstinduktionsrollen mit den ihnen zukommenden Widerständen nicht ohne

weiteres erfüllt sein. Man muß dann in den Zweig mit dem kleineren Widerstand noch einen induktionsfreien variablen Widerstand hinzufügen, um die Widerstandsabgleichung auf dasselbe Verhältnis, wie es die Selbstinduktionen besitzen, durchführen zu können. In dieser Form dient die Methode dann zum Vergleich von Selbstinduktionen.

4. Für die Bestimmung des Widerstandes von Elektrolyten bevorzugt man die Verwendung von Wechselströmen wegen der zersetzenden Wirkung, die der Gleichstrom in den Elektrolyten ausüben würde. Aber auch mit dem Wechselstrom ist noch periodische Abscheidung und damit Polarisierung an den Elektroden verbunden. Sie wirken infolge der durch die Polarisierung entstehenden elektromotorischen Gegenkräfte wie eine Kapazität, die sich auflädt. Aus den Ausführungen in Abschnitt 17 ist ersichtlich, daß man den Einfluß dieses Umstandes, der beim Vergleich eines elektrolytischen mit einem metallischen Widerstande das völlige Verschwinden des Stromes verhindert, dadurch herabdrücken kann, daß man die Kapazität möglichst groß macht. Das erreicht man in diesem Falle dadurch, daß man die Elektrodenoberfläche möglichst groß macht; man verwendet darum nicht blanke, sondern mit Platinschwarz bedeckte Platinelektroden. Vollständig kompensieren läßt sich der Einfluß dieser Polarisationskapazität entweder dadurch, daß man auch dem Vergleichswiderstand im Zweige 2 eine entsprechend zu bemessende Kapazität parallel schaltet, oder nach dem am Schluß des Abschnitts 17 auseinandergesetzten Verfahren, indem man in den Zweig 1 vor die Flüssigkeitszelle eine variable Selbstinduktion einschaltet, die man so bemißt, daß sie die Wirkung der Kapazität gerade aufhebt. Dann wirkt der Zweig 1 so, als ob nur der Ohmsche Widerstand in ihm vorhanden wäre.

---

## Kapitel VII.

# Das elektromagnetische Feld in Isolatoren.

### 1. Elektrische Ströme in Isolatoren.

In den Kapiteln III bis VI ist ausschließlich die Rede gewesen von elektrischen Strömen, die in Leitern fließen. Aber die Betrachtungen in den letzten Abschnitten des VI. Kapitels gehen über die Grundsätze hinaus, die wir für diese Ströme aufgestellt hatten. Wir haben in Abschnitt 17 des vorigen Kapitels den in den Spulen einer Wechselstrommaschine erzeugten Strom in die Belegungen eines Kondensators eintreten lassen. Wenn dieser Strom nur in den Leiterteilen fließt, so ist er offenbar kein geschlossener Strom; denn die Leiterteile sind ja durch das Dielektrikum des Kondensators getrennt. Wir haben aber im III. Kapitel, Abschnitt 11, S. 234 gesehen, daß die allgemeinen Eigenschaften des magnetischen Feldes mit Notwendigkeit zu der Annahme führen, daß es nur geschlossene Ströme gibt. Dieser Satz war allerdings nur abgeleitet aus den Eigenschaften des magnetischen Feldes, welches stationäre Ströme erzeugen, die entweder in Leitern fließen oder auch Ampèresche Molekularströme sein können. Aber wir haben auch bei der Behandlung der Induktionsströme, die im allgemeinen nicht stationäre Ströme sind, keine Veranlassung gehabt, uns die Leiter anders als in Form geschlossener Strombahnen zu denken. Erst das Problem der Ladung oder Entladung eines Kondensators oder allgemeiner einer Kapazität, die ja die Gestalt eines beliebigen Konduktors haben kann, führt uns auf den Fall einer ungeschlossenen Leiterbahn, und wenn wir die früher gewonnenen Grundsätze auch in diesem Falle angewendet haben, so liegt darin stillschweigend eine Erweiterung des Begriffs der geschlossenen Ströme. Diese Erweiterung verdankt die Elektrizitätslehre Maxwell, und sie ist der Ausgangspunkt für die Fortbildung, welche die elektrischen Theorien durch Maxwell erfahren haben. Maxwell macht die Hypothese, daß die allgemeinen Eigenschaften des magnetischen Feldes unter allen Umständen dieselben sind, einerlei, ob die elektrische Strömung in seinen Wirbelräumen Leitungsströme sind oder dies nicht sind.

Nach seiner Auffassung soll es stets nur geschlossene Ströme geben. Es muß also auch in dem Falle zweier sich ladender oder entladender Konduktoren irgendwo ein Schluß der elektrischen Stromlinien existieren. Dieser kann sich offenbar nur durch den die Konduktoren umgebenden Isolator hindurch vollziehen, d. h. auch in einem Isolator müssen unter gewissen Umständen elektrische Ströme zustande kommen.

In dem Fall der Ladung oder Entladung eines Kondensators ist der Stromkreis durch die dünne dielektrische Zwischenschicht des Kondensators nur auf eine so kurze Strecke unterbrochen, daß man die magnetischen Wirkungen des in ihm fließenden Stromes auch nach der alten Theorie unbedenklich mit denen eines völlig geschlossenen Stromes identifizieren konnte. Der Fall der Kondensatorladung und -entladung, wie wir ihn in VI, 17 behandelt haben, und der in einem Kondensatorkreis auftretenden elektrischen Schwingungen, auf die wir im nächsten Kapitel zu sprechen kommen, konnte daher schon auf Grund der älteren Theorie vor Maxwell behandelt werden. Aber die Maxwellsche Vorstellung gilt auch dann, wenn die Konduktoren durch weite Strecken eines Isolators getrennt sind, wo man nach der alten Theorie die Stromlinien auch nicht annähernd als geschlossen ansehen konnte. Dieser Ansatz lieferte den Schlüssel für die Lösung des Problems der sogenannten ungeschlossenen Ströme und eröffnete damit ein neues Gebiet der theoretischen Elektrizitätslehre.

## 2. Die Abhängigkeit der Stromkomponenten eines Isolators von der elektrischen Kraft.

Wir wollen jetzt etwas näher die Umstände betrachten, unter welchen ein elektrischer Strom in einem Isolator zustande kommt. Bei dem im vorigen Abschnitt beschriebenen Experimente haben wir es nicht mit einem stationären elektrischen Strom zu tun, sondern mit einem schnell in seiner Stärke abklingenden. Bei stationären Strömen, wie sie z. B. in einem durch einen Draht D geschlossenen galvanischen Element von konstanter elektromotorischer Kraft erzeugt werden, kommen im umgebenden Isolator keine elektrischen Ströme vor, wie man daraus erkennen kann, daß die magnetische Kraft außerhalb des Drahtes D (und des Elementes) überall ein Potential besitzt und fortdauernde Rotationen von Magnetpolen nur dann möglich sind, wenn sie den Draht D auf ihrer Bahn umschlingen können (vgl. III, 2 und 3, S. 218 ff.).

Es ist daraus zu schließen, daß die elektrische Stromdichte in einem Isolator nicht abhängen kann von den Werten der elektrischen Kraft

selber, sondern nur von den Aenderungen derselben mit der Zeit, d. h. den nach der Zeit genommenen Differentialquotienten der elektrischen Kraft.

Dieser Satz läßt sich auch aus einem anderen Umstande deduktiv ableiten.

Der elektrische Strom in einem Leiter ist stets von einer Wärmeentwicklung begleitet, so daß, wenn man von dieser absieht, durch das Fließen des elektrischen Stromes eine Energieverminderung des betreffenden Systemes eintritt.

Dem ist nicht so, falls in einem vollkommenen Isolator ein elektrischer Strom fließt. Denn einerseits kann man bei dem beschriebenen Experimente der Entladung zweier Konduktoren in der umgebenden Luft nirgends eine Wärmeentwicklung nachweisen (NB. falls man absieht von der Erwärmung an einer eventuellen Funkenstrecke), andererseits folgt aus der Auffassung der Natur des Lichtes als elektromagnetischer Schwingungen und der vollkommenen Durchsichtigkeit des freien Aethers, daß in letzterem, der als der vollkommenste Isolator anzusehen ist, ohne jedwede Energieverminderung elektrische Ströme fließen können.

Verleihen wir nun diesem Gedanken einen mathematischen Ausdruck.

Wir sahen im Kapitel VI auf S. 355, daß die Energie  $E$ , welche aufzuwenden nötig ist, damit ein linearer Strom der Stärke  $i$  während einer kleinen Zeit  $dt$  fließe, gegeben ist durch

$$E = E i dt = - i dt \int \frac{dV}{dl} dl, \quad (1)$$

wobei  $E$  die längs des ganzen Stromes wirkende elektromotorische Kraft,  $\frac{dV}{dl}$  das Potentialgefälle längs der Strombahn bedeutet;  $dl$  soll ein Längenelement der Stromlinien sein und das Integral der rechten Seite von (1) soll sich über die ganze Länge des Stromes erstrecken.  $E$  und  $i$  mögen in den zusammengehörenden Einheiten eines der früher besprochenen Maßsysteme gemessen sein.

Wie in Kapitel VI, Abschnitt 4 wollen wir an Stelle des Potentialgefälles die Resultante  $\mathcal{E}$  der elektrischen Kraft, an Stelle der Stromstärke die Stromdichte  $j$  einführen:

$$\mathcal{E} = - \frac{dV}{dl}, \quad j dq = i,$$

falls  $dq$  der Querschnitt des linearen Leiters ist. Da nun  $dq dl = dv$ , d. h. gleich einem Raumelement des linearen Stromes ist, so wird nach (1)

$$E = dt \int \mathcal{E} \cdot j \cdot dv, \quad (2)$$

wobei das Integral über den ganzen vom Strom durchflossenen Raum zu nehmen ist. Da nun ist:

$$\begin{aligned}\mathfrak{E} &= \mathfrak{E}_x \cos(1x) + \mathfrak{E}_y \cos(1y) + \mathfrak{E}_z \cos(1z), \\ j \cos(1x) &= j_x, \quad j \cos(1y) = j_y, \quad j \cos(1z) = j_z,\end{aligned}\quad (3)$$

falls  $\mathfrak{E}_x$ ,  $\mathfrak{E}_y$ ,  $\mathfrak{E}_z$  die Komponenten der elektrischen Kraft,  $j_x$ ,  $j_y$ ,  $j_z$  die der Stromdichte bedeuten, und  $(1x)$  usw. die Winkel, welche die Stromrichtung  $l$  mit den Koordinatenachsen einschließt, so kann man (2) umgestalten in:

$$E = dt \int (\mathfrak{E}_x j_x + \mathfrak{E}_y j_y + \mathfrak{E}_z j_z) dv. \quad (4)$$

Bisher setzten wir voraus, daß die Strömung in einer sehr dünnen Röhre erfolgen solle (linearer Strom). Die Formel (4) gilt aber offenbar ebenso für ein beliebiges körperliches, vom Strom durchflossenes System, da man dieses aus einer Anzahl dünner Stromröhren zusammengesetzt denken kann.

Betrachten wir nun zunächst den Fall, daß die Komponenten der Stromdichte proportional zur elektrischen Kraft seien:

$$j_x = \sigma \mathfrak{E}_x, \quad j_y = \sigma \mathfrak{E}_y, \quad j_z = \sigma \mathfrak{E}_z, \quad (5)$$

so folgt aus (4):

$$E = dt \int \sigma (\mathfrak{E}_x^2 + \mathfrak{E}_y^2 + \mathfrak{E}_z^2) dv = dt \int \frac{j^2}{\sigma} dv. \quad (6)$$

Da  $\sigma$ , welches nach Analogie mit den oben S. 368 im VI. Kapitel aufgestellten Formeln (37) die Leitfähigkeit des Körpers darstellen würde, eine positive Größe sein muß, so hat auch  $E$  nach (6) stets einen positiven Wert. Es erfordert daher stets einen gewissen Energieaufwand, wenn im Körper ein Strom eine gewisse Zeit hindurchfließen soll, auch wenn das ganze System einen Kreisprozeß durchmacht, d. h. am Ende der betrachteten Zeit das System ganz denselben Zustand besitzt wie am Anfang. Dieser Energieaufwand setzt sich in Joulesche Wärme um. In der Tat ergibt die rechte Seite von (6), auf einen linearen Strom angewandt:

$$E = i^2 w dt,$$

falls  $w$  den galvanischen Widerstand in dem gewählten Maßsystem bedeutet.  $E$  hat daher den Wert der sogenannten Jouleschen Wärme [vgl. oben S. 356, Formel (7)].

Der Ansatz (5) kann also in einem Isolator nicht richtig sein. Versuchen wir nun das Nächstliegende, nämlich:

$$j_x = \kappa \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial t}, \quad j_y = \kappa \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t}, \quad j_z = \kappa \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t}, \quad (7)$$

wo  $\kappa$  einen Proportionalitätsfaktor bedeuten soll. In (4) eingesetzt, ergibt dies:



$$E = dt \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\kappa}{2} (\mathfrak{E}_x^2 + \mathfrak{E}_y^2 + \mathfrak{E}_z^2) dv. \quad (8)$$

Hiernach ergibt sich  $E$  nicht beständig als positiv, sondern, da  $E$  nach (8) gleich der innerhalb der Zeit  $dt$  eintretenden Aenderung der Funktion  $\Phi$  ist, wobei

$$\Phi = \int \frac{\kappa}{2} (\mathfrak{E}_x^2 + \mathfrak{E}_y^2 + \mathfrak{E}_z^2) dv,$$

so kann  $E$  auch negative Werte annehmen, d. h. es kann Energie gewonnen werden durch die elektrische Strömung. Dies geschieht sogar sicher, wenn das ganze System einen Kreisprozeß durchläuft, wenn also die Funktion  $\Phi$  nach beliebigen Zwischenwerten zu ihrem Anfangswerte zurückkehrt. Nach (8) ist dann die gesamte aufzuwendende Energie gleich Null.

In diesem Falle ist das Auftreten elektrischer Strömungen nicht von einer Energieverminderung begleitet; der Ansatz (7) ist daher möglich für einen Isolator.

Es wäre nun aber noch zu untersuchen, ob nicht die Stromkomponenten  $j_x$  usw. auch noch von höheren Differentialquotienten der elektrischen Kraft nach der Zeit abhängen könnten.

Es sind dabei zwei Fälle zu unterscheiden, nämlich je nachdem  $j_x$  von einem geraden Differentialquotienten von  $\mathfrak{E}_x$  nach  $t$  abhängt, oder von einem ungeraden.

Betrachten wir zunächst ersteren Fall, setzen wir also allgemein

$$j_x = \kappa_{2h} \frac{\partial^{2h} \mathfrak{E}_x}{\partial t^{2h}},$$

so tritt in der Formel (4) für  $E$  als Summand das Glied auf:  $\mathfrak{E}_x \frac{\partial^{2h} \mathfrak{E}_x}{\partial t^{2h}}$ .

Nun ist aber

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_x \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \mathfrak{E}_x \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial t} \right) - \left( \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial t} \right)^2, \\ \mathfrak{E}_x \frac{\partial^4 \mathfrak{E}_x}{\partial t^4} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \mathfrak{E}_x \frac{\partial^3 \mathfrak{E}_x}{\partial t^3} - \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial t} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial t^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial t^2} \right)^2, \end{aligned}$$

und allgemein ist  $\mathfrak{E}_x \frac{\partial^{2h} \mathfrak{E}_x}{\partial t^{2h}}$  gleich einem Differentialquotienten nach der Zeit vermindert oder vermehrt um eine stets positive GröÙe, je nachdem  $h$  eine ungerade oder eine gerade Zahl ist. — Da nun aber, wie aus den angestellten Betrachtungen erhellt,  $E$  gleich dem Differentialquotienten einer Funktion des Zustandes des Systemes nach der Zeit sein muß, falls bei Kreisprozessen  $E$  verschwinden soll, so können die Stromkomponenten in einem Isolator nicht von geraden Differentialquotienten der elektrischen Kraft nach der Zeit abhängen.

Dagegen können, wenigstens aus der Energieerhaltung geschlossen, die Stromkomponenten von beliebigen ungeraden Differentialquotienten der elektrischen Kraft nach den Koordinaten abhängen. Denn  $\mathfrak{E}_x \frac{\partial^{2h+1} \mathfrak{E}_x}{\partial t^{2h+1}}$  ist stets gleich dem Differentialquotienten einer Funktion nach der Zeit. Man erkennt dies aus den Identitäten:

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_x \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial t} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \mathfrak{E}_x^2}{\partial t}, \\ \mathfrak{E}_x \frac{\partial^3 \mathfrak{E}_x}{\partial t^3} &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ \mathfrak{E}_x \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial t^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial t} \right)^2 \right], \\ \mathfrak{E}_x \frac{\partial^5 \mathfrak{E}_x}{\partial t^5} &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ \mathfrak{E}_x \frac{\partial^4 \mathfrak{E}_x}{\partial t^4} - \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial t} \frac{\partial^3 \mathfrak{E}_x}{\partial t^3} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial t^2} \right)^2 \right],\end{aligned}$$

deren Fortsetzung für beliebig hohe Differentialquotienten man leicht hiernach bilden kann.

Sonach wäre der allgemeinste Ansatz, wenigstens wenn man zunächst von einer Abhängigkeit der  $j_x$ ,  $j_y$ ,  $j_z$  von den Differentialquotienten der  $\mathfrak{E}_x$ ,  $\mathfrak{E}_y$ ,  $\mathfrak{E}_z$  nach den  $x$ ,  $y$ ,  $z$  absieht:

$$j_x = \kappa \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial t} + \kappa' \frac{\partial^3 \mathfrak{E}_x}{\partial t^3} + \kappa'' \frac{\partial^5 \mathfrak{E}_x}{\partial t^5} + \dots \quad (9)$$

Die Koeffizienten  $\kappa$ ,  $\kappa'$ ,  $\kappa''$  usw. kann man nun mit Hilfe des Gaußschen Satzes in seiner Anwendung auf die Elektrostatik (I, 31, S. 66) bestimmen, mit Rücksicht auf die Tatsache, daß es nur geschlossene Ströme geben kann. Denken wir uns den einen Konduktor, etwa die eine Platte des Kondensators von einer Fläche umschlossen, die ganz im Dielektrikum verläuft und nur dem Draht, in dem die Elektrizität der Platte zuströmt oder von ihr abströmt, an einer Stelle Durchlaß gestattet. Strömt durch den Draht die Elektrizitätsmenge  $de$  auf die Platte, so muß nach dem Prinzip der Existenz geschlossener Ströme eine ebenso große Elektrizitätsmenge als „Strom im Dielektrikum“ durch die den Konduktor umschließende Fläche nach außen treten. Bezeichnen wir also mit  $ds$  ein Element dieser Fläche und mit  $j_n$  die nach der äußeren Normale  $n$  auf  $ds$  genommene Komponente der Stromdichte, so muß die Beziehung gelten:

$$dt \int j_n ds = \frac{de}{dt} dt. \quad (10)$$

Setzt man die Werte nach (9) in (10) ein, so entsteht

$$dt \int \left( \kappa \frac{\partial \mathfrak{E}_n}{\partial t} + \kappa' \frac{\partial^3 \mathfrak{E}_n}{\partial t^3} + \dots \right) ds = \frac{de}{dt} dt, \quad (10')$$

wobei  $\mathfrak{E}_n$  die nach  $n$  genommene Komponente der elektrischen Kraft bedeutet.

Nehmen wir den Drahtquerschnitt unendlich klein, so können wir die Fläche  $S$  mit solcher Annäherung als geschlossen betrachten, daß wir den Gaußschen Satz in der in der Elektrostatik benutzten Form auf sie anwenden können (I, 31, Formel [63']):

$$\int \varepsilon \mathfrak{E}_n ds = 4 \pi e, \quad (11)$$

daher

$$\frac{de}{dt} dt = dt \int \frac{\varepsilon}{4 \pi} \frac{\partial \mathfrak{E}_n}{\partial t} ds. \quad (12)$$

$\varepsilon$  bedeutet die Dielektrizitätskonstante des Isolators an der Stelle von  $ds$ .

Eine Vergleichung von (10') und (12) liefert:

$$\kappa = \frac{\varepsilon}{4 \pi}, \quad \kappa' = 0, \quad \kappa'' = 0, \quad \text{usw.} \quad (13)$$

Es ist also in einem Isolator:

$$j_x = \frac{\varepsilon}{4 \pi} \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial t}, \quad j_y = \frac{\varepsilon}{4 \pi} \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t}, \quad j_z = \frac{\varepsilon}{4 \pi} \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t}. \quad (14)$$

Nehmen wir dabei die Elektrizitätsmenge in (11) in elektrostatischem Maße, wie es in Kapitel I vorausgesetzt ist, so sind selbstverständlich auch die Strom- und Stromdichtigkeitskomponenten in (10) und die elektrischen Kräfte in (14) in diesem Maße zu rechnen.

Die erhaltenen Gleichungen gelten auch in einem inhomogenen Medium, d. h. in einem solchen, in welchem  $\varepsilon$  mit dem Ort variiert. Denn der Gaußsche Satz (11) hat auch für ein inhomogenes Medium seine Gültigkeit. Man sieht, daß die Funktion  $\Phi$  die Bedeutung der oben I, 41 auf S. 98 durch Formel (110) bestimmten elektrischen Energie hat. Die Gleichungen (14) sind mit Hilfe des Gaußschen Satzes abgeleitet. Derselbe ist aus elektrostatischen Experimenten erschlossen, in welchen also die elektrischen Ladungen im Gleichgewicht sind. Wenn wir den Gaußschen Satz auch hier auf strömende Elektrizität anwenden, so liegt darin also die Voraussetzung, daß dies wirklich gestattet sei.

Es könnte denkbar erscheinen, daß für sehr schnelle Zustandsänderungen, wie sie z. B. bei Lichtschwingungen vorliegen, der Gaußsche Satz wenigstens in ponderablen Medien nicht mehr streng gültig wäre, und daß daher dann die höheren Entwicklungsglieder der Formel (9) wirklich mit zu berücksichtigen wären. Ihr Einfluß müßte sich in einer Art Dispersion bemerklich machen, d. h. in einer Abhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit elektrischer Wellen von ihrer Schwingungsdauer. Eine solche Abhängigkeit ist für den leeren Raum, d. h. für den Äther auf keinen Fall zu konstatieren. Für ihn gelten also die Gleichungen (14) unbedingt. Ist dies aber der Fall, so werden wir sie auch als gültig anerkennen müssen für die ponderablen Isolatoren, solange

wir deren elektrisches Verhalten durch Gleichungen darstellen, die denjenigen für den reinen Aether ganz analog gebaut sind, und nur durch die Einführung der Dielektrizitätskonstanten jeden einzelnen Isolator in spezifischer Weise charakterisieren. Diese Art des Vorgehens behandelt die Materie als Kontinuum; der Raum, in welchem sich die Vorgänge abspielen, besitzt danach in jedem Teil, den man beliebig klein wählen kann, dieselben Eigenschaften wie in jedem anderen Teil. Nach dieser Theorie würde eine Dispersion in den materiellen Isolatoren ebensowenig zu erwarten sein, wie in dem leeren Raum. Tatsächlich aber ist sie vorhanden; sie ist für die schnellen Schwingungen der Wärme- und Lichtstrahlen eine fundamentale Erscheinung. Zu ihrer physikalischen Erklärung hat man die Vorstellung der Kontinuität der Raumerfüllung durch die Materie fallen lassen. Man denke sich, daß in einem mit ponderabler Materie angefüllten Raume die Eigenschaften desselben innerhalb gewisser, sehr kleiner Bereiche andere sind, als in ihrer Umgebung. Diese Bereiche wollen wir die ponderablen Moleküle nennen und zur Vereinfachung annehmen, die Eigenschaften derselben sollen an ihren Grenzen unstetig in die des umgebenden Raumes oder Aethers übergehen, eine Annahme, die natürlich streng genommen nicht erfüllt ist. Daß bei den zum Aufbau der elektrischen Theorie dienenden Experimenten die Störung der Homogenität des Aethers durch die ponderable Materie nicht bemerkt wird, liegt — so zu sagen — an der Grobheit der Verhältnisse, nämlich daran, daß die elektrischen bzw. magnetischen Kräfte merkliche Verschiedenheiten erst in Distanzen besitzen, welche unendlich groß gegen die Dimensionen der Inhomogenitäten, d. h. der Moleküle, sind. — Bei optischen Versuchen werden diese Distanzen — die Wellenlänge — sehr klein, und daher kann sich hier das Vorhandensein der molekularen Inhomogenitäten bemerklich machen.

Hinsichtlich der Durchführung dieser Gedanken sei auf die Entwicklung der Dispersionstheorie in Drudes Optik verwiesen. Aber im Zusammenhange der vorliegenden Gedankenreihe möge darauf hingewiesen werden, daß man die Differentialgleichung für die Bewegung der mitschwingenden Teilchen (Moleküle oder in neuerer Auffassung Elektronen) in gewisser Weise als eine Ausnahme vom Gaußschen Satze auffassen kann. Diese Ausnahme wird aber nicht direkt durch die Schnelligkeit der Schwingungen und durch eine etwaige Trägheit der elektrischen Verschiebung hervorgebracht, sondern direkt durch die inhomogene Struktur des Raumes und indirekt durch die Schnelligkeit der Schwingungen.

Im Rahmen der Darstellung, die wir hier von den elektrischen Erscheinungen geben, können wir an dem Gaußschen Satze, d. h. auch an den Gleichungen (14) festhalten, da sie jedenfalls für Zustände gelten,

welche nicht sehr schnell mit der Zeit sich ändern. Die Uebereinstimmung mit den Beobachtungsergebnissen zeigt, daß in allen sogenannten rein elektrischen (nicht optischen) Experimenten, selbst bei den schnellsten bisher erreichten Schwingungen, die Vernachlässigung der höheren Differentialquotienten in (9) als gerechtfertigt erscheint<sup>1)</sup>.

Die Gültigkeit des Gaußschen Satzes bedingt es auch, daß die Stromkomponenten nicht von den Differentialquotienten der elektrischen Kraft nach den Koordinaten abhängen können, wie man sich leicht überzeugt durch Einsetzen solcher Terme in die Formel (10). Ebenso wenig können in  $j_x, j_y, j_z$  höhere als erste Potenzen von  $\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial t}$  usw. auftreten. Dies geht auch schon aus dem Grunde nicht, weil alle Gleichungen linear und homogen sein müssen, da stets beobachtet wird, daß zwei verschiedene Zustandsänderungen sich ohne gegenseitige Beeinflussung oder Störung additiv überlagern.

### 3. Versinnbildlichung der Eigenschaften des elektrischen Feldes.

Es ist schon im III. Kapitel, Abschnitt 11 gesagt, daß man wegen des Umstandes, daß es nur geschlossene Ströme gibt, für den elektrischen Strom das Bild der Bewegung eines inkompressiblen Fluidums gebrauchen kann. Die Geschwindigkeitskomponenten dieses Fluidums sind dann gleich den Stromkomponenten  $j_x, j_y, j_z$  zu setzen. Wie die Gleichungen (14) lehren, wären dann die Ausdrücke:

$$\frac{\epsilon}{4\pi} \mathfrak{E}_x, \quad \frac{\epsilon}{4\pi} \mathfrak{E}_y, \quad \frac{\epsilon}{4\pi} \mathfrak{E}_z$$

gleich den Verschiebungen des Fluidums aus seiner ursprünglichen (Gleichgewichts-) Lage. Diese Größen sind daher von Maxwell die Komponenten der elektrischen Verschiebung genannt. Wir wollen deshalb die elektrischen Ströme in einem Isolator kurz Verschiebungsströme nennen zum Unterschied von den in einem Leiter fließenden Leitungsströmen.

Die Ladung zweier Konduktoren mit positiver und negativer Elektrizität besteht nach dem genannten Bilde darin, daß durch die Oberfläche des positiv geladenen Konduktors hindurch ein gewisses Quantum

<sup>1)</sup> In die obige Besprechung der Gültigkeit des Gaußschen Satzes sind einige Bemerkungen aufgenommen, die Drude im X. Kapitel der Physik des Aethers (S. 519 u. 520 der ersten Auflage) bei der Behandlung der optischen Probleme zu dieser Frage gemacht hat. Da sie sich in Drudes Optik nicht wiederfinden, schien es angemessen, sie an dieser Stelle einzuschalten.

des Fluidums nach außen, dagegen durch die Oberfläche des negativ geladenen Konduktors ein gleich großes Quantum des Fluidums nach innen von seiner Ruhelage aus verschoben ist. An jeder Stelle des zwischen beiden Konduktoren befindlichen Isolators müssen wegen der Inkompressibilität des Fluidums Verschiebungen desselben auftreten, denen zufolge gewisse Drucke und Spannungen bestehen, welche die Konduktoren gegeneinander zu bewegen suchen. Die Größe und Art dieser Spannungen, durch welche die beobachteten ponderomotorischen Wirkungen des elektrostatischen Feldes hervorgerufen werden würden, sind schon im I. Kapitel, Abschnitt 43 besprochen worden.

Nach dem hier gebrauchten Bilde ist es verständlich, warum die ponderomotorischen Wirkungen zweier geladener Konduktoren umgekehrt proportional zur Dielektrizitätskonstante  $\epsilon$  des Zwischenmittels sind. Denn diese Größe spielt offenbar, da sie proportional der elektrischen Verschiebung, dividiert durch die die Verschiebung veranlassende Kraft ist, die Rolle des reziproken elastischen Widerstandes des Zwischenmittels. Je größer daher  $\epsilon$  ist, um so kleiner müssen die durch die Verschiebungen, d. h. die elektrischen Ladungen, hervorgerufenen Spannungen und daher auch ponderomotorischen Wirkungen sein.

Die hier angestellten Betrachtungen gelten in ganz ähnlicher Weise für das magnetische Feld, wie aus den Erörterungen im III. Kapitel, S. 235 zu ersehen ist. Die Komponenten der magnetischen Verschiebung sind

$$\frac{\mu}{4\pi} \mathfrak{S}_x, \quad \frac{\mu}{4\pi} \mathfrak{S}_y, \quad \frac{\mu}{4\pi} \mathfrak{S}_z.$$

Wie schon dort hervorgehoben wurde, sind diese Vorstellungen weiter nichts als ein Sinnbild, durch welches die aus den Beobachtungen mit Sicherheit abgeleiteten Gleichungen der Anschauung näher gerückt werden. Es ist durchaus nicht gesagt, daß die elektrische Ladung wirklich in der Verschiebung einer inkompressiblen Flüssigkeit bestände. Denn nur was uns die Beobachtung liefert, ist als sicher begründet anzusehen. Das sind aber hier nur die Gleichungen, durch welche die Eigenschaften des elektrischen (bzw. magnetischen) Feldes charakterisiert sind. Es bleibt der Phantasie und der Willkür überlassen, diese Gleichungen durch irgendwie gewählte Bilder tiefer zu interpretieren.

#### 4. Experimenteller Nachweis der magnetischen Wirkung der Verschiebungsströme.

Wenn es richtig ist, daß in einem Isolator durch Veränderung der elektrischen Kräfte Verschiebungsströme entstehen, die als Fortsetzung

der Leitungsströme durch den Isolator hindurch anzusehen sind, so müssen diese Verschiebungsströme ebenso wie die Leitungsströme auch magnetische Kräfte ausüben. Diese Wirkung ist tatsächlich beobachtet worden, zuerst von Röntgen<sup>1)</sup>; nachdem dann eine Reihe zweifelhafter Versuche von anderen Physikern angestellt waren, hat Eichenwald<sup>2)</sup> durch genaue Messungen das Vorhandensein der Wirkung festgestellt. Seine Versuchsanordnung entspricht mit kleinen Aenderungen derjenigen, die schon von Röntgen benutzt worden ist. Eine vertikale Hartgummischeibe rotiert um eine horizontale Achse zwischen zwei feststehenden Mikanitplatten mit ringförmigen Stanniolbelegungen. Die Belegungen sind in Halbringe geteilt und lassen oben und unten je einen Zwischenraum von 1 cm frei. Der eine Halbring der ersten Scheibe wird positiv, der andere negativ geladen (auf Spannungen von 3000—6000 Volt), die gegenüberliegenden Halbringe der anderen Scheibe werden entgegengesetzt geladen. Rotiert die Hartgummischeibe, so gehen ihre Teilchen beim Vorübergang an dem Zwischenraum zwischen den Halbringen aus einem elektrischen Felde einer Richtung in ein Feld der entgegengesetzten Richtung über. Dieser Wechsel der Krafrichtung muß nach Maxwell mit einem Verschiebungsstrom verbunden sein. Um dessen magnetische Wirkung nachzuweisen, ist dicht über dem Rand der Scheibe an der Stelle des oberen Zwischenraumes ein gegen andere Einflüsse vollkommen geschütztes, empfindliches Magnetometer aufgestellt. Dieses zeigte bei Rotation der Scheiben (Umdrehungszahl 65—134 in der Sekunde) kleine, aber deutlich meßbare Ausschläge. Sie wurden verglichen mit den Ausschlägen, die ein Leitungsstrom von bekannter Stärke an derselben Stelle, an der der Verschiebungsstrom stattfand, auf das Magnetometer ausübte. Daraus konnte die Größe des Verschiebungsstromes berechnet und mit dem theoretischen Werte, der sich aus der Kapazität der Halbringkondensatoren, ihrem Potential und der Umdrehungszahl berechnen ließ, verglichen werden. Dieser Vergleich ergab, daß der beobachtete Verschiebungsstrom nicht dem Wechsel des ganzen Erregungsflusses  $\mathfrak{D}$  zwischen den Kondensatorbelegungen, sondern nur dem Wechsel der Größe  $(\epsilon - 1) \mathfrak{E}$  proportional ist. Das ist aber derjenige Teil des Erregungsflusses, der als „Polarisation des Isolators“ durch die Materie hindurchgeht (siehe Kapitel I, S. 85). Das Resultat der Eichenwaldschen Versuche kann man also dahin aussprechen, daß nur die an der Materie haftenden Influenzladungen bei der Bewegung der Materie mitbewegt werden und daher beim Wechsel der Feldrichtung

<sup>1)</sup> W. C. Röntgen, Sitzungsber. d. Berl. Akademie 1885, S. 195; Rep. d. Phys. 21, S. 521, 1885.

<sup>2)</sup> A. Eichenwald, Ann. der Physik (4) 11, S. 434, 1903 (siehe daselbst auch die Literatur über die anderen Versuche) und Ann. der Physik (4) 13, S. 919, 1904.

einen Verschiebungsstrom erzeugen können. Der Aether aber, der den anderen Teil des Erregungsflusses trägt, steuert nichts zu dem Verschiebungsstrom bei. Man kann sich das durch die Vorstellung erklären, daß der Aether bei dem obigen Versuche nicht von der Materie mitgenommen wird. Dies führt zu dem Schlusse, der auch durch andere Erfahrungen bestätigt wird, daß bei der Bewegung der Materie der Aether in Ruhe bleibt und die Materie durch den ruhenden Aether hindurch bewegt wird.

Die beschriebenen Versuche ergeben also die magnetische Wirkung nur für die Verschiebungsströme in der ponderablen Materie. Die Verschiebungsströme im Aether lassen sich auf diesem Wege nicht nachweisen, weil der Aether sich überhaupt nicht in Bewegung setzen läßt. Der Maxwellsche Gedanke der Verschiebungsströme bleibt daher für den Aether vorläufig eine geniale Hypothese, deren Berechtigung nur durch die Richtigkeit der aus ihr abgeleiteten Schlüsse zu erbringen ist.

Es ist übrigens von Interesse, zu bemerken, daß auch der Verschiebungsstrom in dem oben beschriebenen Versuche ein Teil eines geschlossenen Stromverlaufes ist. Durch das elektrische Feld zwischen den Halbringkondensatoren wird nämlich die Oberfläche der Hartgummi-scheibe mit scheinbaren Ladungen bedeckt. Diese werden bei der Umdrehung der Scheibe mitgeführt bis zum Ende des Halbringes; sie bilden einen Konvektionsstrom. Im Zwischenraum zwischen den zwei Halbringen treten diese Ladungen als Verschiebungsstrom durch die Platte hindurch auf die andere Seite der Platte hinüber. Die unter den Halbringen verlaufenden Konvektionsströme und die in den Zwischenräumen senkrecht durch die Platte hindurchgehenden Verschiebungsströme bilden zusammen ein geschlossenes Stromsystem. Daß auch derartige Konvektionsströme magnetische Wirkungen ausüben, ist ebenfalls zuerst von Röntgen nachgewiesen<sup>1)</sup> und von Eichenwald<sup>2)</sup> bestätigt worden. Zum Unterschied von den durch die Bewegung wahrer Ladungen erzeugten „Konvektionsströmen“ im eigentlichen Sinne, deren magnetische Wirkung Rowland zuerst beobachtet hat (siehe Kapitel VI, S. 363), pflegt man die durch Bewegung scheinbarer, auf Isolatoren influenzierter Ladungen erzeugten Konvektionsströme heute als Röntgenströme zu bezeichnen. Bei dem oben beschriebenen Versuche ergänzen sich also Verschiebungsströme und Röntgenströme zu einem geschlossenen Strom. Auf das Magnetometer aber würden die Röntgenströme bei der obigen Anordnung nicht wirken, weil die Magnetnadel in der Ruhelage senkrecht zur Fläche der rotierenden Scheibe, also zu der Richtung der Röntgenströme steht.

<sup>1)</sup> W. C. Röntgen, Wied. Ann. 35, S. 264, 1888; 40, S. 93, 1890.



Versuche, die magnetischen Wirkungen der Verschiebungsströme in ruhenden Isolatoren nachzuweisen, sind zuerst von S. P. Thompson<sup>1)</sup>, dann von Whitehead<sup>2)</sup> und kürzlich von E. Koch<sup>3)</sup> angestellt worden. Bei diesen Versuchen wurde ein dielektrischer Zylinder in Richtung seiner Achse durch ein elektrostatisches Wechselfeld in schneller Folge umpolarisiert. In einem den Zylinder kreisförmig umschlingenden Solenoid werden durch die magnetischen Wirkungen der periodischen Verschiebungsströme Wechselströme induziert, die mit einem Telefon wahrgenommen und mit geeigneten Instrumenten gemessen werden können. Die Tatsache dieser Wirkung wurde auch auf diesem Wege nachgewiesen; Koch fand auch bei Paraffin Proportionalität mit der Dielektrizitätskonstante, wie sie die Theorie verlangt.

## 5. Grundgleichungen des elektromagnetischen Feldes ruhender Isolatoren.

Wenn wir mit Maxwell annehmen, daß die Verschiebungsströme magnetische Wirkungen ausüben, so müssen bei diesen Vorgängen Zustandsänderungen im Aether hervorgerufen werden, welche eine Uebereinanderlagerung der Zustandsänderungen sind, welche der Aether im elektrischen, und derer, welche er im magnetischen Felde erfährt. Diese Uebereinanderlagerung von Zustandsänderungen verstehen wir jetzt unter der Bezeichnung elektromagnetisches Feld des Isolators.

Da die Beziehungen zwischen den Komponenten des elektrischen Stromes und denen der elektrischen Kraft in einem Isolator bereits abgeleitet sind, so sind wir jetzt imstande, das vollständige System der Grundgleichungen des elektromagnetischen Feldes in Isolatoren aufzustellen.

Zunächst lauten die in jedem elektromagnetischen Felde gültigen Maxwellschen Gleichungen, welche im III. Kapitel, Abschnitt 9, Formeln (14) auf S. 232 abgeleitet sind:

$$\begin{aligned} 4\pi j_x &= \frac{\partial \mathfrak{S}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{S}_y}{\partial z}, \\ 4\pi j_y &= \frac{\partial \mathfrak{S}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{S}_z}{\partial x}, \\ 4\pi j_z &= \frac{\partial \mathfrak{S}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{S}_x}{\partial y}, \end{aligned} \tag{15}$$

wobei  $\mathfrak{S}_x$ ,  $\mathfrak{S}_y$ ,  $\mathfrak{S}_z$  die Komponenten der magnetischen Kraft,  $j_x$ ,  $j_y$ ,  $j_z$  die der Dichte des elektrischen Stromes bedeuten. Letztere sind dabei

<sup>1)</sup> S. P. Thompson, Proc. R. Soc. 45, S. 392, 1889.

<sup>2)</sup> J. R. Whitehead, Physik. Zeitschr. 6, S. 475, 1905.

<sup>3)</sup> E. Koch, Marburger Diss. 1910.

nach elektromagnetischem Maße gemessen. Für erstere soll stets nur das eine im II. Kapitel festgesetzte Maßsystem gelten.

Die Formeln (15) waren zunächst nur abgeleitet aus den magnetischen Eigenschaften stationärer Leitungsströme. Nach der in diesem Kapitel erörterten Maxwell'schen Hypothese gelten sie aber auch, falls die Stromkomponenten  $j_x, j_y, j_z$  von Verschiebungsströmen herrühren. Ferner nimmt Maxwell an, daß die Gleichungen (15) auch gelten, wenn sich  $j_x, j_y, j_z$  schnell mit der Zeit ändern.

Ferner gelten für ruhende Körper die im V. Kapitel, Abschnitt 12, S. 344 abgeleiteten Formeln (52), nämlich:

$$\begin{aligned}\mu \frac{\partial \mathfrak{G}_x}{\partial t} &= \frac{\partial \mathfrak{G}_y'}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{G}_z'}{\partial y}, \\ \mu \frac{\partial \mathfrak{G}_y}{\partial t} &= \frac{\partial \mathfrak{G}_z'}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{G}_x'}{\partial z}, \\ \mu \frac{\partial \mathfrak{G}_z}{\partial t} &= \frac{\partial \mathfrak{G}_x'}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{G}_y'}{\partial x}.\end{aligned}\quad (16)$$

$\mathfrak{G}_x', \mathfrak{G}_y', \mathfrak{G}_z'$  bedeuten die Komponenten der auf die Längeneinheit wirkenden elektromotorischen Kraft  $\mathfrak{G}'$  nach elektromagnetischem Maße.

Die Gleichungen (16) waren gewonnen aus den Eigenschaften der Elektroinduktion von Leitungsströmen. Nach Maxwell wirken aber Verschiebungsströme in derselben Weise induktorisch<sup>1)</sup> wie Leitungsströme. Wir stellen daher die Gleichungen (16) auch für das elektromagnetische Feld eines Isolators auf.

Für die Größen  $\mathfrak{G}_x', \mathfrak{G}_y', \mathfrak{G}_z'$  kann man die nach elektrostatischem Maß gemessenen Komponenten  $\mathfrak{G}_x, \mathfrak{G}_y, \mathfrak{G}_z$  der elektrischen Kraft einführen mit Hilfe der im VI. Kapitel auf S. 365 abgeleiteten Formeln (27):

$$\mathfrak{G}_x' = c \mathfrak{G}_x, \quad \mathfrak{G}_y' = c \mathfrak{G}_y, \quad \mathfrak{G}_z' = c \mathfrak{G}_z. \quad (17)$$

$c$  ist das Verhältnis der elektrostatisch gemessenen Stromstärke zu der elektromagnetisch gemessenen. Wegen dieser Bedeutung von  $c$  ist ebenso nach Kapitel VI, Formel (26):

$$c = j_{ex} : j_x = j_{ey} : j_y = j_{ez} : j_z, \quad (18)$$

falls  $j_{ex}, j_{ey}, j_{ez}$  die Komponenten der Dichtigkeit des elektrischen Stromes, nach elektrostatischem Maß gemessen, bedeuten.

Nach den Formeln (14) des Abschnitts 2 dieses Kapitels (S. 412) ist schließlich:

$$j_{ex} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial \mathfrak{G}_x}{\partial t}, \quad j_{ey} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial \mathfrak{G}_y}{\partial t}, \quad j_{ez} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial \mathfrak{G}_z}{\partial t}. \quad (19)$$

<sup>1)</sup> Die induktorische Wirksamkeit der Verschiebungsströme ist experimentell deutlich durch die im nächsten Kapitel zu besprechenden Versuche von Hertz nachgewiesen.

Führt man nun in dem System (15) die elektrische Kraft nach (18) und (19) ein, und ersetzt man im System (16)  $\mathfrak{E}_x', \mathfrak{E}_y', \mathfrak{E}_z'$  durch  $\mathfrak{E}_x, \mathfrak{E}_y, \mathfrak{E}_z$  nach den Gleichungen (17), so erhält man die beiden folgenden Gleichungssysteme:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial t} &= \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z}, \\ \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t} &= \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x}, \\ \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t} &= \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y}. \end{aligned} \right\} (20) \quad \left. \begin{aligned} \frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial t} &= \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial y}, \\ \frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial t} &= \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial z}, \\ \frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t} &= \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x}. \end{aligned} \right\} (21)$$

Dabei sind die Größen  $\mathfrak{H}_x, \mathfrak{H}_y, \mathfrak{H}_z$  die Komponenten der im magnetischen Maßsystem gemessenen magnetischen Feldstärke; die Größen  $\mathfrak{E}_x, \mathfrak{E}_y, \mathfrak{E}_z$  die Komponenten der im elektrostatischen Maßsystem gemessenen elektrischen Feldstärke<sup>1)</sup>.

Die zur Herleitung von (20) und (21) benutzten Gleichungen (15) bis (19) gelten auch in inhomogenen Körpern, wie bei der Entstehung jener Gleichungen stets hervorgehoben ist. Daher gelten (20) und (21) ebenfalls auch in inhomogenen Isolatoren, d. h. solchen, in welchen  $\epsilon$  und  $\mu$  Funktionen des Ortes sind.

Differenziert man die drei Gleichungen (20) bzw. nach  $x, y, z$ , und addiert dann, so ergibt sich:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial (\epsilon \mathfrak{E}_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\epsilon \mathfrak{E}_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\epsilon \mathfrak{E}_z)}{\partial z} \right] = 0. \quad (22)$$

Der in der Klammer stehende Ausdruck hat nach Formel (64') des I. Kapitels (S. 66) die Bedeutung der räumlichen Dichte der wahren elektrischen Ladung, multipliziert mit  $4\pi$ . Da diese in einem vollkommenen Isolator nur durch direkte Berührung mit einem anderen Körper geändert werden kann, so ist es klar, daß sie in einem vollkommen ruhenden Systeme an jeder seiner Stellen sich im Laufe der Zeit nicht ändern kann, d. h. daß die linke Seite von (22) verschwinden muß.

Dieselbe Operation, auf die drei Gleichungen des Systemes (21) angewandt, ergibt:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial (\mu \mathfrak{H}_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\mu \mathfrak{H}_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\mu \mathfrak{H}_z)}{\partial z} \right] = 0. \quad (23)$$

<sup>1)</sup> Drückt man alle Größen im magnetischen Maßsystem aus, benutzt man also  $\mathfrak{E}'$  an Stelle von  $\mathfrak{E}$ , so lauten die Gleichungen (20):

$\frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{E}'_x}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z}$  usw. und die Gleichungen (21):  $\mu \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{E}'_y}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{E}'_z}{\partial y}$  usw.

Vektoranalytisch lauten die obigen Gleichungen:  $\frac{\epsilon}{c} \dot{\mathfrak{E}} = \text{rot } \mathfrak{H}$ ;  $-\frac{\mu}{c} \dot{\mathfrak{H}} = \text{rot } \mathfrak{E}$ .

Auch diese Gleichung steht mit einer früher aufgestellten Gleichung in unmittelbarer Beziehung. In Kapitel II, Abschnitt 22 hatten wir die Gleichung (6') abgeleitet:

$$\frac{\partial (\mu \mathfrak{G}_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\mu \mathfrak{G}_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\mu \mathfrak{G}_z)}{\partial z} = 0. \quad (24)$$

Sie gilt nach den dortigen Auseinandersetzungen über die Konstitution der permanenten Magnete im ganzen Raume, und war der Ausdruck dafür, daß es keinen wahren Magnetismus, im Sinne wahrer Elektrizität, gibt. Da nach (23) die linke Seite von (24) von der Zeit unabhängig ist, so ist dieser Ausdruck also dauernd gleich Null auch in zeitlich veränderlichen Feldern.

Die Gleichungen des elektromagnetischen Feldes ruhender Isolatoren sind in der durch (20) und (21) angegebenen Form zuerst von Heaviside<sup>1)</sup>, sodann von Hertz<sup>2)</sup> und Cohn<sup>3)</sup> aufgestellt worden.

Die positiven Richtungen der Koordinatenachsen sind durch die oben auf S. 21 genannte Verfügung festgelegt. Für ein inverses Koordinatensystem würden sich die Vorzeichen der rechten Seiten der Gleichungen (20) und (21) umkehren<sup>4)</sup>.

Die aufgestellten Gleichungen sind Nahewirkungsgesetze. Durch sie sind die Eigenschaften des elektromagnetischen Feldes ruhender Isolatoren vollständig charakterisiert, wenn man noch in Rücksicht zieht, daß die Energie des Feldes, da hier gleichzeitig elektrische und magnetische Kräfte tätig sind, gleich der Summe der Energien des magnetischen und des elektrischen Feldes sein muß, nämlich gleich dem Ausdruck:

$$W + T = \frac{1}{8\pi} \int \varepsilon (\mathfrak{E}_x^2 + \mathfrak{E}_y^2 + \mathfrak{E}_z^2) dv + \frac{1}{8\pi} \int \mu (\mathfrak{G}_x^2 + \mathfrak{G}_y^2 + \mathfrak{G}_z^2) dv. \quad (25)$$

In der Tat kann man rückwärts aus (20), (21) und (25) alle bisher bekannten Erscheinungen des elektromagnetischen Feldes ableiten.

Falls nämlich Gleichgewichtszustände bestehen, so verschwinden die linken Seiten von (20) und (21). Die magnetischen Kräfte sowohl wie die elektrischen haben demnach ein Potential. Nennt man eines derselben, z. B. letzteres,  $V$ , so ergibt sich, da nach (22) stets  $\frac{\partial (\varepsilon \mathfrak{E}_x)}{\partial x} +$  usw.

eine von  $t$  unabhängige Konstante sein muß, welche  $4\pi\rho$  genannt werden möge, z. B. für ein homogenes Medium:

$$\varepsilon \Delta V = -4\pi\rho.$$

<sup>1)</sup> O. Heaviside, Electrician, 1885; Phil. Mag. Febr. 1888.

<sup>2)</sup> H. Hertz, Gött. Nachr. 1890, S. 106; Wied. Ann. 40, S. 577, 1890.

<sup>3)</sup> F. Cohn, Wied. Ann. 40, S. 695, 1890.

Durch diese Gleichung ist aber in Verbindung mit gewissen Stetigkeitseigenschaften das Potential  $V$  vollständig bestimmt (vgl. oben S. 43).

Auch die ponderomotorischen Wirkungen im elektrischen Felde ergeben sich entsprechend der Beobachtung aus (20), (21) und (25), wenn man berücksichtigt, daß die von den ponderomotorischen Kräften geleistete Arbeit gleich der Abnahme der elektrischen Energie  $W$  sein muß.

Man erhält aus (21) die Gesetze für die Größe der induzierten elektromotorischen Kraft, wie man sofort erkennt, wenn man den im Kapitel V, Abschnitt 13, S. 344 zur Ableitung der dortigen Formeln (52) eingeschlagenen Weg rückwärts geht.

Auch die Grenzbedingungen beim Uebergang über die Grenze zweier verschiedener, aneinandergrenzender Körper kann man aus den Gleichungen (20) und (21) ableiten. In Wirklichkeit müssen nämlich  $\epsilon$  und  $\mu$  stetige Funktionen des Ortes sein, da in der Natur Unstetigkeiten im mathematischen Sinne des Wortes nicht vorkommen. Daher müssen auch die Komponenten der magnetischen und der elektrischen Kraft stetig variieren. Nur in gewissen Fällen kann es vorkommen, daß diese Größen so schnell variieren, daß man zur bequemeren Darstellung der Erscheinungen gelangt, wenn man an Stelle der schnellen Variation eine Unstetigkeit gesetzt denkt. Dies tritt in dem jetzt zu betrachtenden Falle ein, wenn zwei homogene Körper mit verschiedener Natur, d. h. verschiedenen  $\epsilon$  und  $\mu$  aneinanderstoßen. Ihre Berührungsfläche muß strenggenommen eine Schicht von sehr geringer Dicke sein, in welcher  $\epsilon$  und  $\mu$  sehr schnell variieren. Auch in dieser sehr stark inhomogenen Schicht müssen die Gleichungen (20) und (21) gelten, und alle ihre Termen müssen endliche Werte behalten.

Legen wir nun die  $z$ -Achse des Koordinatensystems senkrecht zur Berührungsfläche, so folgt aus der Endlichkeit der in den Gleichungen

(20) und (21) auftretenden Terme  $\frac{\partial \xi_x}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial \xi_y}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial \xi_x}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial \xi_y}{\partial z}$ , daß

$\xi_x$ ,  $\xi_y$ ,  $\xi_x$ ,  $\xi_y$  stetig variieren beim Durchgang durch die inhomogene Uebergangsschicht, d. h. daß sie zu beiden Seiten der Grenzfläche dieselben Werte besitzen, wenn wir die Uebergangsschicht als unendlich dünn, d. h. den Uebergang der Natur des einen Mediums in die des anderen als sprunghaft ansehen. Da diese Gleichheit der Werte von  $\xi_x$ ,  $\xi_y$ ,  $\xi_x$ ,  $\xi_y$  zu beiden Seiten der Grenze für alle Punkte derselben, d. h. für alle

Koordinaten  $x$ ,  $y$  besteht, so sind auch die Differentialquotienten  $\frac{\partial \xi_x}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \xi_x}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial \xi_y}{\partial x}$  usw. zu beiden Seiten der Grenze einander gleich. Aus der dritten Gleichung des Systemes (20) und des Systemes (21) folgt

daher, daß auch  $\varepsilon \mathfrak{E}_z$  und  $\mu \mathfrak{H}_z$  zu beiden Seiten der Grenze dieselben Werte besitzt.

Bezeichnen wir daher die Zugehörigkeit zu den beiden aneinander-grenzenden Medien durch untere Indices 1, 2, so gelten die Grenzbedingungen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_{x1} &= \mathfrak{H}_{x2}, & \mathfrak{H}_{y1} &= \mathfrak{H}_{y2}, & \mu_1 \mathfrak{H}_{z1} &= \mu_2 \mathfrak{H}_{z2}, \\ \mathfrak{E}_{x1} &= \mathfrak{E}_{x2}, & \mathfrak{E}_{y1} &= \mathfrak{E}_{y2}, & \varepsilon_1 \mathfrak{E}_{z1} &= \varepsilon_2 \mathfrak{E}_{z2}. \end{aligned} \quad (26)$$

Diese Grenzbedingungen, welche die Stetigkeit der tangentiellen Kraftkomponenten und eine bestimmte Unstetigkeit der normalen Kraftkomponenten beim Durchgang durch die Grenze aussprechen, haben wir früher aus anderen Betrachtungen abgeleitet (vgl. S. 68—70 und S. 167 bis 168). Die Gleichungen (20) und (21) sind also auch in der Hinsicht vollständig, daß sie die Grenzbedingungen ebenfalls in sich enthalten. Es ist dies ein Vorteil, der allen Nahwirkungsgesetzen anhaftet, welche auch für inhomogene Medien Gültigkeit besitzen, welcher jedoch abgeht einer mathematischen Darstellung der Erscheinungen durch Fernwirkungsgesetze, die aus Beobachtungen in homogenen Medien abgeleitet sind.

Aus diesem Grunde ist die Erforschung der Nahwirkungsgesetze zur mathematischen Beschreibung der Erscheinungen in besserer Weise geeignet, als die sich zunächst darbietenden Fernwirkungsgesetze.

Während es nach den angestellten Ueberlegungen für die Erscheinungen ganz gleichgültig sein muß, durch welche Zwischenwerte hindurch der Uebergang von  $\varepsilon_1$  in  $\varepsilon_2$  und von  $\mu_1$  in  $\mu_2$  erfolgt, wenn derselbe in einer unendlich dünnen Schicht erfolgt, kommen die Zwischenwerte wohl in Betracht, wenn die Uebergangsschicht nicht mehr als unendlich dünn anzusehen ist. Dies tritt bei der Behandlung optischer Versuche deutlicher hervor.

Die in diesem Abschnitte aufgestellten Gleichungen sind für die Maxwell'sche Theorie des elektromagnetischen Feldes charakteristisch. Sie basieren allein auf der Hypothese, daß die allgemeinen Eigenschaften des magnetischen Feldes (vgl. Kapitel II) immer dieselben sind, d. h. daß sie unabhängig von der Art der elektrischen Strömungen in den Wirbelräumen des Magnetfeldes sind und von der Geschwindigkeit der Stromänderungen im Laufe der Zeit.

## 6. Erweiterung der Gleichungen auf ein leitendes Medium.

Besitzt das Medium eine durch  $\sigma$  charakterisierte Leitfähigkeit (siehe Kapitel VI, Abschnitt 4), so wird der ganze elektrische Strom in ihm im allgemeinsten Falle aus der Summe des Leitungsstromes und des Verschiebungsstromes bestehen. Da für den Leitungsstrom die Gleichungen (27) des VI. Kapitels, Abschnitt 7, bestehen:

$$j_x = \sigma \mathfrak{E}_x, \quad j_y = \sigma \mathfrak{E}_y, \quad j_z = \sigma \mathfrak{E}_z,$$

so gehen die Gleichungen (15), indem man diese Größen zu den Komponenten des Verschiebungsstromes hinzufügt, über in die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c} \mathfrak{E}_x &= \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z} \\ \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c} \mathfrak{E}_y &= \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x} \\ \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c} \mathfrak{E}_z &= \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Dabei sind wieder die Größen auf der linken Seite, also auch  $\sigma$ , in elektrostatischem, diejenigen auf der rechten in elektromagnetischem Maßsystem gerechnet. Nach Formel (62) in Kapitel VI, Abschnit 11 ist

$$4\pi\sigma = \frac{\varepsilon}{T},$$

wenn  $T$  die dort definierte Relaxationszeit bedeutet. Also kann man obige Gleichungen auch in der Form schreiben:

$$\frac{\varepsilon}{c} \left( \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial t} + \frac{1}{T} \mathfrak{E}_x \right) = \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z} \text{ usw.}$$

Differenziert man die drei Gleichungen nach  $x$ ,  $y$ ,  $z$  und addiert sie, so erhält man an Stelle der für einen Isolator geltenden Gleichung (22) die Gleichung:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial (\varepsilon \mathfrak{E}_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\varepsilon \mathfrak{E}_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\varepsilon \mathfrak{E}_z)}{\partial z} \right] \\ &+ 4\pi \left[ \frac{\partial (\sigma \mathfrak{E}_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\sigma \mathfrak{E}_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\sigma \mathfrak{E}_z)}{\partial z} \right] = 0. \end{aligned}$$

Der in der ersten Klammer stehende Ausdruck ist, wie schon oben (S. 420) bemerkt, gleich  $4\pi\rho$ , wenn  $\rho$  die räumliche Dichte der wahren elektrischen Ladung ist. Nimmt man den Körper als homogen an, d. h.  $\varepsilon$  und  $\sigma$  unabhängig von den Koordinaten, so kann man dieselbe Beziehung auch für die zweite Klammer anwenden und die Gleichung einfach in der Form schreiben:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho}{T} = 0.$$

Diese Gleichung ist identisch mit der Gleichung (60) des VI. Kapitels und drückt noch einmal — in allgemeinerer Ableitung, als sie dort gegeben war — das Gesetz aus, nach dem eine Ladung im Inneren eines Leiters mit der Zeit aus dem Inneren verschwindet.

Wir betrachten noch den Vorgang an der Grenze eines Leiters und eines Nichtleiters. Die elektrische Kraft soll auf der Grenzfläche senkrecht stehen und durch  $\mathfrak{E}_1$  für den Leiter, durch  $\mathfrak{E}_2$  für den Nichtleiter

gegeben sein, entsprechend sollen  $\epsilon_1$ ,  $\sigma_1$  die Konstanten des Leiters,  $\epsilon_2$  diejenige des Isolators ( $\sigma_2 = 0$ ) sein. Nach der Maxwellschen Auffassung setzt sich der Gesamtstrom, der im Leiter nach der Grenzfläche hinfließt, jenseits der Grenzfläche im Isolator als Verschiebungsstrom von gleicher Stärke, also von gleicher magnetischer Wirkung fort. Daher folgt aus den Gleichungen (27) ohne weiteres:

$$\epsilon_1 \frac{\partial \mathfrak{E}_{n1}}{\partial t} + 4\pi \sigma_1 \mathfrak{E}_{n1} = \epsilon_2 \frac{\partial \mathfrak{E}_{n2}}{\partial t}$$

oder

$$4\pi j_{n1} = \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_2 \mathfrak{E}_{n2} - \epsilon_1 \mathfrak{E}_{n1}).$$

Dabei ist die Richtung der Normale  $n$  in beiden Medien nach derselben Richtung, nämlich nach der Richtung des Stromes gerechnet. Nun haben wir in Kapitel I, Abschnitt 32, S. 69 die Beziehung abgeleitet:

$$\mathfrak{D}_{n1} - \mathfrak{D}_{n2} = \epsilon_1 \mathfrak{E}_{n1} - \epsilon_2 \mathfrak{E}_{n2} = 4\pi \eta,$$

wenn  $\eta$  die wahre Flächenladung auf der Grenzfläche bedeutet, und die Normale  $n$  in das Medium 1, in unserem Falle also in den Leiter, hinein positiv gerechnet wird. Daraus folgt also:

$$j_{n1} = - \frac{\partial \eta}{\partial t}.$$

Ist der Strom im Leiter von der Grenzfläche fortgerichtet, so nimmt die wahre Ladung der Grenzfläche um die abströmende Elektrizitätsmenge ab; ist er nach der Grenzfläche hingerrichtet ( $j_{n1}$  negativ), so wächst die wahre Ladung der Grenzfläche um die hinzuströmende Elektrizitätsmenge. Diese Formel drückt nur noch einmal in anderer Form die Grundlage der Maxwellschen Theorie aus, die Vorstellung von dem Stromcharakter, der zeitlichen Aenderungen eines elektrischen Feldes zukommt.

## 7. Einwirkung geschlossener Solenoide aufeinander.

Nach Kapitel III, Abschnitt 18, S. 259 wirken zwei ringförmig geschlossene Solenoide, welche von konstanten Strömen durchflossen werden, nicht aufeinander ein. Dagegen muß eine ponderomotorische Kraft zwischen ihnen auftreten, falls die Solenoide von veränderlichen oder Wechselströmen hoher Wechselzahl durchflossen werden. Denn in diesem Falle existiert im Inneren der Solenoide eine magnetische Strömung, d. h. eine Aenderung der magnetischen Kraft im Laufe der Zeit, und wie die Gleichungen (21) lehren, muß ein Ring magnetischer Strömung in ähnlicher Weise elektrische Kräfte ausüben, wie nach den Gleichungen (20) ein Ring elektrischer Strömung magnetische Kräfte ausübt. Ein von Wechsel-



strömen durchflossenes, ringförmig geschlossenes Solenoid muß also elektrische Kräfte ausüben wie eine vom Solenoid umgrenzte elektrische Doppelfläche, deren Moment in jedem Augenblicke von der Geschwindigkeit der Stromänderung abhängt. Nach diesem Gesichtspunkte ist die gegenseitige Einwirkung zweier, von Wechselströmen durchflossener, geschlossener Solenoiden zu berechnen. Wie sofort ersichtlich ist, hängt diese Einwirkung wesentlich von der Phasendifferenz beider Wechselströme gegeneinander ab, gerade wie bei einem gewöhnlichen Elektrodynamometer.

Wirklich beobachtet ist bisher die Wechselwirkung zwischen zwei derartigen Solenoiden noch nicht. Die Wechselströme müssen sehr schnell wechseln, um merkbare Wirkung zu erzielen, weil die linke Seite von (21), aus der sich das Moment der äquivalenten elektrischen Doppelfläche berechnet, die große Zahl  $c$  im Nenner enthält. Dagegen ist es K. Henrich<sup>1)</sup> in jüngster Zeit gelungen, die Existenz elektrostatischer Wirkungen in der Umgebung eines von Wechselströmen durchflossenen, ringförmig geschlossenen Solenoids nachzuweisen. Er hängte zwischen zwei parallel nebeneinander stehenden, in passender Weise bewickelten Ringen aus lamelliertem Eisen an einem dünnen Quarzfaden eine kurze Nadel aus einem dielektrischen Stoff (Glas, Kolophonium) so auf, daß ihre Längsrichtung mit der gemeinsamen Achse der beiden Ringe einen Winkel von  $45^\circ$  bildete. Eine in Richtung der Achse wirkende elektrische Kraft wird die Nadel dielektrisch polarisieren und die polarisierte Nadel zugleich nach der Richtung der Achse abzulenken suchen, entsprechend den in Abschnitt 44 des I. Kapitels gemachten Ausführungen. Bei der von Henrich benutzten geringen Wechselzahl (60 in der Sekunde) waren die Wirkungen nur sehr gering, konnten aber beobachtet werden.

## 8. Die Poyntingsche Formel für den Energiefluß im elektromagnetischen Felde.

Wenn man die Formeln (20) und (21) beziehungsweise mit den Faktoren  $\mathfrak{E}_x dv$ ,  $\mathfrak{E}_y dv$ ,  $\mathfrak{E}_z dv$ ,  $\mathfrak{H}_x dv$ ,  $\mathfrak{H}_y dv$ ,  $\mathfrak{H}_z dv$  multipliziert, wobei  $dv$  ein Volumenelement bedeutet, und über einen beliebigen Bereich integriert, so erhält man:

$$\frac{1}{c} \left\{ \epsilon \left( \mathfrak{E}_x \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial t} + \mathfrak{E}_y \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t} + \mathfrak{E}_z \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t} \right) dv + \int \mu \left( \mathfrak{H}_x \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial t} + \mathfrak{H}_y \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial t} + \mathfrak{H}_z \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t} \right) dv \right\} \\ = \int \left( \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z} \right) \mathfrak{E}_x dv + \dots + \int \left( \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial y} \right) \mathfrak{H}_x dv + \dots \quad (28)$$

<sup>1)</sup> K. Henrich, Dissertation, Marburg 1910; vgl. dort auch die Literaturangaben über ältere Versuche zum Nachweis der betrachteten Erscheinung.

Nun ist nach dem Gaußschen Satz (I, 15, S. 32):

$$\int \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y} \mathfrak{E}_x \, dv = - \int \mathfrak{H}_z \mathfrak{E}_x \cos(ny) \, ds - \int \mathfrak{H}_z \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial y} \, dv,$$

falls  $ds$  ein Flächenelement der Oberfläche desjenigen Raumes bedeutet, über welchen die Integration erstreckt wird, und  $n$  die innere Normale auf  $ds$ . Wendet man diesen Satz an auf die ersten drei Integrale, welche auf der rechten Seite von (28) auftreten, so heben sich die dabei entstehenden Raumintegrale gegen die letzten drei Integrale auf der rechten Seite von (28) fort. Da die linke Seite von (28) infolge der Gleichung (25) proportional zu dem Differentialquotienten der elektromagnetischen Energie  $W + T$  ist, welche der betrachtete Raum enthält, so folgt daher:

$$\frac{\partial (W + T)}{\partial t} = \frac{c}{4\pi} \int [(\mathfrak{H}_z \mathfrak{E}_y - \mathfrak{H}_y \mathfrak{E}_z) \cos(nx) + (\mathfrak{H}_x \mathfrak{E}_z - \mathfrak{H}_z \mathfrak{E}_x) \cos(ny) + (\mathfrak{H}_y \mathfrak{E}_x - \mathfrak{H}_x \mathfrak{E}_y) \cos(nz)] \, ds. \quad (29)$$

Den Sinn dieser Formel kann man so auslegen, daß die Aenderung der elektromagnetischen Energie eines Raumes dadurch herbeigeführt wird, daß dieselbe in seine Begrenzungsfläche ein- bzw. ausströmt. Als Komponenten  $\mathfrak{S}_x$ ,  $\mathfrak{S}_y$ ,  $\mathfrak{S}_z$  dieses Energieflusses können nach (29) angesehen werden:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_x &= \frac{c}{4\pi} (\mathfrak{H}_z \mathfrak{E}_y - \mathfrak{H}_y \mathfrak{E}_z), \\ \mathfrak{S}_y &= \frac{c}{4\pi} (\mathfrak{H}_x \mathfrak{E}_z - \mathfrak{H}_z \mathfrak{E}_x), \\ \mathfrak{S}_z &= \frac{c}{4\pi} (\mathfrak{H}_y \mathfrak{E}_x - \mathfrak{H}_x \mathfrak{E}_y). \end{aligned} \quad (30)$$

Da hiernach die Beziehungen bestehen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_x \cdot \mathfrak{E}_x + \mathfrak{H}_y \cdot \mathfrak{E}_y + \mathfrak{H}_z \cdot \mathfrak{E}_z &= 0, \\ \mathfrak{E}_x \cdot \mathfrak{S}_x + \mathfrak{E}_y \cdot \mathfrak{S}_y + \mathfrak{E}_z \cdot \mathfrak{S}_z &= 0, \end{aligned}$$

so steht die Bahn des Energieflusses in jedem Punkte senkrecht auf der dort vorhandenen magnetischen und elektrischen Kraft. Lassen sich beide Kräfte je aus einem Potential ableiten, so ist die Bahn des Energieflusses die Schnittlinie der elektrischen und der magnetischen Niveaufläche. Die Größe des Energieflusses, d. h. die in der Sekunde durch die Flächeneinheit strömende Energie, ist nach (30) zu schreiben in der Form:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} &= \sqrt{\mathfrak{S}_x^2 + \mathfrak{S}_y^2 + \mathfrak{S}_z^2} = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\mathfrak{H}_x^2 + \mathfrak{H}_y^2 + \mathfrak{H}_z^2} \cdot \sqrt{\mathfrak{E}_x^2 + \mathfrak{E}_y^2 + \mathfrak{E}_z^2} \\ &\cdot \sqrt{1 - \frac{(\mathfrak{H}_x \mathfrak{E}_x + \mathfrak{H}_y \mathfrak{E}_y + \mathfrak{H}_z \mathfrak{E}_z)^2}{(\mathfrak{H}_x^2 + \mathfrak{H}_y^2 + \mathfrak{H}_z^2)(\mathfrak{E}_x^2 + \mathfrak{E}_y^2 + \mathfrak{E}_z^2)}} = \frac{c}{4\pi} \mathfrak{H} \mathfrak{E} \sin(\mathfrak{H} \mathfrak{E}), \end{aligned} \quad (31)$$

d. h. der Energiefluß ist gleich  $c:4\pi$  multipliziert mit dem Produkte aus der magnetischen und der elektrischen Kraft und dem Sinus des Winkels, welchen letztere miteinander bilden.

Diese Theorie der Bewegung der Energie im elektromagnetischen Felde ist von Poynting<sup>1)</sup> aufgestellt.

Die Formel (31) drückt die Beziehung zwischen den drei Richtungsgrößen  $\mathfrak{S}$ ,  $\mathfrak{H}$  und  $\mathfrak{E}$  in derselben Form aus, wie die Formel (98) im Kapitel III (S. 285) die Beziehung zwischen  $P$ ,  $\mathfrak{H}$  und  $idl$  in dem Fall der ponderomotorischen Wirkung eines Magnetfeldes auf ein Stromelement. Wenn die elektrische Kraft senkrecht zur magnetischen Kraft steht, so wird daher die positive Richtung des Energieflusses nach der dort gegebenen Flemmingschen Regel durch den Daumen der linken

Hand gewiesen, wenn die magnetische Kraft durch den Zeigefinger, die elektrische Kraft durch den Mittelfinger gewiesen werden.

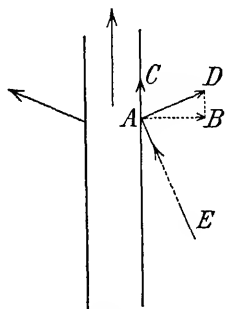


Fig. 50.

Der Sinn dieser von Poynting entwickelten Vorstellung über die Wanderung der elektromagnetischen Energie möge zunächst an einigen Beispielen erläutert werden. In einem elektrostatischen Felde, in dem keine magnetischen Kräfte vorhanden sind, und ebenso in einem magnetostatischen Felde ohne elektrische Kräfte ist keine Energieströmung vorhanden, da einmal  $\mathfrak{H}$ , das andere Mal  $\mathfrak{E} = 0$

ist; die Energie ist hier unveränderlich im Raume verteilt. In einem stationären Felde ist das letztere auch noch der Fall. Aber es sind zugleich elektrische und magnetische Kräfte vorhanden, und zwar in solcher Lage zueinander, daß  $\sin(\mathfrak{H}, \mathfrak{E})$  im allgemeinen nicht gleich Null ist. Hier muß also nach der Poyntingschen Vorstellung Energieströmung stattfinden. Da aber der Energieinhalt jedes Teiles des Isolators dabei unverändert bleibt, so muß in jedes abgeschlossene Volumen des Isolators so viel Energie von einer Seite einströmen, wie nach anderen Seiten ausströmt. Wir betrachten genauer den Zustand in der Umgebung eines stromdurchflossenen, geraden Drahtes. Wäre der Draht statisch geladen, so würde die elektrische Kraft im Isolator auf der Oberfläche des Drahtes senkrecht stehen. Da ein Strom in ihm fließen soll (von unten nach oben in der Zeichnung, Fig 50), so besteht zugleich ein Potentialgefälle in Richtung des Stromes, also eine Kraftkomponente  $AC$ , die tangential zur Oberfläche in der Längsrichtung des Drahtes verläuft. Die elektrische Kraft in der unmittelbaren Umgebung des Drahtes muß also eine in Richtung des Stromes

<sup>1)</sup> J. H. Poynting, Philos. Transact. 1884, 2, S. 343.

nach vorn geneigte Richtung gegen die Drahtoberfläche besitzen, etwa wie A.D. Die magnetische Kraft läuft in konzentrischen Kreisen um den Draht herum, steht also überall senkrecht auf der elektrischen Kraft; daher ist  $\sin(\mathfrak{E}\mathfrak{H}) = 1$ . Berücksichtigt man nun die Ampèresche Regel für die Richtung der magnetischen Kräfte (S. 233) und die oben ausgesprochene Regel für die Richtung der Energieströmung, so sieht man, daß in der Umgebung des Drahtes eine Energieströmung vorhanden sein muß, deren Richtung durch den Pfeil A.E. in der Figur gegeben sein muß. Da diese Richtung schief zur Drahtoberfläche steht, so wird offenbar ein Teil dieser Energieströmung in den Draht eintreten, ein anderer Teil an ihm entlang laufen. Wir berechnen den Betrag des ersten Teiles für ein Stück des Drahtes von der Länge  $dl$ . Diese Komponente des Energiestromes ist für die Flächeneinheit offenbar durch den Ausdruck  $\frac{c}{4\pi} \mathfrak{H} \mathfrak{E}_t$  gegeben, wenn  $\mathfrak{H}$  die magnetische Kraft an der Drahtoberfläche und  $\mathfrak{E}_t$  die in die Drahtrichtung fallende tangentielle Komponente der elektrischen Kraft ist. Hat der Draht den Radius  $r$ , so ist also die in einer Sekunde in das Drahtstück von der Länge  $dl$  eintretende Energiemenge gegeben durch:

$$\frac{c}{4\pi} \mathfrak{H} \cdot \mathfrak{E}_t \cdot 2\pi r dl. \quad (32)$$

Nun ist nach Kapitel III, Abschnitt 14, Formel (41a) (S. 246), wenn  $i$  die Stromstärke im Draht bedeutet,

$$\mathfrak{H} = \frac{2i}{r};$$

$\mathfrak{E}_t dl$  aber ist die elektrostatisch gemessene Potentialdifferenz der Endquerschnitte des Drahtstückes  $dl$ ,  $dE_e$ ,  $c\mathfrak{E}_t dl$  daher nach Kapitel VI, Abschnitt 6, Formel (26) (S. 365) die im elektromagnetischen Maßsystem gemessene Potentialdifferenz  $dE_m$ . Also läßt sich der obige Ausdruck in der Form schreiben:  $i dE_m$ . In ein Stück des Drahtes von beliebiger Länge, an dessen Enden die Potentialdifferenz  $E$  wirksam ist, tritt also in  $t$  Sekunden die Energiemenge  $W = Eit$  durch die Oberfläche des Drahtes ein. Dabei ist  $E$  in demselben magnetischen Maßsystem wie  $i$  gemessen. Ebensogut aber könnten beide im elektrostatischen Maßsystem oder im praktischen Maßsystem, d. h. in Volt und Ampere, gemessen sein; immer fällt der Faktor  $c$  der Formeln (30) und (31) heraus, sobald man beide Größen auf ein einziges Maßsystem zurückführt, und immer ist durch das Produkt  $Eit$  die Energie gegeben, und zwar im mechanischen Maße, in Erg, wenn man das elektrostatische oder das elektromagnetische Maßsystem anwendet, und in  $10^7$  Erg, in Joule oder Wattsekunden, wenn man das praktische Maßsystem benutzt. Der Aus-

druck (32) aber ist nichts anderes als der im VI. Kapitel, Abschnitt 3, Formel (6) aus ganz anderen Ueberlegungen abgeleitete Ausdruck für die Stromarbeit, der bei stationärem Strom die im Stromleiter entwickelte Wärme äquivalent ist. Im Sinne der Poyntingschen Auffassung wandert also beim stationären Strome diejenige Energie, die im Drahte in Joulesche Wärme verwandelt wird, aus dem umgebenden Isolator in den Draht hinein<sup>1)</sup>. Auch innerhalb des Drahtes kann man noch von einer Wanderung der elektromagnetischen Energie von der Oberfläche nach der Mitte zu sprechen, da ja auch hier noch elektrische und magnetische Kräfte vorhanden sind; nur muß man dazu die Poyntingsche Darstellung auf leitende Medien ausdehnen, bei denen infolge der Entstehung Joulescher Wärme die aus einem abgeschlossenen Volumen austretende elektromagnetische Energie natürlich nicht gleich der eintretenden ist, sondern gleich dieser vermindert um die in Wärme umgesetzte Energie.

Das behandelte Problem bedarf aber einer Vervollständigung durch eine Betrachtung der Quellen, von denen die durch den Isolator wandernde und in den Draht eindringende Energie ausgeht. Wir wollen annehmen, daß die Strömung im Draht durch die Entladung eines Kondensators erzeugt werde, ein Fall, der zwar kein streng stationärer ist, den wir aber als solchen annähernd behandeln können, wenn Kapazität des Kondensators und Widerstand des die Belege verbindenden Drahtes genügend groß sind (vgl. die Betrachtungen über einen derartigen Fall in Kapitel VI, Abschnitt 11, S. 379). Schematisch würde dann der ganze Stromkreis etwa durch Fig. 51 dargestellt sein, in der A und B die beiden Belege des Kondensators, LMN den Schließungskreis bedeutet.

Denkt man sich zunächst die Platten geladen und isoliert, so bilden die elektrischen Niveauflächen Scharen von Flächen, die die eine oder die andere der beiden Platten umschließen und sämtlich als nahezu parallele Ebenen durch den Zwischenraum zwischen den Platten hindurchgehen. Die dem Aufsätze von Poynting entnommene Figur 51 zeigt den Verlauf der Schnittlinien der elektrischen Niveauflächen mit der Ebene der Zeichnung. Dieser Verlauf der Niveauflächen und der senkrecht zu ihnen stehenden Kraftlinien kann unverändert auch auf den Fall der Entladung durch einen Schließungsdraht übertragen werden, wenn man diesen Draht längs einer Kraftlinie des statischen Feldes laufen läßt und seinen Widerstand für jedes Element des Drahtes proportional der Potentialdifferenz macht, die im statischen Feld zwischen den Endpunkten des Elements besteht. Die magnetischen Kraftlinien umschlingen den Draht in der durch die gekrümmten Pfeile angedeuteten Richtung.

---

<sup>1)</sup> Eine genauere Rechnung darüber hat G. Mie angestellt, Zeitschr. f. physikal. Chemie 34, S. 522, 1900.

Zwischen den Kondensatorplatten besteht der Verschiebungsstrom in derselben Richtung wie im Draht der Leitungsstrom. Das magnetische Kraftfeld zwischen den Platten ist daher von derselben Art wie im Inneren eines gleichförmig durchströmten Leiters (siehe Kapitel III, Abschnitt 14, S. 246). Die Kraftlinien sind Kreise, die die Achse des Kondensators in demselben Sinne umschlingen wie außerhalb des Kondensators den Draht. Die elektrischen Kraftlinien dagegen haben im Kondensator die entgegengesetzte Richtung wie längs des Drahtes. Berücksichtigt man dies, so ist aus der Anwendung der Regel für die Richtung des Poyntingschen Energieflusses sofort ersichtlich, daß die Energie aus dem Kondensator, in dessen Dielektrikum sie anfänglich

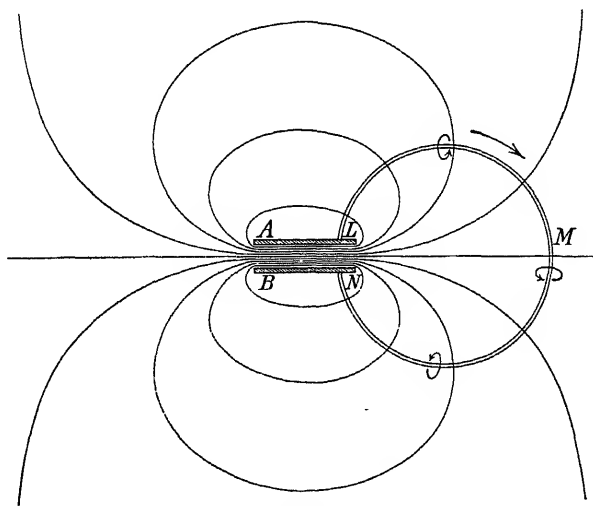


Fig. 51.

konzentriert ist, längs der Niveauflächen herausströmt und auf diesen Flächen nach dem Drahte wandert, in dem sie in Wärme verwandelt wird.

Wird der Strom durch ein Element — eine Hydrokette oder ein Thermoelement — getrieben, so liegt die Quelle der Energie in den Potentialdifferenzen, die zwischen zwei sich berührenden Körpern bestehen (siehe Kapitel VI, Abschnitt 1, S. 352). Infolge dieser bedecken sich die Grenzflächen mit elektrischen Doppelschichten (siehe Kapitel I, Abschnitt 36, S. 77), die wie die Belegungen eines Kondensators wirken. Geht der Strom durch die Doppelschicht hindurch entgegen dem Potentialgefälle, das in ihr besteht — z. B. im Daniellschen Element vom Zink zur Schwefelsäure —, so wird elektromagnetische Energie gewonnen. Sie wandert nach der Poyntingschen Auffassung in derselben Weise, wie oben aus dem Kondensator, aus der Doppelschicht hinaus in das

Dielektrikum und durch dieses zum Draht, in dem sie in Wärme umgesetzt wird. An anderen Kontaktstellen geht der Strom im Sinne des Potentialgefälles durch die Doppelschicht; hier geht elektrische Energie verloren und verwandelt sich in chemische Energie oder in Wärme (Peltierwärme). An dieser Stelle würde nach Poynting die elektromagnetische Energie aus dem Dielektrikum in die Doppelschicht einwandern.

Ein ähnliches Einwandern der Energie in einen Kondensator im Gegensatz zu dem oben erörterten Auswandern werden wir im nächsten Kapitel beim Thomsonschen Schwingungskreis kennen lernen. Hinsichtlich der genaueren Durchführung der angeführten Beispiele muß auf die Originalarbeit von Poynting verwiesen werden.

Auf eigentümliche Folgerungen führt die Poyntingsche Auffassung, wenn man sie nicht auf die Formel (29), sondern auf die Formel (31) stützt, und diese dahin auslegt, daß in einem Felde, in dem gleichzeitig magnetische und elektrische Kräfte vorhanden sind, deren Richtungen nicht überall zusammenfallen, stets Energieströmungen auftreten müssen. Man kann in demselben Raum gleichzeitig ein elektrostatisches und ein magnetostatisches Feld erzeugen. Es mögen z. B. zwei koaxiale Zylinder entgegengesetzt geladen werden und gleichzeitig mögen die Kraftlinien eines homogenen Magnetfeldes den Zwischenraum zwischen den Zylindern parallel zur Zylinderachse durchsetzen. Hier stehen überall magnetische und elektrische Kraftlinien senkrecht aufeinander, und es müßte im Sinne der angedeuteten Auffassung ein dauerndes Zirkulieren der elektromagnetischen Energie im zylindrischen Zwischenraum des Kondensators stattfinden. Ähnlich müßte bei jeder Ueberlagerung eines elektrostatischen mit einem magnetostatischen Felde ein Strömen der Energie in geschlossenen Bahnen vor sich gehen. Physikalisch würde ein solcher Vorgang keine Bedeutung haben, da er ja überhaupt nicht wahrzunehmen ist. Mathematisch aber läßt sich das eigentümliche Resultat dadurch erklären, daß der Poyntingsche Vektor  $\mathfrak{S}$  durch die Gleichung (29) nicht eindeutig definiert ist. Denn man kann zu den durch die Gleichungen (30) definierten Komponenten dieses Vektors ja noch beliebige Komponenten eines anderen Vektors  $\mathfrak{T}$  hinzufügen, der nur der Bedingung genügen muß, daß seine Strömung durch jede beliebige geschlossene Fläche  $\int_{\mathfrak{T}_n} dS = 0$  ist. Das ist aber diejenige Bedingung, der die Energieströmung in geschlossenen Bahnen genügt. Solche Energieströmungen, bei denen wirkliche Aenderungen der räumlichen Energieverteilung gar nicht stattfinden, lassen sich also ganz nach Willkür zu den wirklichen Aenderungen der Energie hinzudenken. Eine eindeutige Bedeutung hat die Poyntingsche Auffassung nur für die letzteren, für die Fälle, in denen wirkliche räumliche Energieverlage-

rungen stattfinden. Wenn wir sie oben auf das stationäre Feld, in dem die Energieverteilung im Dielektrikum auch konstant ist, angewandt haben, so hat dies seine Berechtigung darin, daß hier im ganzen doch eine räumliche Energieverlagerung stattfindet, da ja dauernd elektromagnetische Energie im Leiter in Wärme verwandelt wird und dauernd an anderen Stellen dafür elektromagnetische Energie erzeugt werden muß; auch ist der stationäre Zustand ja nur ein Zustand dynamischen Gleichgewichtes, der aus einem nicht stationären asymptotisch hervorgeht. Man wird also die Poyntingsche Auffassung nicht so formulieren, daß jedes Zusammenwirken von elektrischen und magnetischen Kräften eine Energieströmung im Sinne der Formel (30) und der Poyntingschen Regel bedingt, sondern daß eine Energieströmung, wenn sie stattfindet, sich immer im Sinne der Poyntingschen Regel und der Formel (31) vollzieht. Seine wichtigste Anwendung findet der von Poynting eingeführte Vektor bei der Wanderung der Energie in Form elektromagnetischer Wellen, die wir im nächsten Abschnitt behandeln.

## 9. Die Fortpflanzung ebener elektromagnetischer Wellen in einem homogenen Isolator.

Differenziert man die erste der Gleichungen (20) nach  $t$ , so entsteht:

$$\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial t}.$$

Setzt man in dieser Gleichung für  $\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t}$  und  $\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial t}$  ihre aus der zweiten und dritten der Gleichungen (21) folgenden Werte ein, so erhält man:

$$\frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_y}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_z}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial z^2},$$

was man auch in der Form schreiben kann:

$$\frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial t^2} = \Delta \mathfrak{E}_x - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial z} \right). \quad (33)$$

Nun ist nach (22), in welcher Gleichung  $\varepsilon$  von  $x$ ,  $y$ ,  $z$  als unabhängig anzusehen ist, da das Medium homogen sein soll,  $\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial z}$  eine von der Zeit unabhängige Konstante. Wir wollen aber jetzt

nur die Gesetze desjenigen Bestandteiles der elektrischen und magnetischen Kraft untersuchen, welcher von der Zeit abhängt. Es ist dann obiger Ausdruck ganz beiseite zu lassen, und es wird die Gleichung (33):



$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial t^2} = \Delta \mathfrak{E}_x. \quad (34)$$

Ganz analog gebaute Gleichungen gelten für  $\mathfrak{E}_y$ ,  $\mathfrak{E}_z$ , und da die Gleichungen (20) und (21) hinsichtlich der elektrischen und magnetischen Kräfte symmetrisch gebaut sind, auch für  $\mathfrak{H}_x$ ,  $\mathfrak{H}_y$ ,  $\mathfrak{H}_z$ .

Wir wollen nun annehmen, daß die elektrischen Kräfte für jeden Wert der Zeit  $t$  denselben Wert besitzen auf einander parallelen Ebenen. In welcher Weise man experimentell diesen Fall verwirklichen kann, soll im nächsten Kapitel besprochen werden. Wählt man die zu allen Ebenen gemeinsame Normale zur  $z$ -Achse, so können nach unserer Voraussetzung die  $\mathfrak{E}_x$ ,  $\mathfrak{E}_y$ ,  $\mathfrak{E}_z$  nur von  $z$  und  $t$  abhängen. Dann folgt aus dem System (21), daß auch  $\mathfrak{H}_x$ ,  $\mathfrak{H}_y$ ,  $\mathfrak{H}_z$  nur von  $z$  und  $t$  abhängen können. Aus den letzten der Gleichungen (20) und (21) folgt dann ferner, daß sowohl  $\mathfrak{E}_z$  als auch  $\mathfrak{H}_z$  von der Zeit unabhängige Werte besitzen müssen, also für unsere Betrachtungen außer acht gelassen werden können.

Die Gleichung (34) geht jetzt über in:

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial z^2}, \quad (35)$$

deren allgemeines Integral ist:

$$\mathfrak{E}_x = f_1 \left( z - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} t \right) + f_2 \left( z + \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} t \right), \quad (36)$$

wobei  $f_1$  und  $f_2$  irgendwelche beliebige Funktionen ihrer in den beigesetzten Klammern stehenden Argumente bedeuten.

Die Formel (36) stellt die Uebereinanderlagerung zweier ebener Wellenzüge dar, von denen der eine nach der positiven  $z$ -Achse, der andere nach der negativen  $z$ -Achse sich mit der Geschwindigkeit  $c : \sqrt{\varepsilon\mu}$  fortpflanzt.

In der Tat, hat  $f_1 \left( z - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} t \right)$  einen gewissen Wert  $A$  für  $z = 0$ ,  $t = 0$ , so muß es denselben Wert  $A$  besitzen für  $t = t_1$ ,  $z = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} t_1$ , d. h. nach Ablauf der Zeit  $t_1$  hat sich der Wert  $A$  von  $\mathfrak{E}_x$  um die Strecke  $\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} t_1$  nach der positiven  $z$ -Richtung fortgepflanzt. Die Geschwindigkeit dieser Fortpflanzung ist also  $\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ . Man nennt diese Wellenbewegung eine Transversalwelle, da nur Kraftkomponenten existieren, welche senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung liegen.

Im leeren Raum ist  $\varepsilon = \mu = 1$ . Daher die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Welle gleich  $c$ . Für diese Größe aber, die als das Verhältnis der elektromagnetischen und elektrostatischen

Einheit der Stromstärke definiert ist, haben die Messungen (siehe Kapitel VI, Abschnitt 6, S. 363) einen Wert ergeben, der gleich der Lichtgeschwindigkeit ist. Daher hat Maxwell aus seiner Theorie den fundamentalen Schluß gezogen, daß sich elektromagnetische Wellen im leeren Raum mit der Lichtgeschwindigkeit fortpflanzen.

Bezeichnen wir die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen in einem Mittel von der Permeabilität  $\mu$  und der Dielektrizitätskonstante  $\epsilon$  mit  $c'$ , so ist das Verhältnis  $\frac{c}{c'} = \sqrt{\epsilon\mu}$ . Dies

Verhältnis der Fortpflanzungsgeschwindigkeit im leeren Raum zu der in dem betreffenden Mittel ist diejenige Größe, die man in der Optik als Brechungsexponenten bezeichnet. Benutzen wir auch hier das Zeichen  $n$  dafür, so ist

$$n^2 = \epsilon\mu.$$

Da für die meisten Mittel  $\mu$  sehr nahe gleich 1,  $\epsilon$  dagegen stark von 1 verschieden ist, so verlangt die Theorie, daß  $n^2 = \epsilon$ , d. h. daß das Quadrat des Brechungsexponenten der elektromagnetischen Wellen gleich der Dielektrizitätskonstante ist. Das ist die von Maxwell aufgestellte Beziehung.

Da für  $\mathfrak{E}_y$  eine der Gleichung (35) ganz analoge Gleichung gilt, so folgt

$$\mathfrak{E}_y = \varphi_1 \left( z - \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} t \right) + \varphi_2 \left( z + \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} t \right), \quad (37)$$

wobei  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  zwei neue willkürliche Funktionen ihrer in den beigesetzten Klammern stehenden Argumente bedeuten, welche mit den Funktionen  $f_1$  und  $f_2$  nicht notwendig in Zusammenhang zu stehen brauchen.

Durch die elektrischen Kräfte sind die magnetischen Kräfte bestimmt. Denn aus den beiden ersten Gleichungen des Systems (21) folgt:

$$\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}, \quad \frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial t} = - \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \quad (38)$$

oder, da die Identitäten bestehen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} &= - \frac{\sqrt{\epsilon\mu}}{c} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} &= + \frac{\sqrt{\epsilon\mu}}{c} \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}, \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} &= - \frac{\sqrt{\epsilon\mu}}{c} \frac{\partial f_1}{\partial t}, & \frac{\partial f_2}{\partial z} &= + \frac{\sqrt{\epsilon\mu}}{c} \frac{\partial f_2}{\partial t}, \end{aligned}$$

so läßt sich (38) in der Form schreiben:

$$\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial t} = - \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}, \quad \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial t} = \frac{\partial f_1}{\partial t} - \frac{\partial f_2}{\partial t},$$

woraus man durch Integration sofort gewinnt:

$$\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \mathfrak{E}_x = -\varphi_1 + \varphi_2, \quad \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \mathfrak{E}_y = f_1 - f_2. \quad (39)$$

Auf eine von  $t$  unabhängige Integrationskonstante kommt es nicht an, da wir nur die von  $t$  abhängigen Teile von  $\mathfrak{E}_x$  und  $\mathfrak{E}_y$  untersuchen wollen.

Durch Multiplikation von (39) mit (36) bzw. (37) und darauffolgende Addition ergibt sich:

$$\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} (\mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_x + \mathfrak{E}_y \mathfrak{E}_y) = 2 (f_1 \varphi_2 - f_2 \varphi_1). \quad (40)$$

Wir wollen nun den Spezialfall betrachten, daß sich im Isolator nur ebene Wellen nach einerlei Richtung fortpflanzen, z. B. nach der positiven  $z$ -Achse. Dann ist  $f_2 = \varphi_2 = 0$  zu setzen, und die letzte Gleichung (40) zeigt, daß die magnetische Kraft senkrecht zur elektrischen Kraft liegt. In welchem Sinne die positiven Richtungen dieser Kräfte liegen, ergibt sich aus dem speziellen Falle  $f_1 > 0$ ,  $\varphi_1 = 0$ . Es ist dann  $\mathfrak{E}_x > 0$ ,  $\mathfrak{E}_y = 0$ ,  $\mathfrak{H}_x = 0$ ,  $\mathfrak{H}_y > 0$ , d. h. die positive Richtung der elektrischen Kraft, die der magnetischen Kraft und die der Fortpflanzungsrichtung der Welle liegen so zueinander wie die positive  $x$ -Achse, die positive  $y$ -Achse und die positive  $z$ -Achse. (Für die Lage derselben gilt die S. 21 getroffene Festsetzung.)

Der ausgesprochene Satz bleibt natürlich ebenso gültig, falls die Wellen sich nur nach der negativen  $z$ -Achse fortpflanzen, d. h. falls  $f_1 = \varphi_1 = 0$  ist. Dies erkennt man aus dem Spezialfall  $f_2 > 0$ ,  $\varphi_2 = 0$ , demzufolge ist:  $\mathfrak{E}_x > 0$ ,  $\mathfrak{H}_y < 0$ .

Existieren zwei Wellensysteme gleichzeitig, welche sich nach zwei einander entgegengesetzten Richtungen fortpflanzen, so liegt im allgemeinen die aus beiden Wellen resultierende magnetische Kraft nicht mehr senkrecht gegen die resultierende elektrische Kraft, da im allgemeinen die rechte Seite von (40) nicht verschwindet. Dies tritt aber wieder ein, wenn  $f_1 : \varphi_1 = f_2 : \varphi_2$  ist, was z. B. bei ebenen optischen Wellen stattfindet, welche senkrecht auf einen Spiegel fallen und von ihm reflektiert werden. Sind also ebene elektrische Wellen periodische Funktionen der Zeit, und werden sie von irgendeiner Ebene so reflektiert, daß durch die Reflexion die Amplituden der Wellen der  $\mathfrak{E}_x$  und der  $\mathfrak{E}_y$  in gleichem Verhältnis geschwächt werden, so steht wiederum an jeder Stelle des Raumes die magnetische Kraft senkrecht zu der in demselben Momente dort stattfindenden elektrischen Kraft.

Durch die Uebereinanderlagerung (Interferenz) zweier einander entgegenlaufender Wellen (wir wollen kurz sagen, einer einfallenden Welle und einer reflektierten Welle) der  $\mathfrak{E}_x$  und  $\mathfrak{E}_y$  müssen abwechselnd Maxima und

Minima (stehende Wellen) der elektrischen Kraft entstehen, erstere nämlich an Orten, wo die elektrische Kraft der einfallenden Welle gleichgerichtet ist mit der der reflektierten Welle, letztere dagegen an Orten, wo die einfallende und reflektierte elektrische Kraft entgegengesetzt gerichtet sind. Aus der oben gegebenen Regel über die Lage der magnetischen Kraft zur elektrischen folgt, daß die Maxima der ersteren auf die Minima der letzteren fallen und umgekehrt. Denn ist die elektrische Kraft der einfallenden und reflektierten Welle z. B. gleichgerichtet, so muß nach der dort gegebenen Regel die magnetische Kraft der einfallenden Welle entgegengesetzt gerichtet sein zu der magnetischen Kraft der reflektierten Welle, da die Fortpflanzungsrichtung der einen Welle der der anderen entgegengesetzt ist. Bilden sich also stehende Wellen aus, so fallen die Bäuche der elektrischen Kraft zusammen mit den Knoten der magnetischen Kraft und umgekehrt.

Die magnetische Energie hat den Wert [man vgl. (25)]:

$$T = \frac{\varepsilon}{8\pi} \int [(f_1 - f_2)^2 + (\varphi_1 - \varphi_2)^2] dv,$$

die elektrische Energie:

$$W = \frac{\varepsilon}{8\pi} \int [(f_1 + f_2)^2 + (\varphi_1 + \varphi_2)^2] dv.$$

Für Wellen von einerlei Richtung ( $f_1 = \varphi_1 = 0$  oder  $f_2 = \varphi_2 = 0$ ) ist also die elektrische Energie überall und stets gleich der magnetischen Energie, dagegen liegen bei zwei entgegenlaufenden Wellensystemen die Maxima der elektrischen Energie an denjenigen Stellen, wo die magnetische Energie ein Minimum besitzt und umgekehrt. Dieses Gesetz ist leicht verständlich nach der Regel, welche für die gegenseitige Lage der Knoten und Bäuche der elektrischen und magnetischen Kraft bei stehenden Wellen gegeben ist.

Die gesamte elektromagnetische Energie hat den Wert:

$$W + T = \frac{\varepsilon}{4\pi} \int [f_1^2 + f_2^2 + \varphi_1^2 + \varphi_2^2] dv \quad (41)$$

oder für den Fall, daß nur eine in der Richtung der positiven Z-Achse fortschreitende Welle vorhanden ist ( $f_2 = \varphi_2 = 0$ ):

$$W + T = \frac{\varepsilon}{4\pi} \int (f_1^2 + \varphi_1^2) dv. \quad (42)$$

Wir bilden nun mit Hilfe von (36), (37), (39), (40) die Komponenten des Poyntingschen Vektors nach (30). Es ergibt sich  $\mathfrak{E}_x$  und  $\mathfrak{E}_y = 0$ . Die Energie schreitet nur in der Richtung der Z-Achse fort

Durch die zur Z-Achse senkrecht liegende Flächeneinheit tritt in jeder Sekunde die Energiemenge:

$$\mathfrak{E}_z = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (f_1^2 + \varphi_1^2 - f_2^2 - \varphi_2^2). \quad (43)$$

Dieser Energiestrom besteht, wie die Formel erkennen läßt, aus zwei Teilen: einem, der in der Richtung der positiven Z-Achse, und einem, der in der Richtung der negativen Z-Achse strömt. Ist nur der in der positiven Z-Achse fortschreitende Wellenzug vorhanden ( $f_2 = \varphi_2 = 0$ ), so erfolgt auch der Energiestrom nur in der Richtung der positiven Z-Achse. Das stimmt überein mit dem, was S. 428 über die Richtung des Energiestroms und S. 436 über die Richtung der Fortpflanzung des Wellenzuges im Verhältnis zur Richtung der elektrischen und der magnetischen Kraft gesagt ist. Der in einer Richtung fortschreitende Wellenzug stellt also zugleich einen Strom von Energie nach derselben Richtung vor. Für ein Flächenelement der XY-Ebene ( $z = 0$ ) ist die in der Zeit  $t$  hindurchströmende Energie durch das Integral

$$\frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \int_0^t (f_1^2 + \varphi_1^2) dx dy dt \quad (44)$$

gegeben, das bei passend gewähltem Anfangspunkt der Zeit über die Zeit von 0 bis  $t$  zu erstrecken ist. Nun hängen nach (36) und (37)

$f_1$  und  $\varphi_1$  ab von der Größe  $\left(z - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} t\right)$ . Man kann daher, ohne den Wert des Integrals zu ändern, die Integration nach  $t$  ersetzen durch eine Integration nach  $z$ , wenn man beachtet, daß

$$dt = - \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c} dz$$

ist und die Grenzen entsprechend wählt. Dann geht der obige Ausdruck über in

$$\frac{\varepsilon}{4\pi} \int_{z = -\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} t}^0 (f_1^2 + \varphi_1^2) dx dy dz \quad (45)$$

Dieses Integral aber ist identisch mit dem Raumintegral (42), wenn man dieses Integral über einen Zylinder ausgeführt denkt, der sich von der XY-Ebene aus nach der negativen Seite der Z-Achse auf die Länge

$z = -\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} t$  mit dem Querschnitt  $dx dy$  erstreckt. Die Länge dieses Zylinders ist die Strecke, die der Wellenzug in der Zeit  $t$  durchläuft.

Man kann also sagen, die Energie, die in diesem Zylinder enthalten war, ist in der Zeit  $t$  durch den Endquerschnitt des Zylinders hindurchgegangen. Diese Ueberlegung verdeutlicht, wie die Energie von der Welle weitergetragen wird und mit ihr zusammen fortschreitet.

Das hier behandelte Problem ist das Grundproblem der elektromagnetischen Strahlung. Die Bahnen, auf denen die elektromagnetische Energie mit der elektromagnetischen Welle fortschreitet, sind identisch mit den Lichtstrahlen der Optik. Man hat daher dem Poyntingschen Vektor den Namen Strahlungsvektor gegeben.

---

## Kapitel VIII.

# Elektrische Schwingungen.

### 1. Einleitung.

Das im vorigen Kapitel abgeleitete Resultat, daß eine zeitliche Aenderung der elektrischen oder der magnetischen Kraft sich als Transversalwelle mit der endlichen Geschwindigkeit  $c: \sqrt{\epsilon \mu}$ , also im freien Aether mit der Geschwindigkeit  $c$ , fortpflanzt, unterscheidet die hier aufgestellte Maxwellsche Theorie von allen älteren Theorien der Elektrizität. Es geht daraus hervor, daß die Untersuchung der Frage, ob sich eine elektrische Störung zeitlos oder mit einer gewissen endlichen Geschwindigkeit und mit welcher im Luftraume ausbreite, von außerordentlichem theoretischem Interesse ist. Die Lösung dieses Problems hat aber lange Zeit große Schwierigkeiten bereitet. Von den telegraphischen Wirkungen wußte man zwar schon seit vielen Jahren, daß dieselben sich sehr schnell in einem Leitungsdrahte verbreiten; auch macht es nicht allzu große Schwierigkeiten, die Gesetze der Ausbreitung der telegraphischen Wirkungen experimentell zu ermitteln, wie die Versuche von Siemens<sup>1)</sup> und anderen beweisen.

Indes haben diese Versuche nicht das theoretische Interesse, daß sie eine Entscheidung zwischen der Maxwellschen und den anderen Theorien bieten könnten. Denn hinsichtlich der Fortpflanzung der elektrischen Störungen in einem Drahte kommen alle Theorien zu denselben Resultaten; Differenzen entstehen erst bei Erscheinungen, für welche die Verschiebungsströme maßgebend sind.

Also nur die Messung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit elektrischer Störungen in der Luft oder in einem Isolator kann hier entscheidend sein.

Wenn man nun berücksichtigt, daß nach der Maxwellschen Theorie die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ebener elektromagnetischer Wellen in der Luft den Wert  $3 \cdot 10^{10}$  cm sek<sup>-1</sup> besitzt, welcher Wert mit dem der Lichtgeschwindigkeit zusammenfällt, so begreift man die Schwierigkeit der anzustellenden Versuche. Denn man braucht vergleichsweise nur

<sup>1)</sup> W. v. Siemens, Berl. Ber. 1875, S. 774. — Pogg. Ann. 157, S. 309, 1876.

darán zu denken, mit Anwendung welcher Mühe es erst gelang, aus terrestrischen Versuchen einen zuverlässigen Wert für die Lichtfortpflanzungsgeschwindigkeit zu erhalten.

Das einfachste Mittel, an welches man vielleicht denken könnte, nämlich die Messung des Zeitraumes, welcher verstreicht zwischen der Entladung eines Konduktors A und der ihr entsprechenden elektrischen (Influenz-) Wirkung auf einem Konduktor B, scheitert daran, daß, wenn jener Zeitraum meßbare Größe haben sollte, dann die Entfernung zwischen A und B so groß sein müßte, daß überhaupt auf B keine Wirkung von A wahrnehmbar wäre. Aber aus den in der Optik üblichen experimentellen Anordnungen kann man lernen für unsere Zwecke, die wir hier im Auge haben. Zwar kann man die Versuche von Fizeau und Foucault zur Ermittlung der Lichtgeschwindigkeit nicht ins Elektrische übertragen, weil die elektrische Wirkung nicht wie die optische durch verhältnismäßig kleine Körper abgeschirmt oder reflektiert wird, wie sie z. B. die Zähne des Fizeauschen Zahnrades oder der rotierende Spiegel Foucaults darstellen. Indes sind zahlreiche optische Versuchsanordnungen bekannt, bei denen durch Interferenz gewisser Wellenzüge ihre sogenannte Wellenlänge ermittelt werden kann. Nennt man dieselbe  $\lambda$ , so steht sie bekanntlich mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $V$  der Wellen und ihrer Schwingungsdauer  $T$  in der Beziehung:

$$\lambda = VT. \quad (1)$$

Aus  $\lambda$  kann man daher bei bekanntem  $T$  den Wert von  $V$  berechnen.

Gelingt es daher, periodische elektromagnetische Störungen zu erzeugen und ihre Wellenlänge durch das Interferieren gewisser Wellenzüge zu bestimmen, so kann man ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit berechnen, falls man die Dauer der Periode der elektromagnetischen Störungen kennt. Aber diese Periodendauern müssen außerordentlich klein sein, wenn die zugehörigen Wellenlängen innerhalb des Raumes eines Zimmers bequem meßbar sein sollen. Denn wenn  $V$  den großen Betrag von  $3 \cdot 10^{10}$  cm sek<sup>-1</sup> besitzt, so muß  $T = 3 \cdot 10^{-8}$  sek sein, damit  $\lambda = 3$  m ist.

Periodische elektromagnetische Störungen haben wir zunächst in Kapitel VI kennen gelernt bei der Besprechung der Eigenschaften der Wechselströme. Mit dem Wechselstrom in einem Draht ist ein periodisches elektromagnetisches Feld in seiner Umgebung verknüpft. Aber die Periodendauer ist auch bei den sogenannten Hochfrequenzmaschinen, wo sie etwa bis  $10^{-3}$  oder  $10^{-4}$  sek hinuntergeht, viel zu groß für den hier vorliegenden Zweck. Daneben kennt man seit langem eine andere Klasse periodischer elektromagnetischer Erscheinungen, die unter geeigneten Umständen bei der Entladung von Kondensatoren auftreten. Man be-



zeichnet sie als elektrische Schwingungen und könnte sie von den periodischen Elektrizitätsbewegungen, die eine Wechselstrommaschine erzeugt, passend dadurch unterscheiden, daß man sie freie elektrische Schwingungen, jene dagegen erzwungene elektrische Schwingungen nennt. Denn die letzteren werden durch die mechanische Bewegung der Maschine dem System aufgezwungen und ihre Periodendauer ist von der Tourenzahl der Maschine abhängig. Die bei der Entladung eines Kondensators auftretenden periodischen Elektrizitätsbewegungen dagegen stehen in Parallele zu den Schwingungen einer Feder oder Stimmgabel, und ihre Periodendauer hängt in ähnlicher Weise von den elektrischen Dimensionen des Systems (Kapazität und Selbstinduktion) ab, wie die einer Feder von ihrer Massenverteilung und ihrer elastischen Kraft. Aber auch die Periodendauern derjenigen elektrischen Schwingungen, die man durch Entladung von Leidener Flaschen erhalten kann, waren noch zu groß, um für die Entscheidung des durch die Maxwell'sche Theorie aufgestellten Problems zur Verwendung zu kommen; denn ihre Größenordnung war immer noch  $10^{-6}$  sek.

Sollte also der angedeutete Weg zum Ziel führen, so handelte es sich um Herstellung noch schnellerer elektrischer Schwingungen. Diese verwirklicht zu haben, ist das Verdienst von H. Hertz. Durch die Versuche, welche Hertz in den Jahren 1888 und 1889 anstellte, lehrte er die Wirkungen elektrischer Schwingungen untersuchen, deren Schwingungsdauer etwa  $T = 2 \cdot 10^{-9}$  sek beträgt. Es ist einleuchtend, welcher Fortschritt für die Beantwortung der hier aufgeworfenen Fragen durch diese Versuche angebahnt wurde und welches Interesse sich an sie knüpft.

Wir wollen in dem vorliegenden Kapitel zunächst das Gebiet der elektrischen Schwingungen auf der Grundlage der älteren Erfahrungen und derjenigen Theorie behandeln, die noch auf dem Boden der vor-maxwell'schen Elektrizitätstheorie von Sir William Thomson entwickelt worden ist.

## 2. Die oszillatorische Entladung eines Kondensators.

Wie im II. Kapitel auf S. 136 erwähnt ist, kann man Stahlnadeln dauernd dadurch magnetisieren, daß man sie in ein vom elektrischen Strom durchflossenes Solenoid steckt. Es genügt zu diesem Zwecke jedoch auch schon ein Stromstoß, wie er im Solenoid zustande kommt, wenn man mit ihm, als Schließungsdraht, die beiden Belegungen eines Kondensators, z. B. einer Leidener Flasche, berührt. Jedoch nimmt man in diesem Falle wahr, wie Savary<sup>1)</sup> schon im Jahre 1827 entdeckte, daß die Pole der magnetisierten Stahlnadel durchaus nicht

<sup>1)</sup> Savary, Pogg. Ann. 10, S. 100, 1827.

immer diejenige Lage besitzen, welche sie nach dem Sinne des Entladungsstromes und der Ampèreschen Regel besitzen sollten. Vielmehr findet sich, auch wenn die Belegungen des Kondensators immer zu denselben Potentialwerten geladen werden und das Solenoid immer in derselben Weise die Belegungen berührt, daß der Nordpol der Stahlnadel bald an ihrem einen und bald an ihrem anderen Ende liegt.

Diese Erscheinung ist nur zu erklären möglich, wenn man annimmt, daß der Sinn des positiven Stromes im Schließungsdraht des Kondensators nicht einerlei Richtung habe, sondern oszilliere. Die Oszillationen nehmen allmählich an Stärke ab, bis daß sie auf einmal ganz aufhören, wenn sie nämlich nicht mehr die bei dem Schließungsdraht des Kondensators vorhandene kleine Luftstrecke mit einem Funken durchbrechen können. Der Sinn des letzten Stromdurchganges vor dem Aufhören der Oszillationen kann je nach gewissen Zufälligkeiten, z. B. der Länge der Luftstrecke, ein verschiedener sein, und da die Magnetisierungsrichtung der Nadel sich wesentlich nach dem Sinne des letzten Stromdurchganges richten muß, so wird auch die Nadel eine je nach Zufälligkeiten wechselnde Lage ihrer Pole aufweisen.

Daß die Auffassung von einer oszillatorischen Natur der Entladung einer Leidener Flasche richtig war, bewiesen auch Versuche von v. Oettingen<sup>1)</sup>, nach denen auf der ursprünglich positiv geladenen Belegung sich oft unmittelbar nach Aufhören des Entladungsfunkens ein negativer Rückstand vorfindet.

Noch deutlicher zeigte Paalzow<sup>2)</sup> die oszillatorische Entladung, indem er in den Schließungskreis einer Leidener Batterie eine Geißlersche Röhre einschaltete und dieselbe mit Hilfe eines sehr schnell rotierenden Spiegels betrachtete. An dem Aussehen der Lichterscheinung in der Geißlerschen Röhre kann man sofort den Sinn des Stromdurchganges erkennen, indem das Licht an der Eintrittsstelle des positiven Stromes (der Anode) unter Umständen als ein kleiner rötlicher Punkt erscheint, dagegen an der Austrittsstelle (der Kathode) als blaues, größeres Büschel. Wenn man nun die Geißlersche Röhre in einem schnell rotierenden Spiegel betrachtet, so werden die zeitlich in ihr aufeinander folgenden Lichterscheinungen räumlich getrennt. Es zeigte sich nun nicht nur, daß die Röhre abwechselnd hell und dunkel wurde, sondern auch, daß der Sinn des positiven Stromes nach jedem Erlöschen des Lichtes der Röhre sich umkehrte.

Die Methode des rotierenden Spiegels ist zuerst zur Untersuchung des Entladungsfunkens im Schließungsdraht eines Kondensators von

<sup>1)</sup> A. v. Oettingen, Pogg. Ann. 115, S. 513, 1862.

<sup>2)</sup> A. Paalzow, Berl. Ber. 1862, S. 152.

Feddersen<sup>1)</sup> angewandt, und zwar ermöglichte er eine gute Messung der Schwingungsdauer der elektrischen Oszillationen, indem der rotierende Spiegel ein reelles Bild des Entladungsfunkens auf photographisch empfindliches Papier warf. Auf demselben entsteht dann bei jeder Entladung eine Reihe von Bildern. Durch Messung ihres Abstandes, ferner des Abstandes des Papiers vom Spiegel und der Drehungsgeschwindigkeit des letzteren erhält man leicht die zwischen zwei aufeinanderfolgenden Funken der Entladung verstrichene Zeit, d. h. die halbe Schwingungsdauer.

Es ergab sich  $T$  um so größer, je länger der Schließungsdraht und je größer die Zahl der Leidener Flaschen war. Sehr annähernd zeigte sich  $T$  proportional zu der Quadratwurzel aus dieser Zahl, d. h. der Kapazität des Kondensators. Feddersen erhielt bei 10 Flaschen

für 5,3 m Schließungsdrahtlänge:  $T = 2,6 \cdot 10^{-6}$  sek.

„ 445 „ „ „  $T = 45,4 \cdot 10^{-6}$  sek.

Die Versuche von Feddersen sind später, um die im nächsten Abschnitt zu besprechende Theorie besser prüfen zu können, von L. Lorenz<sup>2)</sup> und in jüngster Zeit von Battelli und Magri<sup>3)</sup> sehr sorgfältig wiederholt worden. Wir werden darauf unten noch einmal zurückkommen.

Bei der Versuchsanordnung Feddersens enthält der Entladungskreis eine vom Funken zu durchschlagende Luftstrecke. In diesem Umstande liegt ein Moment der Unsicherheit, wenn man die Versuche zur genauesten Prüfung der im nächsten Abschnitt behandelten Theorie dieser Schwingungen benutzen will; denn die Funkenstrecke hat ohne Zweifel keinen konstanten, sondern einen variablen Widerstand, dessen Veränderung nicht leicht anzugeben ist. Von diesem Uebelstande frei sind diejenigen Methoden, welche die Funkenstrecke vermeiden. Die genaueste Methode dieser Art ist von v. Helmholtz<sup>4)</sup> angegeben. Durch einen geeignet konstruierten Pendelunterbrecher konnte v. Helmholtz den Primärstrom eines Ruhmkorffschen Apparates öffnen und dann nach einem sehr kurzen, genau meßbaren Zeitintervall  $\delta t$  den Sekundärkreis unterbrechen. Die Enden der Sekundärspule waren mit den Belegungen einer oder mehrerer Leidener Flaschen verbunden. Durch den bei der

<sup>1)</sup> Feddersen, Pogg. Ann. **113**, S. 437, 1861; **116**, S. 132, 1862; Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 166. Leipzig, W. Engelmann, 1908.

<sup>2)</sup> L. Lorenz, Wied. Ann. **7**, S. 161, 1879.

<sup>3)</sup> A. Battelli und L. Magri, Physik. Zeitschr. **3**, S. 539, **4**, S. 181, 1902; Phil. Mag. (6) **5**, S. 1 und 620, 1903. Siehe daselbst auch die weitere Literatur über experimentelle Untersuchungen nach der Methode Feddersens.

<sup>4)</sup> H. v. Helmholtz, Repert. d. Phys. **5**, S. 269, 1869. — Verhandl. des Naturwissenschaftl. Vereins zu Heidelberg 1869, S. 353. — Wiss. Abhandl. I, S. 531.

Unterbrechung des Primärstromes eintretenden Induktionsstrom werden die Flaschen geladen (siehe Kapitel VII, Abschnitt 1). Sie entladen sich darauf rückwärts durch die sekundäre Spule hindurch, ohne dabei durch eine Funkenstrecke gehen zu müssen. Diese Entladung findet in Form elektrischer Schwingungen statt. Durch die zweite Unterbrechung werden diese Schwingungen abgeschnitten, ihre Phase kann im Momente der Unterbrechung je nach der Größe des Zeitintervalls  $\delta t$  eine verschiedene sein. Findet beispielsweise die zweite Unterbrechung gerade in dem Moment statt, in welchem die Potentialdifferenz der Belegungen des Kondensators ein Maximum ist, so wird ein mit seinen Belegungen geeignet verbundener Froschschenkel im Moment der zweiten Unterbrechung lebhaft zucken. Unterbricht man etwas später, d. h. läßt man  $\delta t$  wachsen, so wird die Zuckung kleiner, bis sie schließlich Null wird. Dies tritt ein, wenn im Moment der zweiten Unterbrechung die Potentialdifferenz des Kondensators Null ist. Bei weiter wachsendem  $\delta t$  nimmt die Zuckung wieder zu, bis sie wieder ein Maximum erreicht. Die Zunahme, um welche  $\delta t$  wachsen muß, um von einem Zuckungsmaximum bis zum nächstfolgenden zu gelangen, entspricht offenbar einer halben Periode der elektrischen Schwingungen.

An Stelle eines Froschschenkels kann man natürlich jedes Instrument anwenden, welches in empfindlicher Weise Potentialdifferenzen anzeigt, z. B. ein Quadrantelektrometer. Mit Hilfe eines solchen hat Schiller<sup>1)</sup> nach der v. Helmholtzschen Methode die Periode der oszillatorischen Entladungen bestimmt und dadurch wertvolle Beiträge zur experimentellen Ermittlung der Dielektrizitätskonstanten der Körper im schnell oszillierenden elektrischen Felde geliefert, wie des näheren im nächsten Abschnitt ausgeführt werden wird. Zugleich ist es durch die Ersetzung des nur qualitativ wirkenden Froschschenkels durch das quantitativ arbeitende Elektrometer möglich, auch die zeitliche Dämpfung der Schwingungen zu bestimmen.

Wenn der Schließungsdraht des Kondensators eine vielgewundene Spirale ist, wie es bei Verwendung der Sekundärspule eines Induktoriums der Fall ist, so erfolgen die Schwingungen viel langsamer als bei den Untersuchungen Feddersens, der nicht mit einem Solenoid als Schließungsdraht, sondern mit möglichst geradlinig verlaufendem Draht operierte.

---

<sup>1)</sup> Schiller, Pogg. Ann. 152, S. 535, 1874. Ferner haben Mouton (Compt. rend. 82, S. 1387, 1876) und J. Klemencic (Rep. d. Phys. 22, S. 587, 1886) nach ähnlicher Methode Schwingungsdauer und Dämpfung elektrischer Oszillationen bestimmt. Weitere Untersuchungen nach der Helmholtzschen Methode zur Prüfung der Theorie sind von H. Tallqvist (Wied. Ann. 60, S. 248, 1897). U. Seiler (Wied. Ann. 61, S. 30, 1897), A. G. Webster (Phys. Rev. 6, S. 297, 1898) angestellt worden. Weitere Literaturangaben siehe bei Battelli und Magri l. c.

Benutzt man die Sekundärspulen eines großen Ruhmkorff, deren Enden mit den Belegungen eines Kondensators verbunden sind, so wird die Schwingungsdauer so herabgedrückt, daß man auch ohne Zuhilfenahme eines sehr schnell rotierenden Spiegels oder anderer feiner Zeitmeßinstrumente die Oszillationen nachweisen kann. Eine einfache und zur Demonstration sehr geeignete Methode beruht auf einer Beobachtung v. Bezolds<sup>1)</sup>. Dieser hatte den Nachweis geführt, daß man den oszillatorischen Charakter eines Entladungsvorganges mit Hilfe Lichtenbergscher Figuren nachweisen könne. Man kann sich der in Fig. 52 schematisch dargestellten Versuchsanordnung bedienen. Die galvanischen Elemente speisen die primäre Spule des Induktionsapparates, die Enden der sekundären sind mit den beiden Belegungen einer Batterie parallel geschalteter Leidener Flaschen verbunden. Die innere Belegung ist außer-

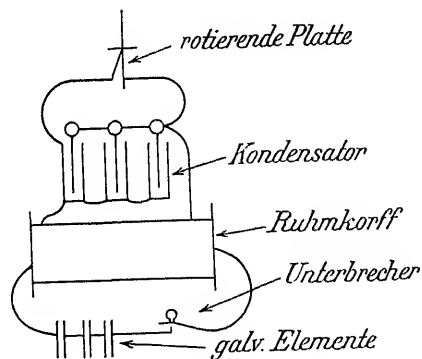


Fig. 52.

dem mit einer metallenen Spitze verbunden, die einer Hartgummiplatte oder dem Harzkuchen eines Elektrophors gegenübersteht, während die äußere Belegung zur Erde abgeleitet oder mit der Metallfassung des Harzkuchens verbunden ist. Unterbricht man den primären Strom und bestäubt darauf die Platte, so sieht man, daß unter der Spitze eine zusammengesetzte Lichtenbergsche Figur entstanden ist, die aus ineinander steckenden positiven und negativen Figuren besteht. Setzt man die Scheibe auf eine Schwungmaschine und bewirkt die Unterbrechung, während die Scheibe schnell rotiert, so sieht man nach der Bestäubung die Lichtenbergsche Figur im Sinne der Bewegung auseinandergezogen, so daß positive und negative Figuren jetzt in gleichen Abständen nebeneinander liegen. Daraus ist ersichtlich, daß sich die Batterie abwechselnd positiv und negativ in regelmäßiger zeitlicher Aufeinanderfolge geladen hatte<sup>2)</sup>. Auch die Schwingungsdauer läßt sich

<sup>1)</sup> W. v. Bezold, Pogg. Ann. **140**, S. 541, 1870.

<sup>2)</sup> W. König, Wied. Ann. **67**, S. 535, 1899.

bei diesem Versuche, etwa aus der Drehgeschwindigkeit und dem Abstand der Figuren, oder durch gleichzeitiges Aufschreiben von Stimmgabelschwingungen ermitteln.

Man kann auch nach F. Richarz und W. Ziegler<sup>1)</sup> die magnetischen Wirkungen des zwischen den Belegungen des Kondensators oszillierenden Stromes benutzen, um die Kathodenstrahlen einer Braunschen Röhre abzulenken. Das Hin- und Herschwanen des hellen Fleckes auf dem Fluoreszenzschirm der Röhre läßt im rotierenden Spiegel den oszillatorischen Charakter des Vorganges deutlich erkennen und demonstrieren.

### 3. Theorie des Thomsonschen Schwingungskreises.

Daß ein Kondensator sich oszillatorisch entladet, wenn sein Schließungsdraht eine vielgewundene Spirale ist, wird leicht verständlich, wenn wir uns an ein oben S. 320 angewandtes Bild aus der Mechanik erinnern, dem eine Spirale hinsichtlich ihrer elektrischen Eigenschaften gleicht. Wir sahen dort, daß eine Spirale, welche einen großen Selbstinduktionskoeffizienten besitzt, sich gegen Stromimpulse verhält wie ein träger Körper gegen mechanische Bewegungsimpulse. Die große elektrische Trägheit des Schließungsdrahtes bewirkt es, daß die Elektrizität, nachdem sie von den Belegungen des Kondensators so weit abgeströmt ist, daß sie gleiches Potential besitzen, über diese Gleichgewichtslage hinüberströmt und den Kondensator entgegengesetzt ladet. Auf diese Weise vollziehen sich Schwingungen wie die eines trägen, gehobenen Pendels, welches losgelassen wird. Die Schwingungsdauer wird um so kleiner, je geringer die Trägheit, d. h. die Selbstinduktion, und je kleiner die Kapazität ist. Denn der reziproke Wert der letzteren spielt dieselbe Rolle, wie die Spannkraft im mechanischen System, z. B. die Schwere beim Pendel. Die Schwingungen sind mit einer Energieabnahme verbunden — die elektrischen mit Joulescher Wärme, die mechanischen mit Reibungswärme — und daher müssen sie allmählich verklingen.

Wegen der Analogie beider Bilder übersieht man auch, daß, gerade wie das Pendel bei sehr starker Reibung aperiodisch in seine Gleichgewichtslage gelangt, so auch die Entladung des Kondensators nicht oszillatorischer Natur sein wird, wenn der galvanische Widerstand des Schließungskreises sehr groß ist. Dies wird durch die Versuche vollkommen bestätigt. Denn alle im vorigen Abschnitte beschriebenen Erscheinungen, welche die Existenz von Oszillationen bei der Entladung beweisen, hören auf, wenn in den Schließungskreis ein nasser Bindfaden

<sup>1)</sup> F. Richarz u. W. Ziegler, Ann. d. Physik (4) 1, S. 468, 1900.

oder überhaupt eine Strecke von hohem galvanischen Widerstande eingeschaltet wird.

Wir wollen nun die Theorie dieses Vorganges in derjenigen Form entwickeln, wie sie auf Grund der älteren Elektrizitätslehre von Sir William Thomson<sup>1)</sup> aufgestellt worden ist. Zu dem Zweck nehmen wir an, daß wir es bei der Entladung des Kondensators im wesentlichen nur mit einem nahezu geschlossenen linearen Strome zu tun hätten. Dies ist sehr annähernd richtig, wenn die Belegungen des Kondensators nur durch die dünne Schicht eines Isolators voneinander getrennt sind, wie es in Wirklichkeit meist der Fall ist. Der im Isolator bei der Entladung stattfindende Verschiebungsstrom hat dann bei seiner geringen Ausdehnung wenig Einfluß auf den numerischen Wert des Koeffizienten der Selbstinduktion des ganzen Stromkreises, der als ein linearer anzusehen ist, wenn der Schließungsdraht dünn ist im Vergleich zu seiner Länge.

Ferner wollen wir annehmen, daß die Elektrizitätsmenge, welche durch den Querschnitt des Schließungsdrahtes fließt, vollständig bestimmt ist durch die Aenderung der Ladungen auf den Kondensatorbelegungen, d. h. daß elektrische Ladungen auf dem Schließungsdraht selber nicht existieren. Diese Annahme wird um so mehr erfüllt sein, je größer die Kapazität des Kondensators gegenüber der Kapazität des Schließungsdrahtes ist.

Unter diesen Umständen gehört also der Vorgang zu den quasi-stationären Vorgängen, wie wir sie in Kapitel VI, Abschnitt 18 charakterisiert haben, und kann im unmittelbaren Anschluß an die in Abschnitt 12 jenes Kapitels aufgestellten Gleichungen behandelt werden.

Nennen wir die Potentialwerte auf den Belegungen des Kondensators  $V_1$  und  $V_2$ , seine Kapazität  $C$ , die auf der positiv geladenen Belegung ( $V_1$ ) befindliche Elektrizitätsmenge  $e_m$  — alle Ausdrücke nach elektromagnetischem Maß gemessen —, so ist nach Formel (35) des I. Kapitels auf S. 50

$$e_m = C(V_1 - V_2). \quad (2)$$

Nehmen wir jetzt den Strom positiv, wenn er von der Belegung 1 nach der Belegung 2 fließt, also die Belegung 1 entladet, so ist die innerhalb des Zeitelements  $dt$  durch den Querschnitt des Schließungsdrahtes hindurchfließende Elektrizitätsmenge  $i dt$ , wenn  $i$  die Stromstärke in elektromagnetischem Maße ist, und entspricht einer Abnahme der Ladung auf der Belegung 1 um  $\frac{de_m}{dt} dt$ . Es muß also sein

<sup>1)</sup> Sir William Thomson (Lord Kelvin); Phil. Mag. (4) 5, S. 393, 1853; Math. and Physical Papers I, S. 540. — Desgl. G. Kirchhoff, Pogg. Ann. 121, S. 551, 1864; Gesam. Abhandl. S. 168.

$$i \, dt = - \frac{de_m}{dt} \, dt, \text{ d. h. } i = - \frac{de_m}{dt}. \quad (3)$$

Nun bringen wir auf den Schließungsdraht das Ohmsche Gesetz (S. 356) in Anwendung, demzufolge das Produkt aus der Stromstärke  $i$  in den galvanischen Widerstand  $w$  des Schließungsdrahtes gleich ist der Summe der elektromotorischen Kräfte, welche zwischen seinen Enden wirken. Mißt man alle diese Größen in elektromagnetischem Maße, so setzt sich die elektromotorische Kraft — ganz ebenso wie bei den Ausführungen im Kapitel VI, Abschnitt 12 und 17 — zusammen aus der der Selbstinduktion, welche nach Kapitel V, Abschnitt 6 den Wert  $-L \frac{di}{dt}$  hat (wobei zur Berechnung des Selbstinduktionskoeffizienten  $L$  der Schließungsdraht als geschlossener Stromkreis angesehen wird), und der Potentialdifferenz  $V_1 - V_2$  an den Enden des Drahtes.

Der Ausdruck des Ohmschen Gesetzes ist also:

$$i w = -L \frac{di}{dt} + V_1 - V_2. \quad (4)$$

Ferner ist nach (2) und (3):

$$i = -C \frac{d(V_1 - V_2)}{dt}. \quad (5)$$

Bezeichnet man die Differenz ( $V_1 - V_2$ ) einfach mit  $V$ , so geht aus (4) und (5) die Gleichung hervor:

$$LC \frac{d^2 V}{dt^2} + w C \frac{dV}{dt} + V = 0. \quad (6)$$

Um andererseits  $V$  zu eliminieren, differenziere man (4) nach  $t$ , multipliziere es mit  $C$  und addiere (5). Man erhält dann:

$$w C \frac{di}{dt} + i = -LC \frac{d^2 i}{dt^2}$$

oder

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{w}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0. \quad (7)$$

Diese Formel ist nach Ableitung und Form übereinstimmend mit der Formel (125) des VI. Kapitels (S. 401) und stellt den Spezialfall dieser allgemeineren Formel dar, den man erhält, wenn man  $E_0 = 0$  setzt, d. h. annimmt, daß keine fremde elektromotorische Kraft in dem Kreise wirksam ist.

Als Integral dieser Differentialgleichung schreiben wir:

$$i = A e^{kt}. \quad (8)$$

Setzt man diesen Wert in (7) ein, so folgt für  $k$  die Gleichung:

$$k^2 + \frac{w}{L} k + \frac{1}{LC} = 0,$$



d. h.

$$k = \frac{-w \pm \sqrt{w^2 - 4 \frac{L}{C}}}{2L}. \quad (9)$$

Nennt man  $k_1$  und  $k_2$  die beiden Wurzeln von  $k$ , so ist also sowohl

$$i = A_1 e^{k_1 t}$$

als

$$i = A_2 e^{k_2 t}$$

ein Integral von (7). Ebenso muß die Summe obiger Ausdrücke ein Integral von (7) sein, d. h.

$$i = A_1 e^{k_1 t} + A_2 e^{k_2 t}. \quad (10)$$

Diese Formel stellt das allgemeine Integral von (7) dar, da zwei willkürliche Konstanten ( $A_1$  und  $A_2$ ) auftreten, die bei dem allgemeinen Integral einer Differentialgleichung zweiter Ordnung vorhanden sein müssen.

Es sind nun die Fälle zu sondern, in welchen  $k$  reell ist, von denen, in welchen  $k$  imaginär ist. Erstere ergeben eine aperiodische Entladung des Kondensators, letztere eine periodische. Wie man aus der Formel (9) abliest, ist der kritische Widerstand, für welchen der eine in den anderen Fall übergeht, gegeben durch:

$$w = 2 \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (11)$$

Für kleinere  $w$  treten Oszillationen ein. Denn  $k$  wird dann komplex. Führen wir die Bezeichnung ein:

$$\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{w^2}{4L^2}} = \nu, \quad (12)$$

so wird

$$\begin{aligned} i &= e^{-\frac{w}{2L} t} (A_1 e^{i \nu t} + A_2 e^{-i \nu t}) \\ &= e^{-\frac{w}{2L} t} \left( A_1' \cos 2\pi \frac{t}{T} + A_2' \sin 2\pi \frac{t}{T} \right), \end{aligned} \quad (13)$$

wo die  $A_1'$  und  $A_2'$  in leicht angebarbarer Weise mit den  $A_1$  und  $A_2$  zusammenhängen und wobei

$$T = \frac{2\pi}{\nu} = \frac{2\pi \sqrt{LC}}{\sqrt{1 - \frac{Cw^2}{4L}}}. \quad (14)$$

Die Gleichung (13) läßt sich durch Einführung anderer Konstanten leicht auf die einfachere und übersichtlichere Form bringen:

$$i = i_0 e^{-\frac{w}{2L} t} \sin \left( \frac{2\pi t}{T} + \varepsilon_0 \right). \quad (15)$$

Hier sind die beiden Integrationskonstanten  $i_0$  und  $\varepsilon_0$  die Amplitude und die Phase des oszillatorischen Vorgangs. Dieselbe Form der Lösung läßt sich für die Differentialgleichung (6) aufstellen:

$$V = V_0 e^{-\frac{w}{2L}t} \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varepsilon_0'\right). \quad (16)$$

Beide Lösungen aber müssen durch (5) miteinander verknüpft sein. Wir führen zur Abkürzung noch eine neue Phasenkonstante  $\varepsilon$  ein, die von den Dimensionen des Schwingungskreises abhängen soll nach der Beziehung:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{wT}{4\pi L} = \frac{w}{\sqrt{\frac{4L}{C} - w^2}}. \quad (17)$$

Dann ergibt die Anwendung von (5) auf (15) und (16):

$$i_0 = \frac{CV_0\nu}{\cos \varepsilon} \quad \text{und} \quad \varepsilon_0' = \frac{\pi}{2} - \varepsilon + \varepsilon_0. \quad (18)$$

Nimmt man an, daß der Kondensator zu Beginn der Entladung ( $t=0$ ) stromlos und auf das Anfangspotential  $V_a$  geladen sei, so muß

$$\text{für } t=0 \quad i=0 \quad \text{und} \quad V=V_a$$

sein. Dadurch sind die Integrationskonstanten  $V_0$  und  $\varepsilon_0$  bestimmt. Denn es muß sein

$$\varepsilon_0 = 0, \quad V_a = V_0 \cos \varepsilon.$$

Also lauten die Lösungen nunmehr:

$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{V_a}{\cos \varepsilon} e^{-\frac{w}{2L}t} \cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \varepsilon\right) \\ i &= \frac{CV_a\nu}{\cos^2 \varepsilon} e^{-\frac{w}{2L}t} \sin \frac{2\pi t}{T}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Diese Gleichungen stellen einen periodischen Vorgang dar. Die Ladung des Kondensators sowohl wie der Strom im Schließungskreis schwanken nach dem Gesetz einer Kreisfunktion periodisch auf und ab,  $T$  ist die Periodendauer des Schwingungsvorganges.

Wir wollen zunächst annehmen, daß  $w^2$  neben  $4\frac{L}{C}$  zu vernachlässigen sei. Dann kann  $\varepsilon = 0$  gesetzt werden.  $T$  wollen wir für diesen Fall mit  $T_0$ ,  $\nu$  mit  $\nu_0$  bezeichnen. Die Gleichungen (19) gehen alsdann in die einfacheren Gleichungen über:

$$\left. \begin{aligned} V &= V_0 e^{-\frac{w}{2L}t} \cos \frac{2\pi t}{T_0} \\ i &= CV_0\nu_0 e^{-\frac{w}{2L}t} \sin \frac{2\pi t}{T_0} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

und Gleichung (14) in die Gleichung:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{LC}. \quad (21)$$

Wenn wir vorläufig noch von dem Einfluß des vor den Kreiskunctionen stehenden Faktors  $e^{-\frac{w}{2L}t}$  absehen, der sich bei kleinem  $w$  erst nach Verlauf längerer Zeit geltend macht, so läßt sich der Verlauf des Vorganges folgendermaßen beschreiben. Zwischen der Schwingung der Spannung und des Stromes besteht eine Phasendifferenz von  $\frac{\pi}{2}$ . Indem der Kondensator zur Zeit  $t = 0$  sich zu entladen anfängt, steigt der Strom, erreicht sein Maximum (für  $t = \frac{T_0}{4}$ ), wenn  $V_1 - V_2 = 0$  geworden ist, nimmt dann ab, während sich der Kondensator in entgegengesetztem Sinne aufladet, wird 0, wenn diese Aufladung ihr Maximum erreicht hat (für  $t = \frac{T_0}{2}$ ), wechselt dann sein Vorzeichen und verläuft in gleicher Weise auf- und wieder absteigend, bis der Kondensator wieder ein Maximum im Sinne der anfänglichen Ladung erreicht hat (für  $t = T_0$ ). Die Dauer dieser Oszillation ist durch Gleichung (21) gegeben. Dieselbe ist also um so größer, je größer die Selbstinduktion des Schließungskreises und die Kapazität des Kondensators ist. Für  $L = 1$  Quadrant  $= 10^9$  und  $C = 1$  Mikrofara  $= 10^{-15}$  folgt  $T = 2\pi \sqrt{10^{-6}} = 0,006$  sek.

Wir sehen in der Formel (21) das von Feddersen empirisch gefundene Gesetz bestätigt (vgl. oben S. 444), daß die Schwingungsdauer der Quadratwurzel aus der Zahl der angewandten Leidener Flaschen proportional ist. Bei einer genaueren Berechnung der Versuchsergebnisse Feddersens nach der Formel (21) fand Kirchhoff<sup>1)</sup> keine sehr gute Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Theorie. Es lag dies aber wohl daran, daß Kirchhoff zur Schätzung der Kapazität der von Feddersen angewandten Leidener Flaschen eine willkürliche Annahme über die Dielektrizitätskonstante ihres Glases machen mußte.

Als später L. Lorenz die Feddersenschen Versuche wiederholte und dabei Kapazität und Selbstinduktion bestimmte, fand er eine sehr gute Bestätigung der Formel (21) durch die Beobachtung. So beobachtete er den Wert  $T = 12,64 \cdot 10^{-6}$  sek, während die Formel (21) für den betreffenden Versuch ergab  $T = 12,76 \cdot 10^{-6}$  sek. Desgleichen ergaben die Versuche von Battelli und Magri<sup>2)</sup> innerhalb der experimentellen Fehlergrenzen Uebereinstimmung der beobachteten mit den nach der Thomsonschen Formel berechneten Werten der Schwingungsdauer; z. B.

<sup>1)</sup> G. Kirchhoff, Pogg. Ann. **121**, S. 551, 1864.

<sup>2)</sup> Vgl. die oben genannten Arbeiten.

beobachtet:  $T = 53,76 \times 10^{-6}$ ,  $3,024 \times 10^{-6}$ ,  $1,212 \times 10^{-6}$ ,  
 berechnet:  $T = 53,17$  —  $3,008$   $1,201$  — .

Ebenso wie die Entladung vollzieht sich auch die Ladung eines Kondensators bei plötzlichem Anlegen einer Potentialdifferenz in oscillatorischer Form, und die Schwingungsdauer ist ebenfalls wieder durch die Thomsonsche Formel bestimmt. Auch hier haben die Messungen von Hj. Tallqvist und von U. Seiler<sup>1)</sup> die Richtigkeit der Thomsonschen Formel bestätigt.

Die bisherigen Betrachtungen gelten unter der Voraussetzung, daß  $w$  sehr klein ist gegen  $2\sqrt{\frac{L}{C}}$ . Ist dies nicht der Fall, so gelten die allgemeineren Gleichungen (19). Die zeitlichen Beziehungen zwischen Strom und Spannung verschieben sich, um so mehr, je mehr sich  $w$  dem durch Gleichung (11) gegebenen Grenzwert für das Bestehen von Oscillationen nähert. Die Maximalwerte der Spannung treten zwar wieder zu den Zeiten  $0, \frac{T}{2}, T, 3\frac{T}{2}$  usw. auf und zu denselben Zeiten verschwindet der Strom. Aber das Maximum des Stromes tritt nicht mehr zu den Zeiten  $\frac{T}{4}, 3\frac{T}{4}, 5\frac{T}{4}$  usw. ein, sondern jedesmal um  $\frac{\varepsilon}{v}$  früher; die Phasendifferenz zwischen dem Maximum der Spannung und dem darauffolgenden Maximum des Stromes ist nicht mehr  $\frac{\pi}{2}$ , sondern  $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$ . Die Spannung aber verschwindet nicht zur Zeit  $\frac{T}{4}, 3\frac{T}{4}, 5\frac{T}{4}$ , sondern um  $\frac{\varepsilon}{v}$  später, so daß zwischen dem Maximum des Stromes und dem Verschwinden der Spannung eine Zeitdifferenz von  $\frac{2\varepsilon}{v}$  liegt.

Die durch (19) und (20) charakterisierten Schwingungen sind gedämpfte Schwingungen; denn infolge des Faktors  $e^{-\frac{w}{2L}t}$ , der vor der Kreisfunktion steht, nehmen die Amplituden dieser Schwingungen mit der Zeit ab. Man nennt  $w/2L$  die Dämpfungskonstante. Sie werde im folgenden mit  $\delta$  bezeichnet. Betrachtet man zwei aufeinanderfolgende gleichsinnige Maximalwerte des Stromes oder der Spannung, d. h. zwei Maximalwerte, die zeitlich um eine ganze Schwingung auseinander liegen, so ist ihr Verhältnis, das sogenannte Dämpfungsverhältnis:

$$\frac{i_1}{i_2} = e^{\frac{wT}{2L}}$$

<sup>1)</sup> Vgl. die oben genannten Arbeiten.

oder es ist

$$\lg i_1 - \lg i_2 = \frac{wT}{2L}.$$

Man nennt diese Differenz das natürliche logarithmische Dekrement. Wir wollen es mit  $\gamma$  bezeichnen. Dann ist

$$\gamma = \frac{wT}{2L} = \frac{2\pi w}{\sqrt{\frac{4L}{C} - w^2}} \quad (22)$$

oder angenähert, unter Benutzung von (21)

$$\gamma = \frac{wT_0}{2L} = \pi w \sqrt{\frac{C}{L}}. \quad (22')$$

Mit Hilfe des Ausdrucks für  $\gamma$  läßt sich Formel 14 in der Form schreiben

$$T = T_0 \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4\pi^2}} \quad (23)$$

Diese Formel zeigt, welchen Einfluß die Dämpfung auf die Schwingungsdauer hat. Er ist im allgemeinen gering, und die Dämpfung muß schon erhebliche Werte annehmen, um die Schwingungsdauer in merkbarer Weise zu vergrößern. So bewirkt eine Dämpfung, bei der die Maximalwerte der Amplitude innerhalb einer ganzen Schwingung auf die Hälfte heruntergehen ( $e' = 2$ ), nur eine Vergrößerung der Schwingungsdauer um 0,6 % gegenüber der der ungedämpften Schwingung.

Die Dämpfung ist durch den Widerstand bedingt. Ist  $w = 0$ , so ist auch die Dämpfung = 0. Der Widerstand verwandelt die im Kondensator aufgespeicherte Energie bei der Entladung in Wärme. Im Sinne der Poyntingschen Auffassung (siehe Kapitel VII, Abschnitt 8) wandert also auch hier die im Kondensator anfänglich aufgespeicherte Energie schließlich in den Draht hinein und wird in ihm in Wärme umgewandelt. Aber bei dem auf S. 431 behandelten Fall ist der Widerstand sehr groß angenommen, so daß sich die Entladung langsam in einem fast stationären Strome vollzieht. Der vorliegende Abschnitt gibt die allgemeine und strengere Behandlung des Problems. Soll die gegebene potentielle Energie der statischen Kondensatorladung sich im Drahte in Wärme umwandeln, so muß sie in erster Linie in magnetische Energie sich umsetzen; denn nur der Bewegungszustand der Elektrizität ist mit Energievernichtung durch die Reibungswiderstände des Stromkreises verbunden. Aus dem statischen Feld entwickelt sich entsprechend den Maxwellschen Gleichungen das den Stromleiter umgebende magnetische Feld, und senkrecht zu den Kraftlinien beider Felder wandert die Energie nach dem Drahte zu, in dem sie in Wärme umgewandelt wird. Die Gleichung (4)

ist durch Multiplikation mit  $i$  und Berücksichtigung der Gleichung (5) unmittelbar in die der Gleichung (70) auf S. 381 entsprechende Gleichung

$$-d \left[ \frac{1}{2} C (V_1 - V_2)^2 \right] = d \left[ \frac{1}{2} L i^2 \right] + w i^2 dt$$

umzuformen, welche den Energieumsatz darstellt: die Abnahme der elektrostatischen Energie ist gleich der Zunahme der magnetischen Energie

vermehrt um die entwickelte Stromwärme. Ist  $w \geq 2 \sqrt{\frac{L}{C}}$ , so ver-

läuft der Vorgang aperiodisch; der Strom steigt an und fällt wieder ab, bis er Null geworden ist, und während dieser Zeit setzt sich die ganze ge-

gebene Energie in Wärme um. Ist aber  $w < 2 \sqrt{\frac{L}{C}}$ , so ist, wenn

der Kondensator sich ganz entladen hat, nur ein Bruchteil der gegebenen Energie in Wärme verwandelt; der andere Teil besteht als magnetische Energie des Stromes. Indem der Strom anfängt, den Kondensator in entgegengesetztem Sinne zu laden und dabei selber abzunehmen, bildet sich ein elektrisches Feld aus, dessen Kraftlinien die entgegengesetzte Richtung derjenigen des ursprünglichen Feldes haben. Infolgedessen tritt nun auch die entgegengesetzte Energiewanderung ein. Die Energie wandert von der Stelle, wo sie sich als magnetische Energie besonders angehäuft hatte, z. B. aus dem Inneren der Selbstinduktionsspule, wenn eine solche im Schließungskreis vorhanden war, zurück nach der Stelle, wo sie als elektrische Energie in besonderer Dichte bestanden hatte, d. h. zwischen die Platten des Kondensators. Nach einiger Zeit ist der Strom Null geworden, der Kondensator entgegengesetzt geladen wie vorher, aber schwächer um den Betrag der in Wärme umgesetzten Energie. Nun beginnt der Prozeß mit umgekehrter Stromrichtung von neuem und das Spiel wiederholt sich so lange, bis die ganze elektromagnetische Energie durch Wärmeentwicklung aufgezehrt ist.

#### 4. Benutzung der oszillatorischen Entladung zur Bestimmung der Dielektrizitätskonstante, der Selbstinduktion und des Widerstandes.

Da die Kapazität eines Kondensators proportional der Dielektrizitätskonstante des zwischen seinen Belegungen vorhandenen Dielektrikums ist oder, falls dasselbe die Zwischenschicht nicht ganz ausfüllt, nach einer einfachen Formel [vgl. Kapitel I, S. 83, Formel (84)] mit seiner Dielektrizitätskonstante zusammenhängt, so erkennt man gemäß der Formel (21), daß man durch Vergleichung der Schwingungsdauern der

oszillatorischen Entladungen eines Kondensators, zwischen dessen Belegungen sich das eine Mal Luft und das andere Mal irgendein anderer Körper befindet, die Dielektrizitätskonstante des Körpers mit der der Luft vergleichen kann, falls der Schließungsdraht (und daher auch  $L$ ) in beiden Fällen der gleiche ist.

In etwas anderer Weise verfuhr Schiller (vgl. oben S. 445), indem er zu einem Kondensator der Kapazität  $C$ , dessen Entladungsperiode  $T$  beobachtet wurde, einen Kondensator der Kapazität  $C'$ , welcher das zu untersuchende Dielektrikum enthielt, parallel schaltete. Die Schwingungsdauer der oszillatorischen Entladungen mag dadurch auf  $T'$  gewachsen sein. Aus

$$T^2 = 4\pi^2 CL, \quad T'^2 = 4\pi^2 (C + C') L$$

erhält man

$$\frac{T^2}{T'^2} = \frac{C}{C + C'},$$

d. h.

$$C' = C \frac{T'^2 - T^2}{T^2}. \quad (24)$$

Man kann also  $C'$  mit  $C$  vergleichen und bei bekannten Dimensionen des Kondensators  $C'$  daher auch die Dielektrizitätskonstante seines Dielektrikums messen.

Diese Schillersche Methode der Messung der Dielektrizitätskonstante ist deshalb so wertvoll, weil durch ein schnelles Oszillieren der elektrischen Kraft Nachwirkungs- und Leitungerscheinungen vermieden werden, welche die für die Dielektrizitätskonstante erhaltene Zahl störend beeinflussen können (vgl. oben S. 121 und 122). Wir werden weiter unten sehen, daß es neuerdings gelungen ist, die Dielektrizitätskonstante bei noch weit schnelleren Oszillationen zu ermitteln.

Schaltet man anstatt eines Schließungsdrahtes deren zwei hintereinander, so kann man durch eine der Formel (24) analoge Formel ihre Selbstinduktionen  $L$  und  $L'$  miteinander vergleichen.

Die Formel (19) lehrt, daß die Dämpfung der Schwingungen mit der Zeit um so größer ist, je größer  $w:L$  wird. Bei bekanntem  $L$  kann man daher aus beobachteter Dämpfung  $w$  bestimmen. Auch dies ist von Schiller geschehen.

Eine sorgfältige Prüfung der Formel (22) haben A. F. Sundell und H. J. Tallqvist<sup>1)</sup> und H. J. Tallqvist<sup>2)</sup> allein ausgeführt durch Aufnahme der Schwingungskurven mit dem Pendelunterbrecher. Sie finden die Formel für Schwingungsdauern, die einige Tausendstelsekunden

<sup>1)</sup> A. F. Sundell u. H. Tallqvist, Ann. d. Phys. (4) 4, S. 72, 1901.

<sup>2)</sup> H. Tallqvist, Ann. d. Physik (4) 9, S. 1083, 1902. Vgl. daselbst auch die Literaturangaben über andere Arbeiten, die die gleiche Frage behandeln.

betragen, gut bestätigt, wenn man den Ohmschen Widerstand des Schließungskreises um eine für jede Versuchsanordnung, d. h. für jedes Wertepaar von  $L$  und  $C$ , konstante Größe vermehrt. Sie erblicken in dieser Korrektionsgröße den Einfluß der Leitfähigkeit der isolierenden Schichten des Kondensators und der Selbstinduktionsspule.

## 5. Erregung eines Thomsonschen Schwingungskreises durch eine periodische elektromotorische Kraft. — Fall der Resonanz.

Wir haben schon oben (S. 449) bei der Aufstellung der Gleichung (6) für den Thomsonschen Schwingungskreis darauf hingewiesen, daß diese Gleichung ein Spezialfall der Gleichung (125) des Abschnittes 17 des VI. Kapitels ist. Wir wollen jetzt, nachdem wir die Eigenschwingungen eines Thomsonschen Kreises kennen gelernt haben, den Fall, daß eine periodische elektromotorische Kraft in einem solchen Kreise wirksam sei, noch einmal genauer erörtern. Eine solche Kraft kann in verschiedener Weise dem Schwingungskreise aufgeprägt werden, durch von außen bewirkte periodische Ladung des Kondensators oder durch periodische magnetische Induktionswirkung auf den Schließungskreis. Wir wollen uns irgendeine derartige Ursache denken und wollen nur die Annahme machen, daß der Einfluß dieser Ursache nicht verändert werde durch die Vorgänge, die sie in dem Schwingungskreise hervorruft. Das ist der Fall, wenn sich ein solcher Schwingungskreis in einem magnetischen Wechselfelde befindet, dessen Erregungsstellen so weit von dem Schwingungskreise entfernt sind, daß sie keine Beeinflussung von den Vorgängen im Schwingungskreise erfahren.

Setzen wir die im Schwingungskreise von außen her wirkende periodische elektromotorische Kraft  $= E_0 \sin \nu_1 t$  und bezeichnen wir allgemein mit  $V$  die Spannungsdifferenz der Kondensatorplatten, so ist in diesem Falle das Ohmsche Gesetz statt (4) in der Form

$$i w = -L \frac{di}{dt} + V + E_0 \sin \nu_1 t$$

zu schreiben. Durch Benutzung von (5) erhält man für die Potentialschwankung des Kondensators die Gleichung:

$$CL \frac{d^2 V}{dt^2} + Cw \frac{dV}{dt} + V = -E_0 \sin \nu_1 t \quad (25)$$

und für den Strom entsprechend:

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + w \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \nu_1 E_0 \cos \nu_1 t. \quad (26)$$



Dabei ist  $\nu_1 = \frac{2\pi}{T_1}$ , wobei  $T_1$  die Periodendauer der wirkenden periodischen Kraft bedeutet, und die Kraft ist in demselben Sinne positiv gerechnet wie  $V$ .

Ein partikuläres Integral der Gleichung (25) läßt sich in der Form ansetzen:

$$V = V_1 \sin(\nu_1 t + \varepsilon_1). \quad (27)$$

Die Gleichung ist erfüllt, wenn für  $V_1$  und  $\varepsilon_1$  zwei Bedingungsgleichungen erfüllt sind, die sich am übersichtlichsten schreiben lassen, wenn man den Ausdruck einführt:

$$\nu_0^2 = \frac{1}{LC}. \quad (28)$$

Sie lauten dann, wie eine einfache Rechnung ergibt:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \varepsilon_1 &= \frac{w}{L} \cdot \frac{\nu_1}{\nu_1^2 - \nu_0^2} \\ V_1 &= \frac{E_0}{C \sqrt{w^2 \nu_1^2 + L^2 (\nu_1^2 - \nu_0^2)^2}} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Entsprechend ergibt sich für den Strom im Schließungskreis nach (5) die Gleichung:

$$i = -\nu_1 C V_1 \cos(\nu_1 t + \varepsilon_1). \quad (30)$$

Die Amplitude der Oszillation des Stromes hat also den Wert:

$$i_1 = \nu_1 C V_1 = \frac{E_0 \nu_1}{\sqrt{w^2 \nu_1^2 + L^2 (\nu_1^2 - \nu_0^2)^2}}. \quad (31)$$

In diesen Gleichungen bedeutet  $\nu_1$  die Zahl der Oszillationen der erregenden Schwingung in  $2\pi$  Sekunden ( $\nu_1 = \frac{2\pi}{T_1}$ ),  $T_1$  die Oszillationsdauer;  $\nu_0$  bedeutet die entsprechende Zahl für die freien Schwingungen des Kondensatorkreises, wenn sein Widerstand gleich Null wäre. Wir wollen noch mit  $T$  die wirkliche Schwingungszahl des Thomsonschen Kreises bezeichnen und die zugehörige Zahl der Oszillationen in  $2\pi$  Sekunden mit  $\nu$ ; also nach (12)

$$\nu^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} = \nu_0^2 - \frac{w^2}{4L^2} = \nu_0^2 - \delta^2, \quad (32)$$

wenn wir die Dämpfungskonstante  $w/2L$  mit  $\delta$  bezeichnen.

Die aufgestellte Lösung sagt aus, daß in dem Thomsonschen Kreise erzwungene Schwingungen stattfinden von der Periode der erregenden Schwingung; (27) und (30) lehren, daß Strom und Spannung gegeneinander um  $\frac{\pi}{2}$  verschoben sind; (29) und (31) bestimmen die Werte der Strom- und Spannungsamplitude und der Phasendifferenz

gegen die erregende Schwingung. Beide Größen hängen von dem Verhältnis der Periodendauer der erregenden Oszillationen zu der der freien Schwingungen des Kreises ab. Läßt man  $T_1$  von sehr großen Werten allmählich abnehmen bis zu sehr kleinen Werten,  $\nu_1$  also zunehmen von sehr kleinen bis zu sehr großen Werten, so wächst die Amplitude bis zu einem gewissen Maximalwerte und nimmt dann wieder ab. Dieses Auftreten einer maximalen Amplitude bei einem bestimmten Wert der Periodendauer bezeichnet man allgemein als Resonanzerscheinung. Trägt man die Werte von  $\nu/\nu_1$  als Abszissen, die zugehörigen Werte von  $V_1$  oder  $i_1$  als Ordinaten auf, so erhält man eine Kurve, die als Resonanzkurve bezeichnet wird. Durch Differentiation der Gleichungen für  $V_1$  und für  $i_1$  kann man in bekannter Weise den Wert von  $\nu_1$  ermitteln, für den die Kurve ihr Maximum erreicht. Man findet, daß dies für die Spannung der Fall ist bei

$$\nu_1^2 = \nu^2 - \frac{w^2}{4L^2},$$

für die Stromstärke bei

$$\nu_1^2 = \nu^2 + \frac{w^2}{4L^2}.$$

Der Betrag der maximalen Spannung ist:

$$V_{1\max} = \frac{E_0}{wC\nu},$$

der der maximalen Stromstärke:

$$i_{1\max} = \frac{E_0}{w}.$$

Im allgemeinen ist also der Wert der Periodendauer, für den Resonanz eintritt, verschieden, je nachdem man die Spannung oder den Strom betrachtet. Das ist aber nur der Fall bei großer Dämpfung. Ist die Dämpfung klein, so kann  $\frac{w^2}{4L^2}$  in den obigen Ausdrücken vernachlässigt werden gegen  $\nu^2$ . Dann ist im Fall der Resonanz

$$\nu_1 = \nu = \nu_0.$$

Der Thomsonsche Schwingungskreis spricht dann mit maximaler Amplitude gleichzeitig für Strom und Spannung an, wenn die Periodendauer der erregenden Schwingung gleich der der freien Schwingung des Kreises ist. Je kleiner die Dämpfung, d. h.  $w$  ist, um so größer werden die maximalen Amplituden und um so steiler steigt die Resonanzkurve in der Nähe des Resonanzpunktes an; denn wenn  $w$  klein ist gegen  $L$ , so bekommen nach (29) und (31)  $V_1$  und  $i_1$  erst dann größere Werte, wenn  $\nu_1$  nahe an  $\nu_0$  liegt. Man darf aber in den Ausdrücken für  $V_1$  und  $i_1$  das Glied mit  $w^2$  nicht gegen das Glied  $L^2(\nu_1^2 - \nu_0^2)^2$  vernachlässigen; denn sonst

würde man für den Resonanzfall unendlich große Amplituden erhalten, was doch, wegen des tatsächlich doch immer vorhandenen Widerstandes, niemals eintritt.

Die Phasendifferenz  $\varepsilon_1$  hat für große Schwingungsdauern (kleine  $\nu_1$ ) kleine negative Werte, die mit abnehmender Schwingungsdauer wachsen bis  $-\pi$  und im Resonanzfall  $-\frac{\pi}{2}$  betragen. Die Spannung des Kondensators hinkt also immer hinter der erregenden Spannung hinterdrein, im Resonanzfall um eine Viertelperiode, für sehr schnelle Schwingungen um eine halbe Periode<sup>1)</sup>.

Die betrachtete Lösung der Differentialgleichungen (25) und (26) ist aber nur eine singuläre Lösung, die für den Fall gilt, daß sich ein stationärer Schwingungszustand auf dem Kondensatorkreis ausgebildet hat. Sie gilt also nicht für diejenigen Zeiten, die unmittelbar auf den Beginn der Erregung folgen. Will man den Verlauf der Vorgänge im Kondensatorkreis von Anfang an darstellen, so muß man die vollständige Lösung ansetzen, die man erhält, indem man zu der gegebenen singulären Lösung noch das Integral der homogenen Differentialgleichung hinzufügt. Diese Gleichung ist aber nichts anderes als die im Abschnitt 3 behandelte Differentialgleichung des Thomsonschen Kreises und ihr Integral ist die Gleichung für die gedämpfte Schwingung eines solchen Kreises, wie sie in (15) und (16) gegeben ist. Amplitude und Phase dieser Schwingung sind die beiden Integrationskonstanten, deren Werte durch die Bedingungen des Anfangszustandes zu bestimmen sind. Nimmt man die Phase, mit der die erregende Schwingung zur Zeit  $t=0$  zu wirken beginnt, beliebig  $=\Delta$  — sie war bisher  $=0$  angenommen —, setzt man also die äußere elektromotorische Kraft in der Form  $E_0 \sin(\nu_1 t + \Delta)$  an, so lautet die vollständige Lösung unter Berücksichtigung von (18):

$$V = V_0 e^{-\frac{w}{2L}t} \sin(\nu t + \varepsilon_0') + V_1 \sin(\nu_1 t + \Delta + \varepsilon_1),$$

$$i = -i_0 e^{-\frac{w}{2L}t} \cos(\nu t + \varepsilon_0' + \varepsilon) - i_1 \cos(\nu_1 t + \Delta + \varepsilon_1).$$

Der Vorgang besteht also darin, daß die erregende Schwingung außer den erzwungenen Schwingungen auch noch die Eigenschwingung des Systems in einer bestimmten Stärke erregt; diese Eigenschwingungen klingen mit der Zeit ab und nach — streng genommen — unendlich langer Zeit bestehen nur noch die früher behandelten erzwungenen

<sup>1)</sup> Hinsichtlich der näheren Diskussion und der graphischen Darstellung der Resonanzverhältnisse möge auf das Buch von J. Zenneck verwiesen werden: Elektro-

Schwingungen. Ob und in welcher Stärke die Eigenschwingungen auftreten, hängt von den Anfangsbedingungen ab. Nimmt man an, daß im Beginn der Erregung der Kondensator ungeladen und der Kreis stromlos ist, also

$$\text{für } t = 0 : V = 0 \quad \text{und} \quad i = 0,$$

so sind  $V_0$  und  $\delta_0$  durch die Gleichungen bestimmt:

$$\begin{aligned} V_0 \sin \varepsilon_0' + V_1 \sin (\Delta + \varepsilon_1) &= 0, \\ i_0 \cos (\varepsilon_0' + \varepsilon) + i_1 \cos (\Delta + \varepsilon_1) &= 0, \end{aligned}$$

oder unter Berücksichtigung der Gleichungen (18) und (31):

$$\left. \begin{aligned} V_0 \sin \varepsilon_0' + V_1 \sin (\Delta + \varepsilon_1) &= 0, \\ \frac{V_0 \nu}{\cos \varepsilon} \cos (\varepsilon_0' + \varepsilon) + V_1 \nu_1 \cos (\Delta + \varepsilon_1) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Diese beiden Gleichungen bestimmen die Werte von  $V_0$  und  $\varepsilon_0'$ . Hinsichtlich der Ausführung dieser Bestimmung für einzelne Fälle von  $\Delta$  möge wieder auf das obengenannte Buch von Zenneck verwiesen werden. Ist der Schwingungskreis zu Anfang spannungs- und stromlos, so müssen bei Eintritt der Erregung immer Eigenschwingungen des Apparates erregt werden. Denn die Bedingung, daß für  $t = 0$  zugleich Spannung und Strom gleich Null sind, widerspricht der Bedingung, daß zwischen beiden eine Phasendifferenz von  $\frac{\pi}{2}$  besteht, wie sie für die erzwungenen Schwingungen bestehen soll. Es muß daher, bevor der Endzustand der stationären erzwungenen Schwingung erreicht ist, ein Uebergangszustand existieren, in dem eben durch das Auftreten der Eigenschwingungen der Uebergang aus den Bedingungen des Anfangszustandes in die des Endzustandes verwirklicht wird.

## 6. Erregung durch eine gedämpfte periodische elektromotorische Kraft.

In vielen Fällen der praktischen Anwendung der Erregung eines Oszillators durch eine auftreffende Schwingung ist diese Schwingung nicht, wie wir es im vorigen Abschnitte vorausgesetzt haben, eine Schwingung von konstanter Amplitude, sondern selber eine gedämpfte Schwingung. Wegen seiner praktischen Bedeutung wollen wir auch diesen Fall noch behandeln.

Die Differentialgleichung (25) muß in diesem Falle in der Form geschrieben werden:

$$CL \frac{d^2 V}{dt^2} + CW \frac{dV}{dt} + V = -E_0 e^{-\delta_1 t} \sin (\nu_1 t + \Delta). \quad (34)$$

Das partikuläre Integral läßt sich jetzt in der Form ansetzen:

$$V_1 e^{-\delta_1 t} \sin(\nu_1 t + \Delta + \varepsilon_1).$$

Fügt man das Integral der homogenen Gleichung, die man aus (34) erhält, wenn man die rechte Seite gleich Null setzt, hinzu, so kann man die vollständige Lösung in der Form schreiben:

$$V = V_0 e^{-\delta t} \sin(\nu t + \varepsilon_0) + V_1 e^{-\delta_1 t} \sin(\nu_1 t + \Delta + \varepsilon_1), \quad (35)$$

wobei zur Abkürzung  $\delta$  für  $\frac{w}{2L}$  geschrieben ist. Hierin sind  $V_1$  und  $\varepsilon_1$  durch die einfallende Schwingung,  $V_0$  und  $\varepsilon_0$  durch die Anfangsbedingungen bestimmt, die wieder wie im vorigen Abschnitte lauten sollen:

$$\text{für } t = 0: V = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dV}{dt} = 0.$$

Die Lösungen werden einfach, wenn man  $\Delta = \frac{\pi}{2}$  nimmt, also annimmt, daß die einfallende Schwingung mit dem Maximalbetrage ihrer Spannung zu wirken anfängt. Dann ergibt die Einsetzung von (35) in (34) und die Berücksichtigung der Anfangsbedingungen folgende Werte:

1. für die erzwungenen Schwingungen des Kreises:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varepsilon_1 &= \frac{\delta - \delta_1}{\nu} \cdot \frac{2\nu_1 \cdot \nu}{\nu_1^2 - \nu^2 - (\delta - \delta_1)^2}, \\ V_1 &= \frac{E_0(\nu^2 + \delta^2)}{\sqrt{[\nu_1^2 - \nu^2 - (\delta - \delta_1)^2]^2 + 4\nu_1^2(\delta - \delta_1)^2}}, \end{aligned} \quad (36)$$

2. für die freien Schwingungen des Kreises:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} + \varepsilon_0 \right) &= \frac{\delta - \delta_1}{\nu} \cdot \frac{\nu_1^2 + \nu^2 + (\delta - \delta_1)^2}{\nu_1^2 - \nu^2 - (\delta - \delta_1)^2}, \\ V_0 &= \frac{E_0(\nu^2 + \delta^2) \sqrt{\nu^2 + (\delta - \delta_1)^2}}{\nu \cdot \sqrt{[\nu_1^2 - \nu^2 - (\delta - \delta_1)^2]^2 + 4\nu_1^2(\delta - \delta_1)^2}}. \end{aligned} \quad (37)$$

Das Verhältnis der Amplituden der freien und der erzwungenen Schwingungen ist immer

$$\frac{V_0}{V_1} = \sqrt{1 + \left( \frac{\delta - \delta_1}{\nu} \right)^2},$$

ist also stets größer als 1, und wird = 1 für  $\delta = \delta_1$ . Ist  $\delta_1$  klein gegen  $\delta$ , so entspricht der Fall im wesentlichen dem im vorigen Abschnitte behandelten. Die freien Schwingungen klingen ab und es bleiben die erzwungenen Schwingungen übrig, nur daß sie ebenfalls allmählich abklingen. Ist umgekehrt  $\delta$  klein gegen  $\delta_1$ , so klingen die erzwungenen Schwingungen schneller ab, und es bleiben schließlich die freien Schwin-

gungen allein übrig. In beiden Fällen kann man die Veränderlichkeit von  $V$  mit  $\nu_1$  durch eine Resonanzkurve darstellen. Die Amplituden  $V_0$  und  $V_1$  hängen nach (36) und (37) in derselben Weise von  $\nu_1$  ab und nehmen ihren größten Wert an, wenn die im Nenner stehende Wurzel ihren kleinsten Wert annimmt. Dies ist der Fall für:

$$\nu_1^2 = \nu^2 - (\delta - \delta_1)^2.$$

Allein  $V$  ist die algebraische Summe der beiden Schwingungen, und wenn  $\beta$  und  $\beta_1$  nur wenig voneinander verschieden sind, muß man die Summe beider Schwingungen für die Berechnung der Resonanz zugrunde legen. In diesem Falle empfiehlt es sich, die Gleichung (35) auf die Form zu bringen:

$$V = A \sin \left( \frac{\nu_1 + \nu}{2} t + a \right), \quad (38)$$

die nun allerdings nicht mehr eine gewöhnliche Sinusschwingung darstellt, da sowohl Amplitude  $A$  wie Phase  $a$  von der Zeit abhängen. Die Schwingung hat dann den Charakter einer Schwebung. Indem man  $\delta - \delta_1$  klein gegen  $\nu$  annimmt, kann man  $\varepsilon_1 = 0$ ,  $\varepsilon_0 = -\frac{\pi}{2}$  und  $V_1 = V_0$  setzen und erhält:

$$\left. \begin{aligned} \text{und} \quad \text{tg } a &= \frac{e^{-\delta_1 t} - e^{-\delta t}}{e^{-\delta_1 t} + e^{-\delta t}} \text{ctg } \frac{\nu - \nu_1}{2} t \\ A^2 &= V_0^2 [e^{-2\delta t} + e^{-2\delta_1 t} - 2e^{-(\delta + \delta_1)t} \cos(\nu - \nu_1)t]. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Dieser Wert der Amplitude  $A$  ist 0 für  $t=0$  und für  $t=\infty$  und hat dazwischen eine Reihe von Maximal- und Minimalwerten, Schwebungen, die um so deutlicher ausgesprochen sind, je mehr  $\nu$  und  $\nu_1$  und je weniger  $\delta$  und  $\delta_1$  voneinander verschieden sind.

Die Frage nach dem größten Maximum, das  $A$  während des Verlaufs dieser Schwebungen annimmt, und wie dieses größte Maximum von  $(\nu - \nu_1)$  abhängt, läßt sich allgemein an der Gleichung (39) nicht diskutieren, weil die Aufgabe auf eine nicht auflösbare transzendente Gleichung führt. Von Interesse sind aber die beiden Spezialfälle, daß  $\delta = \delta_1$  oder daß  $\nu = \nu_1$  ist, die sich beide behandeln lassen.

Ist  $\delta = \delta_1$ ,  $\nu \geq \nu_1$ , so ist

$$A = 2 \frac{E_0 (\nu^2 + \delta^2)}{\nu_1^2 - \nu^2} e^{-\delta t} \sin \frac{\nu - \nu_1}{2} t. \quad (40)$$

Die Minima von  $A$  sind in diesem Falle Null; die Maxima nehmen mit der Zeit ab, das erste Maximum ist das größte.

$$A = \frac{E_0 (\nu^2 + \delta^2)}{2\nu} \frac{e^{-\delta t} - e^{-\delta_1 t}}{\delta - \delta_1}. \quad (41)$$

Der Amplitudenwert steigt in diesem Falle von  $t=0$  zu einem Maximum an und fällt dann asymptotisch auf Null ab. Der Maximalwert von  $A$  tritt ein für

$$t = \frac{\lg \delta - \lg \delta_1}{\delta - \delta_1}$$

und hat den Betrag

$$A_{\max} = - \frac{E_0 (\nu^2 + \delta^2)}{2\nu} \frac{1}{\delta_1} \left( \frac{\delta_1}{\delta} \right)^{\frac{\delta}{\delta - \delta_1}}. \quad (42)$$

Alle diese Betrachtungen aber sind nicht gültig, wenn zugleich  $\delta_1 = \delta$  und  $\nu_1 = \nu$  ist. Denn der Ausdruck für  $A$  nimmt den Wert  $\frac{0}{0}$  in diesem Falle an. Man erhält aber auch in diesem Falle eine bestimmte Form für  $A$ , wenn man die Gleichung (39) zunächst umgestaltet auf die Form

$$A^2 = V_0^2 e^{-(\delta + \delta_1)t} \left[ \left( e^{+\frac{\delta - \delta_1}{2}t} - e^{-\frac{\delta - \delta_1}{2}t} \right)^2 + 4 \sin^2 \frac{\nu - \nu_1}{2} t \right]$$

und nun die Glieder in der Klammer nach Potenzen entwickelt. Dann lautet das erste Glied dieser Entwicklung:

$$t^2 [(\nu - \nu_1)^2 + (\delta - \delta_1)^2]$$

und dieses Glied verschwindet beim Grenzübergang zu  $\nu = \nu_1$  und  $\delta = \delta_1$  nicht, weil es auch im Nenner des Ausdrucks für  $V_0^2$  [siehe Formel (37)] als Faktor enthalten ist. Berücksichtigt man dies, so erhält man für  $A$  im Falle  $\nu = \nu_1$ ,  $\delta = \delta_1$  den Ausdruck

$$A = \frac{E_0 (\nu^2 + \delta^2)}{2\nu} \cdot t \cdot e^{-\delta t}. \quad (43)$$

Die Amplitude steigt auch in diesem Falle nur zu einem Maximum an und fällt dann asymptotisch ab. Das Maximum wird zur Zeit

$$t = \frac{1}{\delta}$$

erreicht und hat den Wert:

$$A_{\max} = \frac{E_0 (\nu^2 + \delta^2)}{2\nu \delta e}.$$

Streng genommen muß in dem zuletzt behandelten Falle ( $\nu = \nu_1$ ,  $\delta = \delta_1$ ) das Integral von (34) von vornherein in der Form

$$V = \frac{E_0 (\nu^2 + \delta^2)}{2\nu} t e^{-\delta t} \sin \nu t \quad (44)$$

angesetzt werden, vorausgesetzt, daß man von vornherein  $\Delta$  wieder  $= \frac{\pi}{2}$

annimmt. Dieses Integral erfüllt nicht bloß die Gleichung (34), sondern auch die Anfangsbedingungen  $V = 0$  und  $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$  für  $t = 0$ , ist also das vollständige Integral der gegebenen Gleichung<sup>1)</sup>.

Das Interesse an den in diesem Abschnitte entwickelten Formeln liegt in der Möglichkeit, aus dem Studium der Resonanzerscheinungen nicht bloß die Schwingungsdauern, sondern auch die Dämpfungsverhältnisse zu ermitteln. Die in dem Schwingungskreise durch die äußere periodische Kraft erregten Schwingungen können in verschiedener Weise zur Beobachtung kommen. Man kann erstens mit Hilfe einer dem Kondensator parallel geschalteten Funkenstrecke die maximale Schlagweite feststellen, d. h. das größte während des Schwingungsvorganges im Kondensator auftretende Potential. Zweitens kann man mit Bolometer oder Thermoelement im Schließungskreis den Gesamtwärmeeffekt des Stromes während des ganzen Schwingungsverlaufs bestimmen, also einen Integraleffekt, der durch  $\int_0^\infty i^2 dt$  gegeben ist. Oder man kann durch Influenzwirkung der Kondensatorladungen auf eine ungeladene Elektrometernadel den Integraleffekt  $\int_0^\infty V^2 dt$  bestimmen, wie es V. Bjerknes getan

hat. Für die erste Art von Beobachtungsmethoden sind die entwickelten Formeln direkt benutzbar; für die zweite Art lassen sich aus ihnen Formeln für die Integralwerte ableiten. Nach beiden Arten kann man Resonanzkurven aufnehmen. Wir haben oben angenommen, daß man, um eine solche Kurve aufzunehmen,  $\nu_1$  verändere. Für die Mehrzahl der hier in Betracht kommenden Fälle wird man aber  $\nu_1$  als konstant anzunehmen haben und  $\nu$  verändern. Denn die erregende Schwingung kann z. B. von einem sehr entfernten Schwingungskreise ausgehen, wie es in der drahtlosen Telegraphie der Fall ist, bei der die Schwingung eines Thomsonschen Schwingungskreises mit Hilfe einer Antenne auf die Luft übertragen und in großer Entfernung durch eine zweite Antenne wieder auf einen zweiten Schwingungskreis übergeleitet wird. Ohne auf die Art dieser Uebertragung einzugehen, ist es jedenfalls klar, daß in einem solchen Falle am Ort des Empfängers die Periode der einfallenden Schwingung gegeben ist und die des empfangenden Schwingungskreises, des Resonators, geändert werden muß, um die Abstimmung herbeizu-

<sup>1)</sup> In dieser Form entnommen aus Abraham-Föppl, Einführung in die Maxwell'sche Theorie der Elektrizität. 3. Auflage, Leipzig 1907, S. 299. Das im vorliegenden Abschnitte behandelte Problem ist zuerst ausführlich von V. Bjerknes entwickelt worden (Wied. Ann. 44, S. 74, 1891 und 55, S. 121, 1895). Die Darstellung schließt sich außerdem an P. Drude an, Ann. d. Physik (4) 13, S. 512, 1904. Auch möge wieder auf das genannte Werk von J. Zenneck verwiesen werden.



nur  $\nu$ , im zweiten Falle aber ändert sich auch  $\phi$ . Die Resonanzkurven fallen nach Lage der Resonanzpunkte und Größen des Resonanzwertes verschieden aus, je nachdem man  $\nu_1$  oder  $\nu$  verändert und je nachdem man  $\nu$  durch Aenderung von  $C$  oder  $L$  verändert. Wie sich aus diesen Resonanzkurven Aufschlüsse über die Schwingungsdauer und über die beiden Dämpfungsverhältnisse gewinnen lassen, ist von V. Bjerknes und von P. Drude in den genannten Arbeiten ausführlich auseinandergesetzt. Es muß auf diese Arbeiten hier verwiesen werden.

## 7. Die elektrischen Schwingungen eines Ruhmkorffschen Apparates.

Auch die Vorgänge in einem Induktionsapparat lassen sich unter den Gesichtspunkten der in den letzten Abschnitten entwickelten Theorie des Thomsonschen Schwingungskreises betrachten, nur sind die Anfangsbedingungen andere, als wir sie für die Schwingungserregung bisher angenommen haben. Die Verwendung, die der Induktionsapparat findet, beruht fast ausschließlich auf der Wirkung, die die Unterbrechung des Stromes im primären Kreise auf den sekundären Kreis ausübt. Die beiden Seiten der Unterbrechungsstelle werden nach Fizeaus Vorschlag mit den Belegungen eines Kondensators verbunden, um die hohe Spannung, die infolge der Selbstinduktion der primären Spule bei der Unterbrechung des Stromes an der Unterbrechungsstelle auftritt, herabzusetzen. Diese Hinzufügung des Kondensators macht den Primärkreis zu einem Thomsonschen Schwingungskreise, in dem im Augenblick der Stromunterbrechung elektrische Schwingungen entstehen müssen. Wir wollen zunächst die Vorgänge in der primären Spule so behandeln, als ob diese allein vorhanden wäre. Es gelten dann für den Primärkreis vom Moment der Stromunterbrechung an die Gleichungen (7), (14), (15), (16), in denen nur an Stelle von  $w$ ,  $C$ ,  $L$  zur Unterscheidung vom sekundären Kreis  $w_1$ ,  $C_1$ ,  $L_1$  gesetzt werden sollen. In der primären Spule vollziehen sich also nach der Unterbrechung gedämpfte Schwingungen, deren Amplitude und Phase durch die Anfangsbedingungen bestimmt sind; im Augenblick der Unterbrechung, zur Zeit  $t = 0$ , soll der Kondensator ungeladen sein —  $V_1 = 0$  — und der Strom in der Spule den Wert  $J_0$  haben. Der periodische Strom in der Primärspule läßt sich dann allen Bedingungen entsprechend durch die Gleichung darstellen:

$$i_1 = \frac{J_0}{\cos \varepsilon_1} e^{-\delta_1 t} \cos(\nu_1 t + \varepsilon_1), \quad (45)$$

in der  $\nu_1$  die zyklische Periodenzahl,  $\delta_1$  die Dämpfungskonstante und  $\varepsilon_1$  die Phasenkonstante bedeuten. Sie hängen mit  $w_1$ ,  $C_1$ ,  $L_1$  zusammen durch die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \nu_1^2 &= \frac{1}{L_1 C_1} - \delta_1^2 \\ \delta_1 &= \frac{w_1}{2 L_1} \\ \operatorname{tg} \varepsilon_1 &= \frac{\delta_1}{\nu_1} \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Daß solche Schwingungen in der Primärspule tatsächlich auftreten, ist verschiedentlich experimentell nachgewiesen worden<sup>1)</sup>.

Wir wollen uns nun auch den sekundären Kreis als einen Thomsonschen Schwingungskreis denken. Diese Auffassung trifft ohne weiteres zu, wenn die Enden der Sekundärspule mit den Belegungen einer Leidener Flasche oder Batterie verbunden sind, wie es z. B. der Fall war bei den oben auf S. 444 beschriebenen Versuchen von v. Helmholtz. Es möge  $C_2$  die Kapazität dieser Batterie,  $L_2$  die Selbstinduktion der sekundären Spule,  $w_2$  ihr Widerstand sein. Bezeichnen wir dann noch mit  $L_{21}$  den gegenseitigen Induktionskoeffizienten der beiden Spulen, so nimmt die Gleichung (4) die Gestalt an:

$$i_2 w_2 = -L_2 \frac{di_2}{dt} + V_2 - L_{21} \frac{di_1}{dt}.$$

Durch Berücksichtigung der Gleichung (5):

$$i_2 = -C_2 \frac{dV_2}{dt}$$

geht diese Gleichung über in die Form:

$$L_2 C_2 \frac{d^2 V_2}{dt^2} + w_2 C_2 \frac{dV_2}{dt} + V_2 = L_{21} \frac{di_1}{dt}. \quad (47)$$

Wir wollen nun des weiteren die Annahme machen, daß die Schwingungen in dem Primärkreis durch die Vorgänge im Sekundärkreis nicht verändert werden, d. h. wir wollen die Rückwirkung der Sekundärspule auf die Primärspule vernachlässigen. Das ist um so eher gestattet, je kleiner  $\frac{di_2}{dt}$  ist; der Strom aber, der in der Sekundärspule entstehen kann, ist um so kleiner, je kleiner die Kapazität  $C_2$  ist. Machen wir die genannte Annahme,

<sup>1)</sup> Siehe B. Walter, Wied. Ann. 62, S. 312, 1897. Desgl. J. Zenneck, Elektrom. Schwingungen u. drahtlose Telegraphie, S. 368.

führen. Nimmt man aber die Resonanzkurven für veränderliches  $\nu$  auf, so ist zu beachten, daß man, um  $\nu$  zu ändern, entweder die Kapazität  $C$  oder die Selbstinduktion  $L$  ändern kann. Im ersten Falle ändert sich nur  $\nu$ , im zweiten Falle aber ändert sich auch  $\delta$ . Die Resonanzkurven fallen nach Lage der Resonanzpunkte und Größen des Resonanzwertes verschieden aus, je nachdem man  $\nu_1$  oder  $\nu$  verändert und je nachdem man  $\nu$  durch Aenderung von  $C$  oder  $L$  verändert. Wie sich aus diesen Resonanzkurven Aufschlüsse über die Schwingungsdauer und über die beiden Dämpfungsverhältnisse gewinnen lassen, ist von V. Bjerknes und von P. Drude in den genannten Arbeiten ausführlich auseinander-gesetzt. Es muß auf diese Arbeiten hier verwiesen werden.

## 7. Die elektrischen Schwingungen eines Ruhmkorffschen Apparates.

Auch die Vorgänge in einem Induktionsapparat lassen sich unter den Gesichtspunkten der in den letzten Abschnitten entwickelten Theorie des Thomsonschen Schwingungskreises betrachten, nur sind die Anfangsbedingungen andere, als wir sie für die Schwingungserregung bisher angenommen haben. Die Verwendung, die der Induktionsapparat findet, beruht fast ausschließlich auf der Wirkung, die die Unterbrechung des Stromes im primären Kreise auf den sekundären Kreis ausübt. Die beiden Seiten der Unterbrechungsstelle werden nach Fizeaus Vorschlag mit den Belegungen eines Kondensators verbunden, um die hohe Spannung, die infolge der Selbstinduktion der primären Spule bei der Unterbrechung des Stromes an der Unterbrechungsstelle auftritt, herabzusetzen. Diese Hinzufügung des Kondensators macht den Primärkreis zu einem Thomsonschen Schwingungskreise, in dem im Augenblick der Stromunterbrechung elektrische Schwingungen entstehen müssen. Wir wollen zunächst die Vorgänge in der primären Spule so behandeln, als ob diese allein vorhanden wäre. Es gelten dann für den Primärkreis vom Moment der Stromunterbrechung an die Gleichungen (7), (14), (15), (16), in denen nur an Stelle von  $w$ ,  $C$ ,  $L$  zur Unterscheidung vom sekundären Kreis  $w_1$ ,  $C_1$ ,  $L_1$  gesetzt werden sollen. In der primären Spule vollziehen sich also nach der Unterbrechung gedämpfte Schwingungen, deren Amplitude und Phase durch die Anfangsbedingungen bestimmt sind; im Augenblick der Unterbrechung, zur Zeit  $t = 0$ , soll der Kondensator ungeladen sein —  $V_1 = 0$  — und der Strom in der Spule den Wert  $J_0$  haben. Der periodische Strom in der Primärspule läßt sich dann allen Bedingungen entsprechend durch die Gleichung darstellen:

$$i_1 = \frac{J_0}{\cos \varepsilon_1} e^{-\delta_1 t} \cos(\nu_1 t + \varepsilon_1), \quad (45)$$

in der  $\nu_1$  die zyklische Periodenzahl,  $\delta_1$  die Dämpfungskonstante und  $\varepsilon_1$  die Phasenkonstante bedeuten. Sie hängen mit  $w_1$ ,  $C_1$ ,  $L_1$  zusammen durch die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \nu_1^2 &= \frac{1}{L_1 C_1} - \delta_1^2 \\ \delta_1 &= \frac{w_1}{2 L_1} \\ \operatorname{tg} \varepsilon_1 &= \frac{\delta_1}{\nu_1} \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Daß solche Schwingungen in der Primärspule tatsächlich auftreten, ist verschiedentlich experimentell nachgewiesen worden<sup>1)</sup>.

Wir wollen uns nun auch den sekundären Kreis als einen Thomsonschen Schwingungskreis denken. Diese Auffassung trifft ohne weiteres zu, wenn die Enden der Sekundärspule mit den Belegungen einer Leidener Flasche oder Batterie verbunden sind, wie es z. B. der Fall war bei den oben auf S. 444 beschriebenen Versuchen von v. Helmholtz. Es möge  $C_2$  die Kapazität dieser Batterie,  $L_2$  die Selbstinduktion der sekundären Spule,  $w_2$  ihr Widerstand sein. Bezeichnen wir dann noch mit  $L_{21}$  den gegenseitigen Induktionskoeffizienten der beiden Spulen, so nimmt die Gleichung (4) die Gestalt an:

$$i_2 w_2 = -L_2 \frac{di_2}{dt} + V_2 - L_{21} \frac{di_1}{dt}.$$

Durch Berücksichtigung der Gleichung (5):

$$i_2 = -C_2 \frac{dV_2}{dt}$$

geht diese Gleichung über in die Form:

$$L_2 C_2 \frac{d^2 V_2}{dt^2} + w_2 C_2 \frac{dV_2}{dt} + V_2 = L_{21} \frac{di_1}{dt}. \quad (47)$$

Wir wollen nun des weiteren die Annahme machen, daß die Schwingungen in dem Primärkreis durch die Vorgänge im Sekundärkreis nicht verändert werden, d. h. wir wollen die Rückwirkung der Sekundärspule auf die Primärspule vernachlässigen. Das ist um so eher gestattet, je kleiner  $\frac{di_2}{dt}$  ist; der Strom aber, der in der Sekundärspule entstehen kann, ist um so kleiner, je kleiner die Kapazität  $C_2$  ist. Machen wir die genannte Annahme,

<sup>1)</sup> Siehe B. Walter, Wied. Ann. 62, S. 312, 1897. Desgl. J. Zenneck, Elektrom. Schwingungen u. drahtlose Telegraphie, S. 368.

so kann aus (45) der Wert für  $\frac{di_1}{dt}$  in (47) eingesetzt werden. Man erhält dann, unter Berücksichtigung der Beziehungen (46), die Gleichung:

$$C_2 L_2 \frac{d^2 V_2}{dt^2} + C_2 w_2 \frac{d V_2}{dt} + V_2 = - \frac{L_{21} J_0 v_1}{\cos^2 \varepsilon_1} e^{-\delta_1 t} \sin(v_1 t + 2\varepsilon_1), \quad (48)$$

die in ihrer Form mit der Gleichung (34) übereinstimmt. Also folgt aus den Ergebnissen des vorigen Abschnittes, daß in der Sekundärspule unter der gemachten Annahme sich zwei Schwingungen übereinander lagern müssen: die freien Eigenschwingungen des sekundären Kreises und die Schwingungen, die durch die Schwingungen des primären Kreises im sekundären erzwungen werden. Man kann demnach die Lösung der Gleichung (48) in der Form ansetzen:

$$V_2 = V_0 e^{-\delta_2 t} \sin(v_2 t + \varepsilon_2) + V_0' e^{-\delta_1 t} \sin(v_1 t + \Delta). \quad (49)$$

Darin ist der zweite Summand das partikuläre Integral der vollständigen Gleichung (48). Durch Einsetzen dieses Ausdruckes in die Gleichung erhält man zwei Gleichungen, die  $V_0'$  und  $\Delta$  bestimmen. Der erste Summand aber ist das Integral der entsprechenden homogenen Gleichung — Gleichung (48) ohne rechtes Glied —. Die Größen  $\delta_2$  und  $v_2$  haben die den Gleichungen (46) entsprechende Bedeutung für den Sekundärkreis:

$$v_2^2 = \frac{1}{L_2 C_2} - \delta_2^2; \quad \delta_2 = \frac{w_2}{2L_2}. \quad (50)$$

$V_0$  und  $\varepsilon_2$  sind durch die Anfangsbedingungen zu bestimmen. Diese aber lauten, da im Sekundärkreis vor der Unterbrechung des Primärstroms weder Ladung noch Strom besteht:

$$\text{für } t=0: V_2 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dV_2}{dt} = 0.$$

Um die Rechnung zu vereinfachen, wollen wir die Dämpfung so klein annehmen, daß wir ihren Einfluß wenigstens auf die Phasenkonstante vernachlässigen können; dann dürfen  $\varepsilon_1$  und  $\Delta$  gleich Null gesetzt werden. Aus den Anfangsbedingungen folgt alsdann, daß auch  $\varepsilon_2 = 0$  und

$$V_0 = - \frac{v_1}{v_2} V_0' \quad (51)$$

zu setzen ist. Dann läßt sich (49) angenähert in der Form schreiben:

$$V_2 = V_0' v_1 \left( e^{-\delta_1 t} \frac{\sin v_1 t}{v_1} - e^{-\delta_2 t} \frac{\sin v_2 t}{v_2} \right), \quad (52)$$

und daraus folgt nach (5):

$$i_2 = - C_2 V_0' v_1 (e^{-\delta_1 t} \cos v_1 t - e^{-\delta_2 t} \cos v_2 t), \quad (53)$$

wenn wir die Glieder, die  $\frac{\delta_1}{\nu_1}$  oder  $\frac{\delta_2}{\nu_2}$  als Faktor enthalten, wieder vernachlässigen. Für  $V_0'$  aber ergibt sich unter den gleichen Vernachlässigungen:

$$V_0' = L_{21} J_0 \frac{\nu_1 \nu_2^2}{(\nu_1^2 - \nu_2^2)}. \quad (54)$$

Wir fragen nach dem größten Werte, den die Spannung an den Enden der Sekundärspule erreicht. Ist die Sekundärspule, wie wir es angenommen haben, mit einer Leidener Flasche verbunden, so ist die Dauer der Schwingungen im Sekundärkreis erfahrungsgemäß beträchtlich größer als die der Schwingungen im Primärkreis; also  $\nu_2$  klein gegen  $\nu_1$ . Daher überwiegt in (52) das zweite Glied über das erste. Außerdem ist die Dämpfung der Primärschwingungen  $\delta_1$  größer als die der Sekundärschwingungen; denn da der galvanische Widerstand  $w$  proportional der Drahtlänge einer Spule ist, ihre Selbstinduktion  $L$  dagegen annähernd proportional zum Quadrate der Windungszahl der Spule (nach S. 329), d. h. auch proportional zum Quadrate ihrer Drahtlänge, so ist die Dämpfung  $\delta = w : 2L$  um so größer, je kürzer der Draht der Spule ist. Daher klingt das erste Glied in (52) und (53) schnell ab. Die Stromstärke ist nach kurzer Zeit darstellbar durch

$$i_2 = + C_2 V_0' \nu_1 e^{-\delta_2 t} \cos \nu_2 t$$

und die Spannung durch

$$V_2 = - V_0' \frac{\nu_1}{\nu_2} e^{-\delta_2 t} \sin \nu_2 t.$$

Die Schwingung beginnt also angenähert mit dem größten Stromwerte und die Spannung erreicht, wenn man den Einfluß der Dämpfung vernachlässigt, nach einer Viertelschwingung ihren größten Wert. Dieser beträgt unter Vernachlässigung des Dämpfungsfaktors:

$$V_{2 \text{ (max)}} = V_0' \frac{\nu_1}{\nu_2}$$

oder unter Berücksichtigung von (54) und unter Vernachlässigung von  $\frac{\nu_2^2}{\nu_1^2}$  gegen 1:

$$V_{2 \text{ max}} = L_{21} \nu_2 J_0 = \frac{L_{21}}{\sqrt{L_2 C_2}} J_0.$$

Da die beiden Kreise mit gemeinschaftlichem Eisenkern eng miteinander gekoppelt sind, so ist  $L_{21}$  nahezu  $= \sqrt{L_1 L_2}$  (siehe Kapitel V, Abschnitt 11, S. 340). Daher

$$V_{2 \text{ max}} = J_0 \sqrt{\frac{L_1}{C_2}}. \quad (55)$$

Man kann diese Beziehung auch durch eine einfache energetische Betrachtung ableiten. Die magnetische Energie des Primärkreises vor der Unterbrechung ist nach Kapitel IV, Abschnitt 2, S. 298:  $\frac{1}{2} L_1 J_0^2$ ; die elektrostatische Energie der sekundären Kapazität im Augenblick des Maximums ihrer Ladung ist  $\frac{1}{2} C_2 V_2^2 (\max)$ . Würde die erstere ohne jeden Verlust in die letztere umgewandelt, so würde sich aus der Gleichsetzung beider Ausdrücke Gleichung (55) ergeben<sup>1)</sup>. Die obige Ableitung läßt genauer die Vernachlässigungen erkennen, mit deren Hilfe man diese angenäherte Beziehung erhält. Die entwickelten Gleichungen enthalten die Theorie der oben S. 444 ff. beschriebenen Versuche von v. Helmholtz, Schiller, W. König. Auch auf eine Arbeit von W. Heß<sup>2)</sup> möge noch verwiesen werden, der die oszillatorischen Potentialschwankungen der sekundären Kapazität direkt mit Hilfe elektrischer Doppelbrechung gemessen hat.

Bei der gewöhnlichen Anwendung des Induktionsapparates ist die Sekundärspule nicht mit einer größeren Kapazität verbunden, sondern nur mit den Kugeln oder mit Spitze und Platte eines Funkenmikrometers.  $C_2$  ist dann sehr viel kleiner, aber schwer zu beurteilen, da sich in diesem Falle Ladungen auch auf den Endwindungen der Sekundärspule ansammeln können, so daß auch der Spule selbst eine gewisse Eigenkapazität zuzuschreiben wäre. Jedenfalls sprechen die Versuche dafür, daß  $C_2$  in diesem Falle sehr klein ist. Es wäre denkbar, daß jetzt  $v_1$  gegen  $v_2$  klein wäre. Dann würde das erste Glied in (52) überwiegen und die Maximalamplitude wäre diejenige, die nach einer Viertelschwingung des Primärkreises einträte. Das ergäbe:

$$V_{2\max} = V_0' = L_{21} J_0 v_1 = \frac{L_{21}}{\sqrt{C_1 L_1}} J_0$$

und bei der Annahme sehr enger Koppelung:

$$V_{2\max} = J_0 \sqrt{\frac{L_2}{C_1}}. \quad (56)$$

Diese Gleichung würde aussagen, daß ein Induktor um so größere Schlagweiten gibt, je kleiner der Fizeausche Kondensator in ihm ist. Das ist insofern nicht richtig, als der Kondensator seine Aufgabe, die Oeffnungsfunken möglichst unschädlich zu machen, um so schlechter erfüllt, je kleiner er ist. Andererseits aber ist es richtig, daß je größer der Kondensator ist, um so langsamer der in ihn einfließende Strom

<sup>1)</sup> Nach Lord Rayleigh, Phil. Mag. 2, S. 581, 1901; Scient. Papers IV, S. 557.

<sup>2)</sup> W. Heß Wied. Ann. 66, S. 980, 1898.

abnimmt und um so geringer daher seine induzierende Wirkung ist. Es wird daher für jeden Induktor eine günstigste Größe des Kondensators geben, die sich aber theoretisch nur aufstellen läßt, indem man für die Wirkung des Oeffnungsfunkens eine Formulierung sucht, worauf hier nicht eingegangen werden kann. Experimentell ist die Tatsache einer günstigsten Größe der Primärkapazität von Walter<sup>1)</sup> und Mizuno<sup>2)</sup> nachgewiesen worden.

Formel (56) ist von Walter aufgestellt worden, Formel (55) von Rayleigh<sup>3)</sup>. Die allgemeine Theorie der Schwingungen eines Induktionsapparates ist zuerst von Colley<sup>4)</sup> entwickelt worden. Wie sich aus dessen Gleichungen die genannten Formeln ableiten, hat Oberbeck<sup>5)</sup> gezeigt.

Eine besondere Diskussion würde der Fall verlangen, daß die Schwingungsdauern des primären und des sekundären Kreises übereinstimmen. Nach Messungen von Walter<sup>6)</sup> scheint dieser Fall bei größeren Induktorien eintreten zu können. Auch würde er sich, wenn die Eigenkapazität der Sekundärspule genügend klein ist, auf alle Fälle durch passende Wahl der an die Pole der Sekundärspule angehängten Kapazität verwirklichen lassen. Aber wir unterlassen die Durchführung dieses Falles auf Grund der hier entwickelten Theorie, da es einerseits an experimenteller Prüfung der Erscheinungen fehlt, andererseits die Theorie auf alle Fälle unvollständig ist. Die strenge Theorie der Schwingungen in Induktorien würde verlangen, daß die Rückwirkung der Vorgänge in der Sekundärspule auf die Primärspule in Betracht gezogen wird. Diese Forderung führt zu einem neuen Problem, dem der Schwingungen in gekoppelten Systemen, dessen allgemeiner Behandlung der nächste Abschnitt gewidmet ist. Doch werden wir uns dort auf einfache Thomsonsche Schwingungskreise beschränken und auf die Induktorien nicht noch einmal zurückkommen. Die Anwendung der ganzen Theorie, sowohl der hier entwickelten als der der gekoppelten Systeme, auf die Induktorien begegnet nämlich noch der weiteren Schwierigkeit, daß die Anwendung eines Eisenkernes eine der Theorie kaum zugängliche Verwicklung herbeiführt. Denn die magnetischen Wirkungen sind dann nicht mehr der Stromstärke proportional, oder die Induktionskoeffizienten dürfen nicht mehr als konstant behandelt werden. Dies macht die Ausarbeitung einer strengen Theorie der Induktorien so gut wie illusorisch.

<sup>1)</sup> B. Walter, Wied. Ann. **62**, S. 317, 1897.

<sup>2)</sup> T. Mizuno, Phil. Mag. **45**, S. 447, 1898.

<sup>3)</sup> Rayleigh, s. o.

<sup>4)</sup> R. Colley, Wied. Ann. **44**, S. 109, 1891.

<sup>5)</sup> A. Oberbeck, Wied. Ann. **64**, S. 203, 1898. Eine Zusammenstellung der Literatur über den Induktionsapparat bis 1905 findet man in dem Büchlein „La Bobine d'induction“ von H. Armagnat, Paris 1905.

<sup>6)</sup> B. Walter, Wied. Ann. **66**, S. 623, 1898.



Es bedarf schließlich wohl kaum eines besonderen Hinweises darauf, daß die ganzen Betrachtungen nur gelten, solange der Sekundärkreis offen ist, und ihre Gültigkeit verlieren, sobald irgendeine Entladung zwischen den Polen des Induktoriums auftritt, da damit die Bedingungen im Sekundärkreis völlig geändert werden.

## 8. Zwei gekoppelte Schwingungskreise.

Bei den in den vorigen Abschnitten behandelten Fällen war die erregende Schwingung als gegeben angenommen, und es war stillschweigend vorausgesetzt, daß sie durch den Schwingungsvorgang im Resonator nicht beeinflusst wird. Es soll nun die Wirkung, die der Resonator erfährt, von einem Schwingungskreis ähnlicher Art ausgehen, es soll die Einwirkung dieses primären Kreises auf den sekundären dadurch stattfinden, daß ein Teil der magnetischen Kraftlinien des primären Kreises durch die Windungsfläche des sekundären Kreises hindurchgeht. Ist diese magnetische Koppelung der beiden Kreise sehr lose, so haben wir den Fall des Abschnittes 6. Werden im primären Kreis Schwingungen erregt, so induzieren sie Schwingungen im sekundären Kreise, ohne daß sie selbst von diesen wesentlich geändert würden. Ist aber die Koppelung nicht sehr klein, so tritt ein neuer Fall ein, der einer ganz besonderen Untersuchung bedarf. Für jeden Kreis gilt dann die Fundamentalgleichung (6) des Thomsonschen Schwingungskreises; nur muß noch diejenige elektromotorische Kraft hinzugefügt werden, die aus der Induktionswirkung des anderen Kreises hervorgeht. Es sollen alle auf den primären Kreis bezüglichen Größen durch den Index 1, alle auf den sekundären Kreis bezüglichen durch den Index 2 bezeichnet werden. Der gegenseitige Induktionskoeffizient sei  $L_{12}$  für die Wirkung, die 1 von 2 empfängt, und  $L_{21}$  für die Wirkung, die 2 von 1 empfängt. Sind die Bedingungen einer quasistationären Strömung (siehe Abschnitt 3) für beide Kreise erfüllt, so ist nach Kapitel V, Abschnitt 5  $L_{12} = L_{21}$ . Aber die Gleichungen lassen sich auch auf Fälle anwenden, in denen diese Gleichheit nicht besteht. Das ist z. B. bei einem Tesla-Transformator der Fall, wie P. Drude<sup>1)</sup> bewiesen hat. Wir wollen daher die Möglichkeit einer Ungleichheit von  $L_{12}$  und  $L_{21}$  von vornherein offen lassen. Für die Formelentwicklung kommt das zunächst gar nicht in Betracht, da die beiden Größen nur gemeinsam in der Gestalt des Koppelungskoeffizienten vorkommen. Diesen hatten wir früher (Kapitel V, Abschnitt 11, Formel 45') definiert durch

<sup>1)</sup> P. Drude, Ann. d. Physik (4) 13, S. 512, 1904.

$$k^2 = \frac{L_{12}^2}{L_1 \cdot L_2}.$$

Er soll jetzt allgemeiner definiert sein durch die Gleichung:

$$k^2 = \frac{L_{12} \cdot L_{21}}{L_1 \cdot L_2}. \quad (57)$$

Unter Berücksichtigung der gegenseitigen Induktion nimmt die Gleichung (4) für den ersten Kreis die Gestalt an:

$$\left. \begin{aligned} w_1 i_1 &= -L_1 \frac{di_1}{dt} + V_1 - L_{12} \frac{di_2}{dt} \\ \text{und für den zweiten Kreis:} \\ w_2 i_2 &= -L_2 \frac{di_2}{dt} + V_2 - L_{21} \frac{di_1}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Durch Berücksichtigung der Gleichung (5), die für beide Kreise gilt, erhält man die beiden Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} L_1 C_1 \frac{d^2 V_1}{dt^2} + L_{12} C_2 \frac{d^2 V_2}{dt^2} + C_1 w_1 \frac{dV_1}{dt} + V_1 &= 0 \\ L_2 C_2 \frac{d^2 V_2}{dt^2} + L_{21} C_1 \frac{d^2 V_1}{dt^2} + C_2 w_2 \frac{dV_2}{dt} + V_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

Um Gleichungen zu gewinnen, die nur  $V_1$  oder nur  $V_2$  enthalten, kann man die beiden Gleichungen zunächst noch zweimal nach  $t$  differenzieren und dann für  $\frac{d^2 V_1}{dt^2}$  in der ersten Gleichung den Wert einsetzen, den man direkt aus der zweiten Gleichung in der obigen Form erhält, und umgekehrt. Man erhält dann für  $V_1$  und  $V_2$  identische Differentialgleichungen vierten Grades:

$$\begin{aligned} &\left(1 - \frac{L_{12} \cdot L_{21}}{L_1 L_2}\right) \frac{d^4 V_1}{dt^4} + \left(\frac{w_1}{L_1} + \frac{w_2}{L_2}\right) \frac{d^3 V_1}{dt^3} \\ &+ \left(\frac{1}{L_1 C_1} + \frac{1}{L_2 C_2} + \frac{w_1 w_2}{L_1 L_2}\right) \frac{d^2 V_1}{dt^2} + \left(\frac{w_1}{C_2} + \frac{w_2}{C_1}\right) \frac{1}{L_1 L_2} \frac{dV_1}{dt} + \frac{V_1}{L_1 L_2 C_1 C_2} = 0 \end{aligned} \quad (60)$$

und ebenso für  $V_2$ .  $V_1$  und  $V_2$  werden also durch die gleichen Funktionen der Zeit dargestellt. Als Lösung der Gleichungen können wir ansetzen:

$$V_1 = A e^{xt}, \quad V_2 = B e^{xt}. \quad (61)$$

Man erhält dann für  $x$  eine Gleichung vierten Grades. Diejenigen Fälle, in denen die Vorgänge in den beiden Kreisen aperiodisch verlaufen, interessieren uns hier nicht. Wir wollen also von vornherein die Annahme machen, daß die Dämpfungskonstanten klein genug sind, um ausschließlich periodische Vorgänge zu ermöglichen. Dann müssen die sämtlichen vier Wurzeln der Gleichung für  $x$  komplex, je zwei konjugiert sein, also

$$\begin{aligned}x_1 &= a + ib, & x_3 &= c + id, \\x_2 &= a - ib, & x_4 &= c - id.\end{aligned}$$

Bezeichnet man mit  $A_1, A_2, A_3, A_4$  Integrationskonstanten, so läßt sich  $V_1$  darstellen in der Form:

$V_1 = A_1 e^{at} \cos bt + A_2 e^{at} \sin bt + A_3 e^{ct} \cos dt + A_4 e^{ct} \sin dt$   
oder bei Einführung anderer Konstanten:

$$\left. \begin{aligned}V_1 &= A_1' e^{at} \cos (bt + \varepsilon_1') + A_1'' e^{at} \cos (dt + \varepsilon_1'') \\ \text{und entsprechend:} \\ V_2 &= A_2' e^{at} \cos (bt + \varepsilon_2') + A_2'' e^{at} \cos (dt + \varepsilon_2'').\end{aligned} \right\} \quad (62)$$

Dieses allgemeine Resultat zeigt, daß in jedem der beiden Kreise immer gleichzeitig zwei Schwingungen von verschiedener Schwingungsdauer und verschiedener Dämpfung auftreten, und zwar in beiden Kreisen die gleichen, die nur durch Amplitude und Phase voneinander verschieden sind;  $b$  und  $d$  sind die zyklischen Schwingungszahlen,  $a$  und  $c$  die Dämpfungskonstanten dieser Schwingungen. Wir wollen nun die zyklischen Schwingungszahlen und die Dämpfungskonstanten, die jeder Kreis besitzen würde, wenn er ohne Beeinflussung durch den anderen schwingen würde, wie bisher mit  $\nu_1, \nu_2, \delta_1$  und  $\delta_2$  bezeichnen. Bildet man dann die Koeffizienten der biquadratischen Gleichung für  $x$  in bekannter Weise aus den  $a, b, c$  und  $d$  und vergleicht diese Ausdrücke mit den Koeffizienten, wie sie sich aus Gleichung (60) unter Berücksichtigung von (46) ergeben, so erhält man zur Bestimmung von  $a, b, c$  und  $d$  die vier Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned}a + c &= -\frac{\delta_1 + \delta_2}{(1 - k^2)} \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 4ac &= \frac{\nu_1^2 + \nu_2^2 + \delta_1^2 + \delta_2^2 + 4\delta_1\delta_2}{1 - k^2} \\ a(c^2 + d^2) + c(a^2 + b^2) &= -\frac{\delta_1(\nu_2^2 + \delta_2^2) + \delta_2(\nu_1^2 + \delta_1^2)}{1 - k^2} \\ (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) &= \frac{(\nu_1^2 + \delta_1^2)(\nu_2^2 + \delta_2^2)}{1 - k^2}\end{aligned} \right\} \quad (63)$$

Für die zyklischen Schwingungszahlen  $b$  und  $d$  kann man leicht sehr angenäherte Werte erhalten für den Fall nicht zu großer Dämpfung, wenn man den Satz berücksichtigt, den wir oben (S. 454) gefunden haben, daß die Schwingungsdauer durch die Dämpfung nur sehr wenig beeinflusst werde. Man kann dann für die Berechnung von  $b$  und  $d$   $\delta_1$  und  $\delta_2$  und entsprechend  $a$  und  $c = 0$  setzen und erhält:

$$\left. \begin{aligned}
 b^2 &= \frac{\nu_1^2 + \nu_2^2}{2(1-k^2)} - \sqrt{\frac{(\nu_1^2 + \nu_2^2)^2}{4(1-k^2)^2} - \frac{\nu_1^2 \nu_2^2}{1-k^2}} \\
 &= \frac{\nu_1^2 + \nu_2^2 - 2k\nu_1\nu_2 \sqrt{1 + \frac{(\nu_1^2 - \nu_2^2)^2}{4k^2\nu_1^2\nu_2^2}}}{2(1-k^2)} \\
 d^2 &= \frac{\nu_1^2 + \nu_2^2}{2(1-k^2)} + \sqrt{\frac{(\nu_1^2 + \nu_2^2)^2}{4(1-k^2)^2} - \frac{\nu_1^2 \nu_2^2}{1-k^2}} \\
 &= \frac{\nu_1^2 + \nu_2^2 + 2k\nu_1\nu_2 \sqrt{1 + \frac{(\nu_1^2 - \nu_2^2)^2}{4k^2\nu_1^2\nu_2^2}}}{2(1-k^2)}
 \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

Ist die Koppelung  $k$  nicht zu gering und sind andererseits die Schwingungsdauern der beiden Kreise so wenig voneinander verschieden, daß man  $(\nu_1 - \nu_2)^2$  gegen  $\nu_1$  und  $\nu_2$  vernachlässigen kann, so erhält man einfach:

$$b^2 = \frac{\nu_1 \nu_2}{1+k} \quad \text{und} \quad d^2 = \frac{\nu_1 \nu_2}{1-k}. \quad (65)$$

Sind beide Schwingungskreise vor der Koppelung genau aufeinander abgestimmt ( $\nu_1 = \nu_2$  oder  $T_1 = T_2 = T$ ), so entstehen gleichwohl nach der Koppelung in jedem Kreise stets zwei Schwingungen von den Schwingungsdauern

$$T' = T\sqrt{1+k} \quad \text{und} \quad T'' = T\sqrt{1-k}. \quad (66)$$

Je enger die Koppelung ist, um so mehr entfernen sich die Schwingungsdauern der beiden Schwingungen, die eine nach oben, die andere nach unten, von der Schwingungsdauer der Einzelsysteme<sup>1)</sup>.

Führt man die Werte (65) für  $b^2$  und  $d^2$  in die Gleichungen (63) ein, so kann man aus der ersten und dritten dieser Gleichungen angenäherte Werte für  $a$  und  $c$  berechnen, unter der Voraussetzung, daß die Dämpfungskonstanten  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  und entsprechend  $a$  und  $c$  so klein sind gegen  $\nu_1$ ,  $\nu_2$ ,  $b$  und  $d$ , daß man ihre höheren Potenzen und ihre Produkte vernachlässigen kann. Man erhält dann in Fällen, die der Resonanz ( $\nu_1 = \nu_2$ ) nahe liegen, für die Dämpfungskonstanten der beiden Schwingungen die Werte:

$$a = -\frac{\delta_1 + \delta_2}{2} \frac{1}{1+k} \quad \text{und} \quad c = -\frac{\delta_1 + \delta_2}{2} \frac{1}{1-k}. \quad (67)$$

Die langsamere Schwingung mit der Periode  $T'$  hat also kleinere Dämpfung als die schnellere Schwingung mit der Periode  $T''$ . Will man

<sup>1)</sup> Der Nachweis dieser Eigentümlichkeit gekoppelter Systeme ist nahezu gleichzeitig 1895 von J. v. Geitler, Fürst Galitzin und A. Oberbeck geführt worden.

statt der Dämpfungskonstanten die logarithmischen Dekremente einführen, so muß man nach (22) a mit  $T'$ , c mit  $T''$  multiplizieren, entsprechend  $\delta_1$  mit  $T_1$ ,  $\delta_2$  mit  $T_2$ . Bezeichnet man die Dekremente mit  $\gamma'$ ,  $\gamma''$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ , so hat man im Resonanzfalle unter Anwendung von (66)

$$\gamma' = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \frac{1}{\sqrt{1+k}}, \quad \gamma'' = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \frac{1}{\sqrt{1-k}}. \quad (68)$$

Es ist also auch das logarithmische Dekrement für die langsamere Schwingung kleiner als für die schnellere, und das gilt auch dann, wenn die beiden Kreise bei gegenseitiger Nichtbeeinflussung gleiche Dekremente haben.

Führt man nun die durch (62) gegebenen Lösungen in die Gleichungen (59) ein, so erhält man Beziehungen zwischen den Konstanten  $A_1$  und  $A_2$ ,  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$ . Wir wollen auch diese Rechnung der Einfachheit halber nur unter Vernachlässigung der Dämpfung durchführen. Die Gleichungen (59) ergeben dann unter Benutzung von (65) ohne weiteres die Beziehungen:

$$\operatorname{tg} \varepsilon_1' = \operatorname{tg} \varepsilon_2', \quad \operatorname{tg} \varepsilon_1'' = \operatorname{tg} \varepsilon_2'',$$

$$A_2' = A_1' \sqrt{\frac{L_{21} C_1}{L_{12} C_2}} \frac{k + \frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1}}{k}, \quad A_2'' = -A_1'' \sqrt{\frac{L_{21} C_1}{L_{12} C_2}} \frac{k - \frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1}}{k} \quad (69)$$

für Fälle, in denen  $\nu_1$  und  $\nu_2$  wenig voneinander abweichen. Im Resonanzfalle ist also:

$$A_2' = A_1' \sqrt{\frac{L_{21} C_1}{L_{12} C_2}}, \quad A_2'' = -A_1'' \sqrt{\frac{L_{21} C_1}{L_{12} C_2}}. \quad (70)$$

Die nun noch unbestimmt bleibenden Konstanten  $A_1'$ ,  $A_1''$ ,  $\varepsilon_1'$ ,  $\varepsilon_1''$  sind durch die Anfangsbedingungen zu bestimmen. Diese sind verschieden, je nach der Natur des behandelten Problems. Der bekannteste Apparat, der auf einer Koppelung elektrischer Schwingungskreise beruht, ist der von Tesla erfundene Transformator, in dem die Entladung einer Leidener Flasche durch einen Schließungsdraht von einer oder einigen Windungen geleitet wird und induzierend auf eine innerhalb dieser Primärwindungen befindliche Sekundärspule einwirkt. Je nach der Anwendung, die man von dem Transformator macht, sind die Enden der Sekundärspule mit Kapazität verbunden oder nicht. In letzterem Falle wirkt die Spule selber als Kapazität, indem sich auf ihren Windungen nach den Enden zu die elektrischen Ladungen bei den Schwingungsvorgängen anhäufen. Wie sich Kapazität und Selbstinduktion einer solchen Spule berechnen, soll hier nicht ausgeführt werden<sup>1)</sup>. In jedem

<sup>1)</sup> Berechnungen und Untersuchungen darüber hat P. Drude angestellt. Ann. d. Physik (4) 13, S. 512, 1904 und 16, S. 116, 1905.

Falle, mit oder ohne Endkapazität, läßt sich die Spule so dimensionieren, daß sie mit dem Primärkreis gleiche Schwingungsdauer hat. Die Anfangsbedingungen bestehen nun für diesen Fall unseres Problems darin, daß die primäre Kapazität zu Beginn der Entladung auf das Entladungspotential  $F$  geladen, der sekundäre Kreis ungeladen und der Strom in beiden Kreisen Null ist; also

$$\left. \begin{aligned} \text{für } t = 0: \quad V_1 &= F, & V_2 &= 0, \\ \frac{dV_1}{dt} &= 0, & \frac{dV_2}{dt} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

Nimmt man auch hier die Dämpfung wieder als verschwindend an, so folgt aus den beiden letzten dieser Gleichungen sofort, daß  $\varepsilon_1' = \varepsilon_1'' = 0$ , und dann aus den beiden ersten Gleichungen, daß  $A_1' = A_1'' = \frac{F}{2}$  ist.

Also lauten für diesen Fall unter den angegebenen Vernachlässigungen die angenäherten Lösungen:

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{F}{2} \left\{ e^{\frac{-\gamma' t}{T'}} \cos \frac{2\pi t}{T'} + e^{\frac{-\gamma'' t}{T''}} \cos \frac{2\pi t}{T''} \right\} \\ V_2 &= \sqrt{\frac{L_{21} C_1}{L_{12} C_2}} \frac{F}{2} \left\{ e^{\frac{-\gamma' t}{T'}} \cos \frac{2\pi t}{T'} - e^{\frac{-\gamma'' t}{T''}} \cos \frac{2\pi t}{T''} \right\} \end{aligned} \quad (72)$$

oder bei vollständiger Vernachlässigung der Dämpfung:

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{F}{2} \left( \cos \frac{2\pi t}{T'} + \cos \frac{2\pi t}{T''} \right), \\ V_2 &= \sqrt{\frac{L_{21} C_1}{L_{12} C_2}} \frac{F}{2} \left( \cos \frac{2\pi t}{T'} - \cos \frac{2\pi t}{T''} \right). \end{aligned} \quad (72')$$

Bezeichnet man das Verhältnis der beiden Schwingungsdauern  $T'/T''$

mit  $q$ , wobei also im Resonanzfalle  $q = \sqrt{\frac{1+k}{1-k}}$  ist, so läßt sich der

Verlauf der Erscheinung folgendermaßen beschreiben. Nach Beginn der Entladung verlaufen die Schwingungen im Primärkreise anfangs mit der Amplitude  $F$ . Infolge der Verschiedenheit von  $T'$  und  $T''$  weichen die beiden Kosinusfunktionen in der Klammer allmählich voneinander ab, nehmen entgegengesetzte Vorzeichen an und heben sich schließlich auf.

Das ist zuerst der Fall, wenn  $t = \frac{T'}{2(q-1)}$  ist. Wenn sich zu dieser

Zeit die beiden Kosinus in dem Ausdruck für  $V_1$  gerade aufheben, so addieren sie sich in dem Ausdruck für  $V_2$ . Die Energie, die ursprünglich in dem Primärkreis mit dem Betrage  $\frac{1}{2} C_1 F^2$  vorhanden gewesen

war, ist also nach Ablauf der Zeit  $\frac{T'}{2(q-1)}$  im Primärkreis ganz er-

loschen, während im Sekundärkreis jetzt die Energie  $\frac{1}{2} C_2 V_2^2$  enthalten ist, die, wenn  $L_{12} = L_{21}$  und die Summe der Kosinus  $= 2$  ist, den Betrag  $\frac{1}{2} C_1 F^2$  annimmt. Es ist also die ganze Energie des Primärkreises auf den Sekundärkreis übergegangen. Von diesem strömt sie im weiteren Verlauf auf den Primärkreis zurück und wandelt so zwischen beiden Kreisen hin und her. Die Zeitdauer dieses Uebergangs ist um so kürzer, je größer  $q$ , d. h. je fester die Koppelung ist.

Die Amplitude der Sekundärschwingung, d. h. der Maximalwert, den das Potential im sekundären Kreise annimmt, ist gleich der primären Schwingung multipliziert mit  $\sqrt{\frac{C_1}{C_2}}$ , wenn  $L_{12} = L_{21}$  gesetzt wird. Um ein möglichst hohes Potential im sekundären Kreise zu erreichen, empfiehlt es sich also, die Kapazität des sekundären Kreises möglichst klein, die des primären möglichst groß zu machen, wobei natürlich, um die Resonanzbedingung zu erfüllen, die Selbstinduktionskoeffizienten umgekehrt für den primären Kreis klein, für den sekundären groß sein müssen.

Diese Gesichtspunkte sind maßgebend für die rationelle Konstruktion von Tesla-Transformatoren. Man macht, um hohe sekundäre Potentiale zu erzielen, den primären Kreis am besten aus einer einzigen Windung eines möglichst dicken Drahtes, der die beiden Belegungen einer Leidener Flasche über eine Funkenstrecke hinweg verbindet, während die sekundäre Spule eine eng gewickelte Spule von vielen Windungen ist. Die Koppelung der beiden Kreise kann bei den gewöhnlichen Transformatoren, bei denen die Spulen in Luft stehen, nicht sehr hoch gemacht werden, weil bei zu enger Umschließung der sekundären Spule durch die primäre Büschelentladungen zwischen ihnen übergehen. Dieser Uebelstand läßt sich vermeiden und die Koppelung größer wählen, wenn man die Spulen in Petroleum einbettet. Auf das maximale Potential in dem Sekundärkreis hat allerdings nach der obigen Formel der Koppelungsgrad gar keinen Einfluß. Das ist nur verständlich, wenn man sich daran erinnert, daß dies Resultat unter vollständiger Vernachlässigung der Dämpfung gewonnen wurde. In diesem Falle wird der sekundäre Kreis durch die Einwirkung des primären immer bis zu der gleichen Maximalamplitude angeregt; nur wird diese Maximalamplitude bei starker Koppelung schnell erreicht, bei schwacher erst nach längerer Zeit. In Wirklichkeit wird die immer vorhandene Dämpfung den Verlauf der Erscheinungen und die abgeleiteten Gesetzmäßigkeiten erheblich abändern.

Die vollständigere Theorie der Schwingungen gekoppelter Systeme unter Berücksichtigung der Dämpfung ist von M. Wien<sup>1)</sup> und in be-

<sup>1)</sup> M. Wien, Wied. Ann. 61, S. 151, 1897.

sonderer Anwendung auf den Tesla-Transformator von P. Drude<sup>1)</sup> eingehend behandelt worden. Es möge aus dieser vollständigen Theorie hier nur das Resultat angegeben werden, daß bei Berücksichtigung der Dämpfung in den Formeln (65) bis (68) an Stelle von  $k$  eine Größe  $k'$  tritt, die durch die Gleichung bestimmt ist

$$k'^2 = k^2 - \left( \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2\pi} \right)^2, \quad (73)$$

vorausgesetzt, daß die Koppelung groß genug gegenüber der Differenz der bezüglichen Dekremente ist, um für  $k'$  einen reellen Wert zu geben.

Der Koppelungsfaktor  $k$  oder im allgemeineren Falle  $k'$  läßt sich mit Genauigkeit auf Grund der Gleichung (66) durch Messung der Schwingungsdauern  $T$ ,  $T'$  und  $T''$  ermitteln. Man bedient sich dazu eines geeichten Thomsonschen Schwingungskreises, dessen Schwingungsdauer durch Veränderung der Kapazität oder der Selbstinduktion in meßbarer Weise verändert werden kann. Man stellt diesen Meßkreis in der Nähe der beiden gekoppelten Kreise so auf, daß er von magnetischen Kraftlinien dieses Systems geschnitten wird. Er wird dann in sehr loser Koppelung von den Schwingungen des Systems miterregt. Wenn man über den Kondensator des Meßkreises eine Geißlersche Röhre legt, so kann man den Meßkreis auf maximale Leuchtwirkung einregulieren. Wird er durch die Schwingungen des gekoppelten Systems erregt, so findet man maximale Leuchtwirkung für zwei verschiedene Schwingungsdauern des Meßkreises, während bei alleiniger Einwirkung des Primärkreises (nach Entfernung des Sekundärkreises) nur eine Resonanzlage des Meßkreises gefunden wird. Aus den so am Meßkreis abgelesenen Werten von  $\nu$  und  $\nu'$ , entsprechend den oben mit  $b$  und  $d$  bezeichneten Werten, berechnet sich der Koppelungsfaktor nach Formel (65) durch die Gleichung:

$$k^2 = \frac{\nu'^2 - \nu^2}{\nu'^2 + \nu^2}. \quad (74)$$

Dabei ist es nicht erforderlich, daß Primär- und Sekundärkreis genau aufeinander abgestimmt seien, da Formel (65) bei geringen Unterschieden von  $\nu_1$  und  $\nu_2$  bereits gültig ist<sup>2)</sup>.

Eine andere wichtige Anwendung finden die gekoppelten Systeme in der drahtlosen Telegraphie. Nach Marconis Erfindung werden elektromagnetische Wellen dadurch auf große Entfernungen hin ausgesandt, daß in einem an hohem Maste vertikal ausgespannten Drahte, der Antenne, elektrische Schwingungen erregt werden. Während Marconi diese Schwingungen wie die eines Thomson-Kreises durch direkte

<sup>1)</sup> P. D. e. Anal. d. Physik (4) 9. 293 u. 590. 1902; 13. S. 512. 1904;



Ladung des Drahtes und Entladung durch eine Funkenstrecke erzeugte, bedient man sich heute nach dem Vorschlage von F. Braun dazu der Resonanzwirkung in einem gekoppelten Systeme. Es werden zunächst durch Funkenentladung die Schwingungen eines geschlossenen Thomson'schen Kreises erregt. Diese werden auf die Antenne übertragen, indem entweder die Antenne an dem einen Ende einer von dem Primärkreis durch Induktion erregten Sekundärspule liegt, deren anderes Ende mit der Erde verbunden ist, oder indem die Antenne direkt an den Primärkreis angelegt ist. Die Vorgänge, die sich bei dieser Art der Schwingungserregung abspielen, sind von denen, die durch unsere Gleichungen über gekoppelte Systeme dargestellt werden, vor allem in zwei Punkten wesentlich verschieden. Die Antenne wirkt erstens nicht als einfache Kapazität, auch dann nicht, wenn sie am Ende der induktiv erregten Sekundärspule sitzt; sondern Strom- und Ladungsvorgänge verteilen sich an ihr in eigentümlicher Weise. Zweitens aber tritt zu den dämpfenden Ursachen, die wir bisher nur in den Widerständen gesucht haben, noch der Energieverlust hinzu, der in der Ausstrahlung von Wellen seitens der Antennen besteht. Beide Punkte können wir erst später ausführlich behandeln. Streng genommen lassen sich also unsere Gleichungen auf die Vorgänge in den Sendern der drahtlosen Telegraphie nicht übertragen. Gleichwohl haben die Beobachtungen gelehrt, daß auch in diesen Fällen die eigentümlichen Eigenschaften gekoppelter Systeme deutlich hervortreten. In der Antenne sind, wie wir später sehen werden, im allgemeinen mehrere Schwingungen von verschiedener Schwingungsdauer möglich. Wird der Primärkreis auf eine von ihnen, etwa auf die Grundschwingung mit der größten Schwingungsdauer, abgestimmt, so wird bei loser Koppelung durch die Schwingungen des Primärkreises nur diese Schwingung in der Antenne mit starker Amplitude erregt. Unter diesen Umständen wird bei jeder Funkenentladung im Primärkreis ein längerer Wellenzug von scharf ausgeprägter Schwingungsdauer von der Antenne entsandt. Damit ist auch für den Empfänger die Möglichkeit einer scharfen Abstimmung auf den Sender gegeben. Aber bei dieser Art der Erregung ist die maximale Amplitude in der Antenne und damit die Reichweite der ausgesandten Wellen nicht sehr groß. Denn bei schwacher Koppelung werden die Schwingungen in der Antenne nur langsam erregt, und da sie zugleich durch die Ausstrahlung stark gedämpft sind, so erreichen sie keine beträchtliche Höhe. Man kann die Amplitude und damit die Reichweite steigern, indem man die Koppelung fester wählt. Aber dann tritt der Uebelstand ein, daß entsprechend den obigen Ausführungen statt einer zwei Schwingungen in dem Systeme auftreten. Der Empfänger, der nur auf eine dieser Schwingungen abgestimmt sein kann, empfängt entsprechend auch nur etwa die Hälfte der Energie, die

in beiden Schwingungen steckt. Diese Schwierigkeit wird beseitigt in einer neueren Anordnung gekoppelter Sender von M. Wien. Während beim Braunschens Sender die Dämpfung der beiden Kreise nicht sehr verschieden ist, benutzt M. Wien einen Primärkreis mit sehr großer Dämpfung<sup>1)</sup> gegenüber einem Sekundärkreis von kleiner Dämpfung. Bei verhältnismäßig enger Koppelung geht dann die Energie des Primärkreises schnell auf den Sekundärkreis über; die Schwingungen im Primärkreis erlöschen und der Sekundärkreis schwingt allein und mit seiner Eigenschwingung langsam aus. Das Wesentliche dieser sogenannten Stoßerregung liegt aber nicht in der großen Dämpfung des Primärkreises allein — diese würde doch nicht verhindern, daß die Schwingungen des Sekundärkreises wieder rückwärts auf den primären wirken —, sondern in einer eigentümlichen Funktion der Funkenstrecke. Wenn nämlich die primären Schwingungen so weit herabgedrückt werden, daß der Funken erlischt, so ist der Primärkreis von da ab unterbrochen und kann durch die Schwingungen im Sekundärkreis nicht wieder angeregt werden. Diese Löschfunken spielen also bei diesen Systemen die Rolle eines Unterbrechers, der den primären Kreis ausschaltet, nachdem seine Energie zum großen Teil auf den sekundären Kreis übertragen ist. Dieser schwingt dann als freies System mit seiner Eigenschwingung.

In den behandelten Fällen hat es sich immer um Resonanzprobleme gehandelt, um Fälle, bei denen  $\nu_1$  und  $\nu_2$  nahezu oder ganz gleich waren. Wir wollen noch den Fall behandeln, daß  $\nu_1$  und  $\nu_2$  sehr weit voneinander verschieden sind. Es soll  $\nu_1$  sehr groß sein gegenüber  $\nu_2$ , so daß  $\frac{\nu_2}{\nu_1}$  eine Größe ist, deren höhere Potenzen vernachlässigt werden können. Dann lassen sich die Gleichungen (64) folgendermaßen umformen:

$$b^2 = \frac{\nu_1^2}{2(1-k^2)} \left(1 + \frac{\nu_2^2}{\nu_1^2}\right) \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4\nu_2^2(1-k^2)}{\nu_1^2 \left(1 + \frac{\nu_2^2}{\nu_1^2}\right)^2}}\right) = \nu_2^2$$

$$d^2 = \frac{\nu_1^2}{2(1-k^2)} \left(1 + \frac{\nu_2^2}{\nu_1^2}\right) \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4\nu_2^2(1-k^2)}{\nu_1^2 \left(1 + \frac{\nu_2^2}{\nu_1^2}\right)^2}}\right) = \frac{\nu_1^2}{1-k^2}$$

oder

$$b = \nu_2 \quad d = \frac{\nu_1}{\sqrt{1-k^2}}. \quad (75)$$

In diesem Falle wird durch die Koppelung der beiden Kreise die langsame Schwingung nicht beeinflusst, die schnelle Schwingung in ihrer Schwingungszahl dagegen noch erhöht.

<sup>1)</sup> M. Wien, Ann. d. Physik (4), 25, S. 644, 1908.

Es gibt eine andere Art der Koppelung zweier Kreise, bei der das Gegenteil stattfindet. Es soll auch dieser Fall noch kurz erörtert werden, weil er bei der üblichen Erzeugung Hertzscher Schwingungen in Betracht kommt. Wir wollen annehmen, daß die beiden Schwingungskreise nicht magnetische, sondern elektrische Kraftlinien miteinander gemein haben. Es soll also im ersten Kreise außer der elektromotorischen Kraft, die von der Selbstinduktion herrührt, und außer der Spannung, die infolge der Aufladung der Kapazität durch den Strom im ersten Kreise wirksam wird, auch noch eine Spannungsdifferenz bestehen, die ein Bruchteil der auf der Kapazität des zweiten Kreises bestehenden Spannungsdifferenz ist, und umgekehrt. Die Gleichungen (58) nehmen dann die Form an:

$$\left. \begin{aligned} w_1 i_1 &= -L_1 \frac{di_1}{dt} + V_1 + k_1 V_2 \\ w_2 i_2 &= -L_2 \frac{di_2}{dt} + V_2 + k_2 V_1 \end{aligned} \right\} \quad (58')$$

und gehen durch Berücksichtigung von (5) über in:

$$\left. \begin{aligned} L_1 C_1 \frac{d^2 V_1}{dt^2} + C_1 w_1 \frac{dV_1}{dt} + V_1 + k_1 V_2 &= 0 \\ L_2 C_2 \frac{d^2 V_2}{dt^2} + C_2 w_2 \frac{dV_2}{dt} + V_2 + k_2 V_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (59')$$

Daraus ergibt sich durch das gleiche Verfahren wie oben, wenn  $k_1 k_2 = k^2$  gesetzt wird, die Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 V_1}{dt^4} + \left( \frac{w_1}{L_1} + \frac{w_2}{L_2} \right) \frac{d^3 V_1}{dt^3} + \left( \frac{1}{L_1 C_1} + \frac{1}{L_2 C_2} + \frac{w_1 w_2}{L_1 L_2} \right) \frac{d^2 V_1}{dt^2} \\ + \left( \frac{w_1}{C_2} + \frac{w_2}{C_1} \right) \frac{1}{L_1 L_2} \frac{dV_1}{dt} + \frac{(1 - k^2)}{L_1 L_2 C_1 C_2} V_1 = 0. \end{aligned} \quad (60')$$

Die Lösungen lassen sich wieder in den Formen (61) und (62) ansetzen. Die Gleichungen (63) aber nehmen in diesem Falle die Form an:

$$\left. \begin{aligned} a + c &= -(\delta_1 + \delta_2) \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 4ac &= v_1^2 + v_2^2 + \delta_1^2 + \delta_2^2 + 4\delta_1 \delta_2 \\ a(c^2 + d^2) + c(a^2 + b^2) &= -\delta_1(v_2^2 + \delta_2^2) - \delta_2(v_1^2 + \delta_1^2) \\ (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) &= (1 - k^2)(v_1^2 + \delta_1^2)(v_2^2 + \delta_2^2) \end{aligned} \right\} \quad (63')$$

Berechnet man die Dauer der beiden in jedem Kreise auftretenden Schwingungen unter Vernachlässigung der Dämpfung, so findet man:

$$b^2 = \frac{\nu_1^2 + \nu_2^2}{2} - \sqrt{\frac{(\nu_1^2 + \nu_2^2)^2}{4} - (1 - k^2) \nu_1^2 \nu_2^2}$$

$$= \frac{\nu_1^2 + \nu_2^2 - 2k\nu_1\nu_2 \sqrt{1 + \frac{(\nu_1^2 - \nu_2^2)^2}{4k^2\nu_1^2\nu_2^2}}}{2},$$

$$d^2 = \frac{\nu_1^2 + \nu_2^2}{2} + \sqrt{\frac{(\nu_1^2 + \nu_2^2)^2}{4} - (1 - k^2) \nu_1^2 \nu_2^2}$$

$$= \frac{\nu_1^2 + \nu_2^2 + 2k\nu_1\nu_2 \sqrt{1 + \frac{(\nu_1^2 - \nu_2^2)^2}{4k^2\nu_1^2\nu_2^2}}}{2}.$$

Für den Resonanzfall,  $\nu_1 = \nu_2$ , wird jetzt

$$b = \nu_1 \sqrt{1 - k}, \quad d = \nu_1 \sqrt{1 + k},$$

oder

$$T_1' = \frac{T}{\sqrt{1 - k}}, \quad T'' = \frac{T}{\sqrt{1 + k}}.$$

Ist andererseits  $\nu_1$  sehr groß gegen  $\nu_2$ , so wird

$$b^2 = \frac{\nu_1^2}{2} \left(1 + \frac{\nu_2^2}{\nu_1^2}\right) \left(1 - \sqrt{1 - \frac{(1 - k^2) 4\nu_2^2}{\nu_1^2 \left(1 + \frac{\nu_2^2}{\nu_1^2}\right)^2}}\right)$$

und durch Reihenentwicklung und Vernachlässigung von  $\frac{\nu_2^2}{\nu_1^2}$  gegen 1:

$$b = \nu_2 \sqrt{1 - k^2}, \quad (75')$$

ferner:

$$d^2 = \frac{\nu_1^2}{2} \left(1 + \frac{\nu_2^2}{\nu_1^2}\right) \left(1 + \sqrt{1 - \frac{(1 - k^2) 4\nu_2^2}{\nu_1^2 \left(1 + \frac{\nu_2^2}{\nu_1^2}\right)^2}}\right)$$

oder mit der gleichen Annäherung:

$$d = \nu_1. \quad (75'')$$

In diesem Falle ist es also die schnelle Schwingung, die bei der Koppelung ungeändert bleibt, während die langsame Schwingung durch die Koppelung noch mehr verlangsamt wird.

Hinsichtlich der experimentellen Untersuchung der Eigenschaften gekoppelter Systeme muß auf die Werke von J. Zenneck verwiesen werden <sup>1)</sup>.

## 9. Der Koeffizient der Selbstinduktion des Schließungskreises.

In den Formeln, die wir in diesem Kapitel für die Vorgänge in elektrischen Schwingungskreisen aufgestellt haben, ist jeder Schwingungskreis definiert durch seine Kapazität, seine Selbstinduktion und seinen Widerstand. Die Kapazität eines Plattenkondensators, einer Leidener Flasche oder einer Flaschenbatterie, wie man sie in Thomsonschen Schwingungskreisen zu benutzen pflegt, kann man leicht berechnen<sup>1)</sup> oder experimentell mit anderen bekannten Kapazitäten vergleichen, z. B. aus der Stärke des Entladungsstromes bei bekannter Potentialdifferenz oder mit Hilfe von Wechselströmen durch die Anwendung einer Schaltung, wie sie als Wheatstonesche Brücke zur Bestimmung galvanischer Widerstände bekannt ist (vgl. Kapitel VI, Abschnitt 19, S. 404).

Nach dem letzteren Verfahren kann man, wie an den genannten Stellen ebenfalls ausgeführt ist, auch den Koeffizienten der Selbstinduktion experimentell mit bekannten Induktionskoeffizienten vergleichen, oder man kann auch Methoden angeben, um ihn in absolutem Maße zu messen. Bei den hier behandelten Fällen elektrischer Schwingungen sind aber die Selbstinduktionskoeffizienten des Schließungskreises stets außerordentlich klein, da ja z. B. bei den Versuchen Feddersens der Schließungsdraht nur aus langen, geradlinig geführten Stücken bestand. Noch kleiner sind sie in den unten näher zu studierenden Fällen von elektrischen Schwingungen an geraden, kurzen Drähten, wie sie Hertz kennen gelehrt hat. Solche kleine Selbstinduktionskoeffizienten lassen sich wohl mit anderen von gleicher Größenordnung experimentell vergleichen. Aber ihren absoluten Betrag zu messen, dafür versagen die sonst benutzten Methoden. Es ist daher erforderlich, für gewisse einfache Formen des Schließungskreises, bzw. der Strombahn, den Betrag der Selbstinduktion auf theoretischem Wege zu ermitteln.

Die Theorie erlaubt ja nun auch für jede bestimmte Gestalt des Schließungskreises ihren Selbstinduktionskoeffizienten  $L$  zu berechnen, jedoch nur, wenn die Stromverteilung innerhalb des Querschnittes des Schließungskreises als bekannt angesehen wird. So haben wir oben in Kapitel V für gewisse einfache Fälle  $L$  berechnet. Nach der dortigen Formel (37) auf S. 335 ist für zwei einander parallel geführte Voll-

---

<sup>1)</sup> Bei dieser Berechnung wird dann allerdings vorausgesetzt, daß dieselben Formeln für statische Ladungen und für schnell wechselnde Ladungen gelten. Dies ist streng genommen nicht der Fall, wie wir weiter unten in Kapitel IX, Abschnitt 20 des näheren sehen werden. Indes werden wir dort erkennen, daß für Schwingungen von der Schnelligkeit der bisher betrachteten die statischen Formeln noch mit genügender Näherung anwendbar sind.

zylinder von gleichem Radius  $R_1 = R_2 = R$ , falls noch  $\mu_0 = \mu_1 = \mu_2 = 1$  gesetzt wird:

$$L = 1 \left( 2 \lg \frac{d^2}{R^2} + 1 \right),$$

wobei  $d$  den Abstand der Drähte voneinander bedeutet. Diese Formel wäre also anzuwenden, wenn bei den Feddersenschen Versuchen der Schließungsdraht aus einer geraden Hinleitung und einer parallelen Rückleitung bestanden hätte. Nennt man  $l'$  die Länge der ganzen Leitung (nicht nur der Hinleitung oder Rückleitung allein), so ist in obiger Formel  $l'$  gleich  $2l$  zu setzen. Es entsteht daher:

$$L = 2l' \left( \lg \frac{d}{R} + \frac{1}{4} \right). \quad (76)$$

Dieselbe Formel ist anwendbar, wenn der Schließungskreis aus mehreren solcher Paare paralleler Leitungen besteht, welche gegenseitig keine Induktion aufeinander ausüben. In gewisser Annäherung kann der Fall, daß der Schließungsdraht ein Quadrat (von der Seitenlänge  $s$ ) bildet, als eine Uebereinanderlagerung zweier paralleler Leitungspaare angesehen werden, bei denen das eine Paar deshalb nicht induzierend auf das andere Paar wirkt, weil die Richtung der Stromfäden des einen Paares senkrecht zu denen des anderen Paares ist. In der Tat zeigt ja die oben S. 302 abgeleitete Neumannsche Formel der Induktionskoeffizienten, daß dieselben verschwinden, falls  $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$  wird.

Es ist daher nach Formel (76), in welcher  $d = s$ ,  $l' = 2s$  zu setzen ist, und in welcher der Faktor 2 zuzufügen ist, da der Schließungsdraht aus zwei gleichen Paaren besteht:

$$L = 2 \cdot 4s \left( \lg \frac{s}{R} + \frac{1}{4} \right),$$

oder falls wir wieder die ganze Länge  $4s$  des Schließungskreises mit  $l'$  bezeichnen:

$$\begin{aligned} L &= 2l' \left( \lg \frac{1}{4} \frac{l'}{R} + \frac{1}{4} \right) = 2l' \left( \lg \frac{l'}{R} + \lg \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) \\ &= 2l' \left( \lg \frac{l'}{R} - 1,13 \right). \end{aligned} \quad (77)$$

Die Formel kann nicht ganz streng richtig sein, weil bei ihrer Ableitung vorausgesetzt ist, daß der Abstand  $d$  der Drähte groß gegen ihre Länge  $l'$  ist, was bei unserem jetzt betrachteten Falle des Quadrates nicht erfüllt ist. Man erhält denn auch in der Tat durch strengere Berechnung:

$$L = 2l' \left( \lg \frac{l'}{R} - 1,9 \right). \quad (77')$$

Ist der Schließungsdraht ein Kreis, so erhält man nach strenger Berechnung:

$$L = 2l' \left( \lg \frac{l'}{R} - 1,5 \right). \quad (77'')$$

Die drei verschiedenen Werte von  $L$  nach (77), (77') und (77'') unterscheiden sich prozentisch wenig voneinander, wenn, wie es meist der Fall ist,  $\frac{l'}{R}$  eine sehr große Zahl ist. So betrug bei dem einen Versuche Feddersens  $l' = 134\,300$  cm,  $R = 0,067$  cm, d. h.  $l' : R = 2 \cdot 10^6$ ,  $\lg \frac{l'}{R} = 14,5$ ; die Formeln (77), (77') bis (77'') ergeben daher für  $L$  Werte, welche sich höchstens um etwa 5 % unterscheiden, und da die Schwingungsdauer  $T$  nach (21) proportional  $\sqrt{L}$  ist, so würden sich die entsprechenden Werte von  $T$  nur etwa um 2,5 % unterscheiden.

Wenn  $l' : R$  groß ist, so kann man daher auch den Subtrahend in den Formeln (77) bis (77'') ganz fortlassen, und einfach für den Koeffizienten der Selbstinduktion eines Schließungskreises, welcher möglichst in der Form geradliniger Strecken in der Weise geführt ist, daß die von den Strecken umrandete Fläche von der Größenordnung des Quadrates der Länge der Strecken ist, näherungsweise die Formel anwenden:

$$L = 2l' \lg \frac{l'}{R}. \quad (77''')$$

Die bisherigen Entwicklungen für  $L$  gelten nur für den Fall, daß im ganzen Querschnitt des Schließungsdrahtes die Stromverteilung gleichförmig sei. Dieses findet aber bei elektrischen Schwingungen streng genommen jedenfalls nicht statt. Denn nach den Ueberlegungen, welche wir oben in Kapitel VI, S. 391 anstellten, ergibt sich, daß die Stromdichte bei schnell stattfindenden Stromänderungen nach dem Inneren des Leiters zu abnimmt. Bei den sehr schnellen Schwingungen, wie sie bei der oszillatorischen Entladung Leidener Flaschen vorkommen, muß daher der Strom wesentlich nur in der äußeren Schicht des Leiters verlaufen, während sein Inneres ganz stromfrei ist.

Dies hat zur Folge, daß einerseits der galvanische Widerstand des Schließungsdrahtes für schnelle elektrische Schwingungen bedeutend größer ausfällt als für stationäre Ströme, da der stromführende Querschnitt für erstere ein viel kleinerer ist als für letztere. Dieser Umstand kann indes, solange der Widerstand immer noch klein gegen  $2\sqrt{L:C}$  ist, nur auf die Dämpfung der Schwingungen [gemäß der Formel (22)] Einfluß haben, dagegen nicht auf die Schwingungsdauer gemäß den Betrachtungen auf S. 454. Dagegen wäre es möglich, daß auch die Selbstinduktion durch die ungleichförmige Stromverteilung

merklich geändert wäre, so daß aus diesem Grunde die Formel (21) nicht ganz richtig sein kann, wenn man in ihr  $L$  aus der Annahme einer gleichförmigen Stromverteilung berechnet.

Suchen wir nun diese Annahme dadurch zu verbessern, daß wir voraussetzen, daß der Strom allein in einer dünnen Oberflächenschicht der Drähte fließt, und wenden wir daher für  $L$  die in Kapitel V auf S. 335 abgeleitete Formel (36) für zwei parallele Hohlzylinder an, so stoßen wir dabei auf die Schwierigkeit, daß die Selbstinduktion  $L$  unendlich groß wird, wenn die durchströmte Oberflächenschicht unendlich dünn wird ( $R_1 = R_1'$ ,  $R_2 = R_2'$ ). Dies Resultat kann aber nach den allgemeinen Ueberlegungen des Kapitels VI, Abschnitt 14, S. 384 nicht richtig sein, in denen gezeigt wurde, daß bei schnellen Stromwechseln die Stromverteilung stets in der Weise stattfindet, daß die magnetische Energie, d. h. die Selbstinduktion, ein Minimum wird. Je schneller daher die Stromwechsel erfolgen, und je mehr sich der Strom auf die Oberfläche des Drahtes zusammenzieht, um so kleiner muß der Koeffizient der Selbstinduktion werden.

Daß wir durch die Voraussetzung gleichförmig durchströmter Hohlzylinder zu einem falschen Resultate für  $L$  kommen, liegt daran, daß in der Oberflächenschicht der Drähte bei schnellen Stromwechseln die Stromdichte ebenfalls nicht gleichförmig ist, sondern daß dicht nebeneinander Ströme von verschiedener Phase laufen, die sogar entgegengesetzt gerichtet sein können. Es folgte dies ja aus der oben S. 390 erläuterten Analogie mit der Wärmebewegung.

Wir können nun unsere dortigen Ueberlegungen leicht in der Weise vervollständigen, daß wir eine strengere Theorie der oszillatorischen Entladung mit Rücksicht auf die ungleichförmige Stromverteilung im Querschnitt erhalten<sup>1)</sup>. Es soll dies im nächsten Abschnitte geschehen.

## 10. Die Stromstärke ist im Querschnitt ungleichförmig verteilt.

Wir wollen annehmen, ein Kondensator werde durch zwei einander parallel geführte gerade Drähte entladen. Legt man die  $z$ -Achse ihrer Richtung parallel, so findet die elektrische Strömung nur parallel der  $z$ -Achse statt.

Nach der Formel (88) des Kapitels VI, S. 388 ist:

$$\frac{j}{\sigma} = -\frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial t} + \mathfrak{C}, \quad (78)$$



falls  $j$  die Stromdichte an einer bestimmten Stelle des Leiters,  $\sigma$  die spezifische Leitfähigkeit an jener Stelle,  $\mathfrak{R}_z$  das Vektorpotential und  $\mathfrak{G}$  die pro Längeneinheit wirkende äußere elektromotorische Kraft bezeichnet. Es ist nun in unserem Falle die ganze auf der Länge  $l'$  des Schließungsdrahtes wirkende elektromotorische Kraft

$$E = \int \mathfrak{G} dl = V_1 - V_2,$$

d. h. gleich der Potentialdifferenz des Kondensators. Wir wollen annehmen, es solle  $j$  und ebenso daher  $\mathfrak{R}_z$  und  $\mathfrak{G}$  unabhängig von der Entfernung  $l$  vom Ende der Leitung sein. Es ergibt sich dann aus der letzten Gleichung:

$$\mathfrak{G} = \frac{V_1 - V_2}{l'}. \quad (79)$$

Die Gleichungen (78) und (79) gelten für jede Stelle innerhalb des Querschnittes des Leitungsdrahtes. Aber man kann nicht für eine beliebige Stelle des Querschnittes den dort herrschenden Wert  $\mathfrak{R}_z$  des Vektorpotentials angeben, ohne die Stromverteilung im Inneren der Drähte zu kennen. Wohl gelingt dies aber für eine Stromfaser an der Oberfläche des Drahtes, falls dieser als Kreiszylinder aufzufassen ist.

Wie nämlich oben S. 245 nachgewiesen wurde, ist das Vektorpotential an der Oberfläche eines kreiszylinderförmigen durchströmten Drahtes nicht abhängig von der speziellen Art der Stromverteilung im Drahte, sondern bestimmt sich nur aus der gesamten im Drahte fließenden Stromstärke. Wird diese mit  $i$  bezeichnet, sowie der Radius des Drahtes mit  $R$ , so ist nämlich nach Formel (36) auf S. 245 an der Oberfläche des Drahtes

$$\mathfrak{R}_z = -2\mu i \lg R + C_1, \quad (80)$$

wo  $C_1$  eine gewisse Konstante bedeutet, welche, falls die Rückleitung des Stromes ein im Abstände  $d$  befindlicher paralleler Zylinder ist, den Wert besitzt (vgl. oben S. 251)

$$C_1 = +2\mu i \lg d. \quad (80')$$

$\mu$  bedeutet in diesen Formeln die Permeabilität des Raumes. Sie ist bei der oben ausgeführten Ableitung der Formeln zunächst überall als von einerlei Wert angenommen. Aus den später auf S. 334 angestellten Ueberlegungen folgt aber, daß, falls die Permeabilität der Drähte von der ihrer Umgebung verschieden sein sollte, dann die Formeln (80) und (80') noch bestehen bleiben, falls die beiden stromführenden Drähte sich nicht gegenseitig sehr nahe kommen; d. h. falls  $d$  groß gegen den Radius  $R$  ist. Wie aus der dortigen Formel (34) hervorgeht, muß dann dem  $\mu$  in (80) und (80') der Wert der Permeabilität in der Umgebung des Drahtes beigelegt werden. Nennt man diesen Wert  $\mu_0$ , so wird daher

$$\mathfrak{R}_z = +2i\mu_0(\lg d - \lg R). \quad (81)$$

Setzt man diesen Wert von  $\mathfrak{R}_2$  in (78) ein und benutzt (79), so entsteht:

$$\frac{j'}{\sigma} = -2\mu_0(\lg d - \lg R) \frac{di}{dt} + \frac{V_1 - V_2}{j'}, \quad (82)$$

wobei  $j'$  die Stromdichte in der Oberfläche des Drahtes bedeutet.

Die Gesamtstromstärke  $i$  ist nun mit der Potentialdifferenz  $V_1 - V_2$  durch die Formel (5) der S. 449 verknüpft, nämlich:

$$i = -C \frac{d(V_1 - V_2)}{dt}, \quad (83)$$

wo  $C$  die Kapazität (nach elektromagnetischem Maße) des Kondensators bedeutet.

Aus den beiden Gleichungen (82) und (83) kann man leicht  $V_1 - V_2$  eliminieren, indem man (82) nach  $t$  differenziert. Indes bleibt dann in gewisser Weise als störendes Glied  $\frac{1}{\sigma} \frac{dj'}{dt}$  stehen, was deshalb stört, weil wir nicht wissen, in welcher Weise  $j'$  mit  $i$  zusammenhängt. Indes kann man dies Glied einfach fortlassen, wenn wir auch hier, gerade wie oben, voraussetzen, daß der galvanische Widerstand des Schließungskreises verhältnismäßig klein, d. h.  $\sigma$  verhältnismäßig groß ist. Jenes Glied kann dann nämlich nur auf die Dämpfung der elektrischen Schwingungen von Einfluß sein, während es die Periode nicht modifiziert. Zur Berechnung der letzteren können wir daher einfach  $\sigma = \infty$  annehmen, und erhalten so aus (82) und (83):

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{i}{C \cdot 2l' \mu_0 (\lg d - \lg R)} = 0. \quad (84)$$

Wenn man diese Differentialgleichung für  $i$  mit der oben abgeleiteten Differentialgleichung (7) vergleicht, so erkennt man, daß an Stelle des Koeffizienten  $L$  der Selbstinduktion des gleichmäßig durchströmten Drahtes hier der Ausdruck tritt:

$$L' = 2l' \mu_0 (\lg d - \lg R), \quad (85)$$

welcher, gemäß der Ableitung der Formel (82), die physikalische Bedeutung des Koeffizienten der Induktion des Stromes auf eine Stromfaser in seiner Oberfläche besitzt. Es gilt daher auch hier für die Schwingungsdauer der Oszillationen eine der Formel (21) analoge Formel, nämlich:

$$T = 2\pi \sqrt{L'C}. \quad (86)$$

Lagert der Schließungskreis nicht in einem Medium von hoher Magnetisierungskonstante (d. h. in Eisen, Nickel, Kobalt), so ist  $\mu_0 = 1$  zu setzen.

Es wird dann (85) zu

$$L' = 2l' \lg \frac{d}{R}. \quad (87)$$

Vergleicht man diesen Wert von  $L'$  mit dem bei gleichförmiger Verteilung der Stromdichte sich ergebenden Werte von  $L$  der Formel (76), so erkennt man, daß in der Tat, wie es ja auch nach den am Ende des vorigen Abschnittes angeführten allgemeinen Ueberlegungen sein muß,  $L'$  etwas kleiner als  $L$  ist. Indes ist bei dem großen Werte, den  $\lg \frac{d}{R}$  bei den angestellten Versuchen hat (vgl. oben S. 486), die Abweichung des  $L'$  und  $L$  und daher um so mehr die Differenz der Schwingungsdauern  $T$ , wenn man sie nach (21) oder nach (86) berechnet, völlig unmerkbar.

Anders gestalten sich die Verhältnisse, wenn der Schließungskreis aus Material von hoher Magnetisierungskonstante, z. B. Eisen, besteht. Sind zwei relativ weit voneinander (um  $d$ ) entfernte parallele Eisenzylinder (Permeabilität  $\mu$ ) gleichförmig von einem hin- bzw. rücklaufenden Strome durchflossen, so ist nach Formel (37) der S. 335 ihr Koeffizient  $L$  der Selbstinduktion, falls die Eisendrähte in Luft lagern ( $\mu_0 = 1$ ) und  $l'$  die Gesamtlänge beider Drähte ist,

$$L = 2l' \left( \lg \frac{d}{R} + \frac{\mu}{4} \right).$$

Da  $\mu$  eine erhebliche Größe besitzt, z. B. der Wert  $\mu = 120$  noch sehr gering ist, so müßte hiernach  $L$  bedeutend größer und daher die elektrischen Schwingungen nach (21) bedeutend langsamer ausfallen, wenn der Schließungsdraht aus Eisen, als wenn er z. B. aus Kupfer besteht. So müßte in dem S. 486 berechneten Beispiel, wo  $\lg \frac{l'}{R} = 14,5$  ist,  $L$  für  $\mu = 120$  etwa dreimal so groß ausfallen, d. h. die Schwingungsdauer etwa 1,7mal so groß.

Dagegen kann nach der in diesem Abschnitte angestellten strengeren Betrachtungsweise, d. h. nach der Formel (86), ein Einfluß des Materials des Schließungskreises auf die Schwingungsdauer  $T$  nicht bestehen, da in (85) die Permeabilität  $\mu$  der Leitung nicht auftritt, sondern nur die Permeabilität  $\mu_0$  der Umgebung.

Dieses Resultat ist nun auch in der Tat bei sehr schnellen Schwingungen, die noch weit schneller als die bisher betrachteten Kondensator-entladungen erfolgen, experimentell bestätigt. Es soll davon unten ausführlicher die Rede sein.

Da wir oben S. 391 sahen, daß bei hoher Permeabilität die Schwingungen viel mehr nach der Oberfläche hingedrängt werden, als bei  $\mu = 1$ , so muß der galvanische Widerstand durch ein großes  $\mu$

wachsen, da sich der Strom auf einen kleineren Querschnitt zusammen-drängt. Infolgedessen muß die Dämpfung der Schwingungen von dem Material des Schließungskreises wesentlich beeinflusst werden, indem sie nicht nur mit abnehmender Leitfähigkeit  $\sigma$ , sondern auch mit wachsender Magnetisierungskonstante  $\mu$  des Drahtes erheblich wachsen muß. Auch dieses Verhalten ist experimentell bestätigt, wie wir weiter unten sehen werden.

Es mag hier hervorgehoben werden, daß aus dem Umstande, daß die Schwingungsdauer bei Anwendung eines Eisendrahtes dieselbe wie bei der eines Kupferdrahtes ist, nicht folgt, daß die Ampèreschen Molekularströme, welche die hohe Magnetisierungskonstante des Eisens bedingen (vgl. oben S. 263), schnellen Schwingungen nicht mehr zu folgen imstande sind. Im Gegenteil wird dies Folgen durch die erhöhte Dämpfung der Schwingungen in einem Eisendrahte gegenüber denen in einem Kupferdrahte erwiesen.

Wenn der Schließungskreis nicht mehr die angegebene einfache Gestalt zweier paralleler Drähte besitzt, so ergibt sich aus den Entwicklungen dieses Abschnittes, daß die Formel (86) für die Schwingungsdauer des Systems bestehen bleibt.  $L'$  bedeutet darin den Koeffizienten der Induktion des Stromsystems auf eine Stromfaser in seiner Oberfläche.

## 11. Weitere Vervollständigung der Theorie.

Die bisher vorgetragene Theorie der oszillatorischen Entladung bedarf noch aus mehreren Gründen der Verbesserung. Es ist nämlich 1. bisher angenommen, daß elektrische Strömung nur im Schließungsdrahte bzw. an seiner Oberfläche, dagegen nicht in dem ihn umgebenden Isolator stattfände. Denn nur unter dieser Annahme gilt die Formel (81) für das Vektorpotential  $\mathfrak{A}_z$ , während man den Wert von  $\mathfrak{A}_z$  an der Oberfläche des Drahtes ohne weiteres nicht angeben kann, wenn im umgebenden Isolator Ströme von unbekannter Verteilung vorhanden sind. — Die Annahme, daß Ströme nur im Leiter existieren, kann aber nicht streng richtig sein, denn auch im umgebenden Isolator existiert infolge der oszillatorischen Entladungen eine periodisch wechselnde elektrische Kraft, welche daher auch im Isolator alternierende Ströme (sogenannte Verschiebungsströme, siehe oben S. 414) wachrufen muß. Wir können dies auch daran erkennen, daß das Vektorpotential, gerade wie die elektrische und magnetische Kraft selber, in der Luft der oben im vorigen Kapitel, S. 434 abgeleiteten Formel (34), in welcher  $\mu = \epsilon = 1$  zu setzen ist, nämlich:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_z}{\partial t^2} = \Delta \mathfrak{A}_z$$

genügen muß. Da nun nach Gleichung (24) des III. Kapitels auf S. 240 ist:

$$\Delta \mathfrak{B}_z = -4\pi j_z,$$

so folgt für die Stromdichte  $j_z$  in der Luft:

$$j_z = -\frac{1}{4\pi c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{B}_z}{\partial t^2}. \quad (88)$$

Es ist also  $j_z$  nur dann gleich Null, wenn  $\mathfrak{B}_z$  unabhängig von  $t$  ist, d. h. wenn im Schließungsdrahte ein konstanter Strom fließt. Je schneller aber derselbe und damit auch  $\mathfrak{B}_z$  variiert, um so mehr müssen sich Verschiebungsströme im Isolator ausbilden.

Da der Faktor  $\frac{1}{4\pi c^2}$  auf der rechten Seite der Gleichung (88) sehr klein ist, so müssen die Stromwechsel schon sehr schnell erfolgen, wenn die Korrektur merklich werden soll. Bei welcher Wechselzahl dies eintritt, können wir leicht aus (88) schätzen. Falls nämlich ein Strom der Gesamtstärke  $i$  in einem geraden Leiter hinfließt und in einem im Abstände  $d$  von ihm befindlichen parallelen Leiter zurückfließt, so ist für einen Punkt  $P$  außerhalb der Leiter, welcher von deren Achsen die Abstände  $r_1$  und  $r_2$  besitzt, nach Formel (57) auf S. 251 bei Nichtberücksichtigung der Verschiebungsströme zu setzen:

$$\mathfrak{B}_z = 2i \lg \frac{r_2}{r_1}.$$

Nennt man  $i'$  die Stromstärke, welche in der Luft in einem Zylinder fließt, welcher den einen der Drähte umgibt und sich bis zur Mitte des Abstandes zwischen beiden Drähten erstreckt, und bezeichnet man mit  $\varphi$  den Winkel zwischen  $r_1$  und  $d$ , so ist

$$i' = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{R_1}^{d/2} j_z r_1 dr_1 = -\frac{1}{2\pi c^2} \frac{d^2 i}{dt^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{R_1}^{d/2} r_1 dr_1 \lg \frac{r_2}{r_1}$$

oder, da

$$\frac{d^2 i}{dt^2} = -\frac{4\pi^2}{T^2} i,$$

falls  $T$  die Schwingungsdauer der Oszillationen bezeichnet,

$$\frac{i'}{i} = \frac{2\pi}{T^2 c^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{R_1}^{d/2} r_1 \lg \frac{r_2}{r_1} dr_1.$$

Um einen Anhalt über den ungefähren Wert des Integrals zu gewinnen, wollen wir für  $r_2$ , das innerhalb des Integrationsgebietes zwischen  $\frac{d}{2}$  und  $3\frac{d}{2}$  schwankt, den Mittelwert  $d$  setzen. Dann gibt die Ausrechnung des Integrals den Wert:

$$2\pi \left[ \frac{d^2}{8} \left( \frac{1}{2} + \lg 2 \right) - \frac{R_1^2}{2} \left( \lg \frac{d}{R_1} + \frac{1}{2} \right) \right].$$

Nimmt man  $d$  als sehr groß gegen  $R_1$  an, was meist erfüllt ist, so kann man daher näherungsweise schreiben:

$$\frac{i'}{i} = \frac{4\pi^2}{T^2 c^2} d^2 \cdot 0,15 = 6 \frac{d^2}{T^2 c^2}. \quad (89)$$

Wie man hieraus ersieht, kommt es auf das Verhältnis  $d:Tc$  an, ob die Stromstärke  $i'$  in der Luft mit zu berücksichtigen ist oder nicht. — Wir haben oben S. 434 gesehen, daß nach der hier gegebenen Maxwell'schen Theorie ebene elektrische Wellen sich mit der Geschwindigkeit  $c$  in der Luft fortpflanzen müssen. Bei periodischer Wiederholung der Wellen mit der Periode  $T$  hat daher  $Tc$  nach der Formel (1) auf S. 441 die Bedeutung der sogenannten Wellenlänge der Wellen. Ob daher unsere bisherige Annäherung ausreicht oder nicht, wird davon abhängen, ob die Distanz der Schließungsdrähte verschwindet gegenüber der Wellenlänge, mit welcher sich ebene elektrische Wellen gleicher Periode in der Luft fortpflanzen würden, oder nicht.

Für den Feddersenschen Versuch lag  $T$  zwischen  $2,6 \cdot 10^{-6}$  und  $45,4 \cdot 10^{-6}$  sek, die Wellenlänge  $Tc$  daher zwischen  $7,8 \cdot 10^4$  und  $136 \cdot 10^4$  cm, d. h. zwischen 0,78 und 13,6 km. Gegen diese Strecken verschwindet natürlich völlig die gegenseitige Entfernung  $d$  der Schließungsdrähte, da in bedeckten Räumen Entfernungen von mehr als 100 m überhaupt meist nicht zu verwirklichen sind. Deshalb ist auch nach (89) die Stromstärke  $i'$  in der Luft gegen die im Drahte zu vernachlässigen, und wir können also die bisherige Theorie als ausreichend ansehen für die Feddersenschen Versuche.

Da wir aber unten sehen werden, daß Hertz elektrische Schwingungen von der Periode  $T = 2 \cdot 10^{-9}$  sek hergestellt hat, denen also, als ebenen Wellen in Luft verlaufend, eine Wellenlänge von 60 cm zukommt, so verschwindet bei solch schnellen Schwingungen die gegenseitige Entfernung der Teile des Schließungskreises voneinander nicht mehr gegen die Wellenlänge  $Tc$ . Daher würde für diese Schwingungen die bisherige Theorie nicht ausreichend sein.

Jedoch läßt sich leicht angeben, wie man den Ausgangspunkt für eine in jedem Falle strenge Theorie zu wählen hat. Im vorigen Kapitel sind nämlich auf S. 420 die Gleichungen (20) und (21) aufgestellt, denen die elektrische und magnetische Kraft in jedem Isolator zu genügen hat. Stellt man analoge Gleichungen für das Innere der Leiter auf, die aber wegen des Vorhandenseins der sogen. Leitfähigkeit entsprechend abzuändern sind (vgl. VII, 6), so hat man ein System von Differentialgleichungen, welches zur Bestimmung der elektrischen und magnetischen Kraft völlig

ausreichen muß, wenn man noch die Bedingungen an der Grenze zwischen Leiter und Isolator, sowie den zur Zeit  $t = 0$  als gegeben anzusehenden Anfangszustand berücksichtigt. — Zur Berechnung der aus der Theorie fließenden Resultate sind also nur noch mathematische Schwierigkeiten zu überwinden, die sich der Auffindung passender Integrale der Differentialgleichungen entgegenstellen können. Solche Schwierigkeiten sind nun in der Tat meist in bedeutendem Maße vorhanden, indes lassen sie sich gut überwinden, wenn, gerade wie bei der im vorigen Abschnitt behandelten angenäherten Theorie der oszillatorischen Entladung, der galvanische Widerstand der Leitung als verschwindend, d. h. die spezifische Leitfähigkeit  $\sigma$  als unendlich groß angenommen wird. Diese vollständige Theorie soll jedoch erst weiter unten auseinandergesetzt werden, nachdem die Experimente besprochen sind, welche zu einer Vervollständigung der Theorie aus den obengenannten Gründen nötigen.

Zunächst sollen noch zwei andere Punkte der bisherigen Theorie besprochen werden, welche der Vervollständigung bedürfen. Nämlich:

2. ist zur Berechnung der Kapazität des Kondensators oben S. 448 eine Formel angewandt, welche nur aus elektrostatischen Erscheinungen abgeleitet ist. Auch diese Formel wird nur bei langsamen Schwingungen Gültigkeit behalten, denn sie setzt voraus, daß die Kondensatorplatten überall dieselbe Ladungsdichte besitzen, d. h. die Dichtigkeit der Verschiebungsströme überall zwischen den Kondensatorplatten konstant ist. Für schnelle Schwingungen muß jedoch dieselbe wegen der Selbstinduktion nach den Rändern der Kondensatorbelegungen zunehmen, gerade wie auch die Dichtigkeit der Leitungsströme wegen der Selbstinduktion nach ihrer Begrenzung zu wachsen muß. Daher ist die Kapazität eines Kondensators nicht ein Begriff, der völlig unabhängig von der Schnelligkeit der Ladungen und Entladungen ist (selbst wenn man einen Luft- oder Vakuumkondensator hat, in dessen Isolator also irgendwelche Nachwirkungs- oder Leitungserscheinungen völlig fehlen); indes ist eine merkbare Aenderung der Kapazität eines Kondensators wiederum erst bei sehr schnellen Schwingungen zu erwarten, deren Häufigkeit die bei der oszillatorischen Entladung von Leidener Flaschen eintretende weit übersteigt. Diese Korrektur soll daher ebenfalls erst weiter unten (IX, 20) besprochen werden.

3. Aber ein dritter Punkt erscheint auch für die bisher betrachteten langsamen Entladungen Feddersens noch näherer Prüfung wert. Es wurde nämlich vorausgesetzt (vgl. oben S. 448), daß die Stromstärke im ganzen Schließungsdrahte, d. h. längs seiner ganzen Länge, dieselbe sei, was dasselbe bedeutet, als wenn wir sagen: es sollen die elektrischen Stromlinien nur aus den Kondensatorflächen austreten, dagegen nicht aus den Seitenflächen des Schließungsdrahtes. Da wir elektrische Strom-

linien, welche in einen Leiter aus- oder eintreten, als mit der Zeit abnehmende oder wachsende elektrische Ladungen des Leiters auffassen können (vgl. VII, 6, S. 425), so ist also die bisherige Voraussetzung die, daß elektrische Ladungen nur auf dem Kondensator, dagegen nicht auf dem Schließungsdraht vorhanden sein sollen. In dieser Fassung erkennt man, daß diese Voraussetzung um so eher erfüllt sein wird, je größer die Kapazität des Kondensators im Vergleich zu der des Schließungskreises ist. Die Voraussetzung wird also gelten bei der Entladung eines Kondensators von großer Kapazität durch einen dünnen und nicht zu langen Schließungsdraht. Da dieser aber bei den Feddersenschen Versuchen zum Teil eine Länge von 1,34 km besaß, so erscheint es als möglich, daß hier obige Voraussetzung nicht mehr genügend erfüllt ist.

Die Kapazität eines geraden Kreiszylinders der Länge  $l$  ist nun leicht zu berechnen. Für Punkte außerhalb desselben ist nämlich

$$\Delta V = 0,$$

falls  $V$  das Potential seiner Ladung bezeichnet. Ist  $l$  so groß gegen den Radius  $R$  des Zylinders, daß das Potential  $V$  der Ladung nur von  $r$ , der senkrechten Entfernung von der Zylinderachse, abhängig ist, so geht nach S. 244, Formel (33) obige Differentialgleichung über in

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dV}{dr} \right) = 0,$$

deren allgemeines Integral ist:

$$V = A \lg r + B.$$

Die Konstante  $A$  bestimmt sich durch Anwendung der Beziehung zwischen Kraftfluß und Elektrizitätsmenge (siehe S. 34). Ist nämlich  $e$  die auf der Längeneinheit des Zylinders befindliche Elektrizitätsmenge (sie sei nach elektrostatischem Maße gemessen, gerade wie auch der Potentialwert  $V$ ), so ist nach jenem Satze:

$$2\pi r \frac{dV}{dr} = -4\pi e,$$

d. h.

$$V = -2e \lg r + B.$$

Befindet sich dem Zylinder gegenüber in der Entfernung  $d$  ein paralleler Zylinder, welcher entgegengesetzt geladen ist, und ist  $d$  groß gegen  $R$ , so ist daher

$$V = -2e \lg \frac{r_1}{r_2},$$

falls  $r_1$  die Entfernung des Aufpunktes  $P$  von der Achse des ersten (mit  $+e$  geladenen) Zylinders bezeichnet,  $r_2$  die Entfernung zwischen  $P$  und



dem zweiten (mit  $-e$  geladenen) Zylinder. Das Potential  $V$  besitzt daher auf dem ersten Zylinder den Wert

$$V_1 = + 2e \lg \frac{d}{R}, \quad (90)$$

auf dem zweiten Zylinder (der von gleichem Radius  $R$  angenommen werden möge) den Wert

$$V_2 = - 2e \lg \frac{d}{R}.$$

Auf der Länge  $l$  des ersten Zylinders lagert daher die Elektrizitätsmenge

$$e = el = \frac{1}{2} V_1 \cdot \frac{l}{\lg \frac{d}{R}},$$

so daß seine Kapazität, die wegen des großen Abstandes des anderen Zylinders so zu berechnen ist, als ob letzterer gar nicht vorhanden sei, in elektrostatischem Maß den Wert hat:

$$C_e^{(1)} = \frac{1}{2} \frac{l}{\lg \frac{d}{R}}.$$

Dieselbe Kapazität besitzt der zweite Zylinder. Daher ist die Kapazität beider Zylinder auf einer Strecke der Länge  $l$  in elektrostatischem Maße

$$C_e = \frac{l}{\lg \frac{d}{R}} = \frac{l'}{2 \lg \frac{d}{R}}, \quad (91)$$

falls  $l'$  wiederum die Länge beider Drähte bedeutet, also  $l' = 2l$  ist.

Vergleicht man diese Formel mit Formel (87) auf S. 490, so erkennt man, daß die Kapazität der Längeneinheit in elektrostatischem Maß gleich dem reziproken Wert des Koeffizienten der Induktion auf die Oberfläche der Drähte pro Längeneinheit ist.

Bei den Versuchen Feddersens ist der Leitungsdraht nicht als ein Doppelparallelstrang geführt. Jedenfalls sind aber zur Schätzung seiner Kapazität in (91) für  $d$  Werte einzusetzen, welche zwischen  $l'$  und etwa 2 m liegen. Für den längsten Leitungsdraht Feddersens betrug  $l' = 1,343 \cdot 10^5$  cm,  $R = 0,067$  cm. Daher ist für ihn bei  $d = 2$  m die Kapazität nach elektrostatischem Maße:

$$C_e = \frac{1,343 \cdot 10^5}{2 \lg 3000} = 0,84 \cdot 10^4,$$

folglich in elektromagnetischem Maße:

$$C = \frac{C_e}{c^2} = 0,1 \cdot 10^{-16} = 0,01 \text{ Mikrofarad.}$$

Da aber die Kapazität der von Feddersen angewandten Leidener Flaschen zum Teil von der Größenordnung 0,013 Mikrofarad war, so ist also bei dem längsten der Schließungsdrähte jedenfalls seine Kapazität nicht gegenüber der des Kondensators zu vernachlässigen. Wir wollen daher die Theorie jetzt noch vervollständigen dadurch, daß wir die Stromstärke im Draht nicht nur in seinem Querschnitt, sondern auch längs seiner Länge variierend annehmen, dabei jedoch die Wirkungen der Verschiebungsströme im umgebenden Isolator zunächst nicht berücksichtigen, was bei Schwingungsdauern von der Ordnung  $T = 10^{-6}$  sek nach den obigen Auseinandersetzungen zulässig erscheint.

## 12. Die Stromstärke variiert im Querschnitt und in der Länge.

Für eine beliebige Stelle P im Inneren eines Leiters gilt die Gleichung (78) des Abschnittes 10, S. 487, nämlich:

$$\frac{j}{\sigma} = - \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial t} + \mathfrak{C}, \quad (92)$$

wobei  $j$  die Stromdichte,  $-\frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial t}$  die durch die elektrischen Ströme hervorbrachte elektromotorische Kraft der Induktion,  $\mathfrak{C}$  die aus anderen Ursachen hervorbrachte elektromotorische Kraft pro Längeneinheit bedeutet. Als solche haben wir bisher nur die elektrischen Ladungen des Kondensators, d. h. die aus seinen Belegungen austretenden elektrischen Kraftlinien angesehen. Wir wollen jetzt annehmen, daß  $\mathfrak{C}$  allein von den elektrischen Ladungen, d. h. austretenden elektrischen Kraftlinien des Leitungsdrahtes selber hervorbracht werde. Den vorhin betrachteten Fall können wir unter den jetzt betrachteten unterordnen, wenn wir an den an den Kondensator angefügten Enden des Leitungsdrahtes noch Drahtstücke von einer derartigen Länge angebracht denken, daß sie dieselben Ladungen enthalten wie der Kondensator, falls er zu gleicher Potentialdifferenz wie die Drahtstücke geladen ist. Besteht nun das Leitungssystem aus zwei parallelen Kreiszyindern vom Radius  $R$  und der Entfernung  $d$ , und variiert die Stromstärke und die elektrische Ladung so langsam in Richtung der Achse der Zylinder, daß wir für jeden Punkt P die Größen  $\mathfrak{B}_z$  und  $\mathfrak{C}$  so berechnen können, als ob in jedem Querschnitt der beiden Leitungsdrähte die Stromstärke und Ladung geradeso verteilt wäre wie in dem durch P hindurchgehenden

Querschnitt, so ist, falls P an der Oberfläche eines der Drähte liegt, nach Formel (81), S. 488, wenn man dort  $\mu_0 = 1$  setzt:

$$\mathfrak{B}_z = 2 i \lg \frac{d}{R}, \quad (93)$$

wobei  $i$  die ganze, durch den Querschnitt eines Drahtes bei P gehende Stromstärke bedeutet. Wir nehmen, gerade wie früher, an, daß an gegenüberliegenden Stellen beider Drähte sowohl die Stromstärken als die Ladungen numerisch gleich, doch von entgegengesetztem Vorzeichen sind, was aus Symmetrierücksichten erfüllt sein muß, wenn z. B. die Drahtenden mit einem symmetrisch gestalteten Kondensator, z. B. Plattenkondensator, verbunden werden.

Ferner ist das Potential V der Ladung im Punkte P nach den gemachten Annahmen durch Formel (90) im elektrostatischen Maß gegeben. Es ist also im elektromagnetischen Maß gemessen (vgl. oben S. 365)

$$\mathfrak{E} = -c \frac{\partial V}{\partial s} = -2c \lg \frac{d}{R} \frac{\partial e}{\partial s}, \quad (94)$$

wobei  $e$  die auf der Längeneinheit des Zylinders bei P lagernde Elektrizitätsmenge nach elektrostatischem Maß bedeutet.

Betrachten wir ein Stück von der Länge  $ds$  eines Drahtes, welches durch zwei Querschnitte 1 und 2 begrenzt ist, so ist die durch den Querschnitt 1 innerhalb der kleinen Zeit  $dt$  eintretende Elektrizitätsmenge in elektromagnetischem Maße:  $i_1 dt$ , wo  $i_1$  die ganze durch den Querschnitt 1 hindurchgehende Stromstärke bezeichnet. In analoger Bezeichnung ist  $i_2 dt$  die durch den Querschnitt 2 austretende Elektrizitätsmenge. Es ist also  $(i_1 - i_2) dt$  der in der Zeit  $dt$  eintretende Zuwachs der elektrischen Ladung des Stückes von der Länge  $ds$ , d. h. es muß sein

$$(i_1 - i_2) dt = \frac{1}{c} \frac{\partial e}{\partial t} dt ds.$$

Der Faktor  $\frac{1}{c}$  muß angefügt werden, weil  $e$  sich auf elektrostatisches Maß bezieht. Da nun nach dem Taylorschen Lehrsatz ist:

$$i_2 = i_1 + \frac{\partial i}{\partial s} ds,$$

so entsteht

$$\frac{\partial i}{\partial s} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial e}{\partial t}. \quad (95)$$

Jetzt haben wir die Mittel gewonnen, eine Differentialgleichung allein für  $i$  aufzustellen. Setzt man nämlich (93) und (94) in (92) ein und nimmt  $\sigma = \infty$ , da wir wissen, daß der galvanische Widerstand, falls die Drähte aus guten Leitern bestehen, nur auf die Dämpfung der

Schwingungen von Einfluß ist, nicht auf die Periode, welche wir jetzt allein untersuchen wollen, so entsteht:

$$0 = \frac{\partial i}{\partial t} + c \frac{\partial e}{\partial s}.$$

Differenziert man diese Gleichung nach  $t$  und setzt für  $\frac{\partial e}{\partial t}$  den aus (95) folgenden Wert, so entsteht:

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 i}{\partial s^2}. \quad (96)$$

Diese Differentialgleichung charakterisiert eine längs der Drähte hin- und hergehende Wellenbewegung für  $i$ ; ihr allgemeines Integral ist

$$i = f_1(s - ct) + f_2(s + ct). \quad (97)$$

$f_1$  entspricht einer nach der  $+s$ -Richtung,  $f_2$  einer nach der  $-s$ -Richtung sich fortpflanzenden Welle. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser Wellen ist  $c$ , d. h. gleich dem Verhältnis der elektrostatischen zur elektromagnetischen Einheit der Elektrizitätsmenge<sup>1)</sup>.

Würden die Drähte anstatt in Luft in einem Isolator lagern, dessen Permeabilität  $\mu$  und dessen Dielektrizitätskonstante  $\epsilon$  ist, so würde nach Formel (81), S. 488, sein

$$V_z = 2\mu \lg \frac{d}{R},$$

ferner müßte (90) erweitert werden in

$$V = \frac{2e}{\epsilon} \lg \frac{d}{R} \quad (90')$$

(da die von einer Ladung  $e$  ausgehende Kraft im Verhältnis  $\frac{1}{\epsilon}$  sinkt).

Wir würden daher aus (92) erhalten mit Fortlassung des gemeinsamen Faktors  $2 \lg \frac{d}{R}$ :

$$0 = \mu \frac{\partial i}{\partial t} + \frac{c}{\epsilon} \frac{\partial e}{\partial s},$$

welche Gleichung, mit (95) kombiniert, liefert:

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\mu \epsilon} \frac{\partial^2 i}{\partial s^2}. \quad (96')$$

Das Integral dieser Gleichung ist

$$i = f_1\left(s - \sqrt{\frac{c}{\mu \epsilon}} t\right) + f_2\left(s + \sqrt{\frac{c}{\mu \epsilon}} t\right), \quad (97')$$

<sup>1)</sup> Wie sich aus der Herleitung dieses Satzes ergibt, ist wesentlich für seine Gültigkeit, daß die Selbstinduktion pro Längeneinheit gleich dem reziproken Wert der Kapazität pro Längeneinheit ist. Bei anderen Anordnungen des Drahtsystems, für welche diese Beziehung nicht mehr besteht (z. B. bei Solenoiden), ist daher auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit elektrischer Störungen nicht mehr gleich  $c$ .

d. h. die Wellen pflanzen sich mit der Geschwindigkeit  $c: \sqrt{\mu\epsilon}$  längs der Drähte fort.

Es ist bemerkenswert, daß für diese, längs sehr guter Leiter sich fortpflanzenden Wellen ganz dieselben Gesetze gelten wie für ebene, im Isolator sich fortpflanzende Wellen elektrischer, resp. magnetischer Verschiebungsströme (vgl. S. 433 ff). Da zur Herleitung des Resultates für die Fortpflanzung der Wellen längs Leitern die Verschiebungsströme völlig ignoriert sind, so ist das hier gewonnene Resultat natürlich keineswegs charakteristisch für die Maxwellsche Theorie.

In der Tat ist die hier eingeschlagene Ableitung der Gleichungen dem Sinne nach identisch mit derjenigen, welche G. Kirchhoff<sup>1)</sup> schon im Jahre 1857, auf dem Boden der Fernwirkungstheorie stehend, gegeben hat.

### 13. Die Grenzbedingungen des Problems.

Wir haben noch zu den Differentialgleichungen (96), resp. (96'), die Bedingungen für die Enden der Drähte zu bilden, welche bei  $s=0$  und  $s=l$  liegen sollen. Es sind zwei verschiedene Fälle von Grenzbedingungen möglich: Sind die beiden Leitungsdrähte an einem Ende zusammenhängend oder durch einen guten Leiter überbrückt, so muß dort offenbar das Potential  $V$  ein und denselben Wert besitzen. Da nun an gegenüberliegenden Stellen die Ladungen  $e$  der Drähte von entgegengesetztem Vorzeichen sind und daher auch  $V$ , so erfordert die Gleichheit beider  $V$ , daß die Ladungen dort verschwinden. Es muß also an einer kurz überbrückten Stelle  $e$  verschwinden, d. h. nach (95) muß dort sein:

$$\frac{\partial i}{\partial s} = 0, \text{ an der Brücke.} \quad (98)$$

Dies gilt nicht nur, falls die überbrückte Stelle am Ende der Drähte liegt, sondern auch, falls eine beliebige Zwischenstelle oder deren mehrere überbrückt sind.

Da aus (95) folgt, daß auch die Ladungen  $e$ , resp. die Potentiale  $V$  die Superposition zweier mit der Geschwindigkeit  $c: \sqrt{\mu\epsilon}$  sich fortpflanzender Wellen sind, weil dies für  $i$  gilt, so bedeutet die Grenzbedingung (98), welche gleichbedeutend mit  $e=0$  ist, daß an einer Brücke eine Reflexion der Ladungswelle (Welle der  $e$ ) in der Weise eintritt, daß die Amplitude der reflektierten Welle von gleicher Größe ist, doch entgegengesetzt gerichtet wie die Amplitude der einfallenden Ladungswelle.

<sup>1)</sup> G. Kirchhoff, Pogg. Ann. 100, S. 193 u. 351; 102, S. 529, 1857. — Gesamm. Abhandl. S. 131, 154, 182.

Die andere mögliche Grenzbedingung ist die, daß die Enden der Drähte mit einem Kondensator von bekannter Kapazität  $C$  verbunden sind. Jedoch wollen wir gleich die allgemeinere Bedingung behandeln, daß an zwei gegenüberliegenden Zwischenstellen des Leitungsdrahtes größere, gleichbeschaffene Metallkörper  $A_1, A_2$  angeschlossen sind, deren jeder die Kapazität  $C$  besitzt. Wir wollen zunächst voraussetzen, daß  $A_1$  von  $A_2$  so weit entfernt sei, daß sie nicht influenzierend aufeinander wirken, was ja von den Leitungsdrähten ebenfalls angenommen ist. Dann ist die Stromstärke  $i'$ , welche in den Körper  $A_1$  fließt, gegeben durch

$$i' = C \frac{dV_1}{dt}, \quad (99)$$

falls  $V_1$  das auf  $A_1$  stattfindende Potential bezeichnet. Es seien alle Größen,  $i', C, V_1$ , elektromagnetisch gemessen. Den Körper  $A_1$  kann man nach der oben S. 497 gemachten Bemerkung ersetzt denken durch ein gewisses zu gleichem Potential geladenes Drahtstück. Die auf demselben pro Längeneinheit lagernde Elektrizitätsmenge  $e$  müßte nach (90') in elektrostatischem Maße betragen:

$$e = \frac{\epsilon}{2 \lg \frac{d}{R}} V_e = \frac{\epsilon}{2 \lg \frac{d}{R}} \frac{1}{c} V_1, \quad (100)$$

falls  $V_e$  das Potential in elektrostatischem Maße bedeutet. Durch Differentiation nach  $t$  erhält man mit Rücksicht auf (95):

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -c \frac{\partial i}{\partial s} = \frac{\epsilon}{2 \lg \frac{d}{R}} \frac{1}{c} \frac{dV_1}{dt}. \quad (101)$$

Nun ist die Verbindungsstelle des einen Drahtes mit  $A_1$  als eine Stromverzweigungsstelle aufzufassen. Bezeichnet man mit  $i_z$  den in der positiven Richtung von  $s$  zufließenden Strom, mit  $i_a$  den von der Verzweigungsstelle abfließenden Strom im Drahte, so ist

$$i_z = i_a + i',$$

oder, wenn man für  $i'$  den Wert (99) einsetzt und  $\frac{dV_1}{dt}$  durch (101) eliminiert:

$$i_z - i_a = -2 \lg \frac{d}{R} c^2 \frac{C}{\epsilon} \frac{\partial i}{\partial s}. \quad (102)$$

Wenn die beiden Körper  $A_1$  und  $A_2$  sich so nahe kommen, daß die Ladung des einen auf dem anderen eine gleich große entgegengesetzte influenziert, wie es bei einem Kondensator nahezu eintritt, so ist an Stelle von (99) zu setzen:

$$i' = C \frac{d(V_1 - V_2)}{dt}$$

oder, da  $V_2 = -V_1$  ist:

$$i' = 2C \frac{dV_1}{dt}.$$

Die Bedingung (102) verwandelt sich daher dann in:

$$i_z - i_a = -4 \lg \frac{d}{R} c^2 \frac{C}{\epsilon} \frac{\partial i}{\partial s}. \quad (102')$$

Wie man sieht, ist also an der Anschlußstelle an die Metallkörper ein Sprung in der Stromstärke vorhanden;  $\frac{\partial i}{\partial s}$  geht stetig durch die Anschlußstelle hindurch, da  $V_1$ , d. h. auch  $\frac{dV_1}{dt}$  stetig bleiben muß, folglich nach (101) auch  $\frac{\partial i}{\partial s}$ .

Ein Spezialfall des Betrachteten ist der, daß ein Kondensator am Ende der Drähte angeschlossen ist. Es ist dann in (102) bzw. (102')  $i_a = 0$  zu setzen. Ist die Kapazität des Endes  $C$  sehr klein, d. h. enden die Drähte frei, womöglich in Spitzen, so wird die Grenzbedingung

$$i = 0, \text{ am freien Ende.} \quad (103)$$

Diese Bedingung besagt, daß am freien Ende durch Reflexion eine Umkehr der Amplitude der einfallenden Stromwelle erfolgt.

Es können auch Reflexionen dadurch erfolgen, daß die Kapazität der Drähte sich ändert, d. h. daß sich  $R$ ,  $d$  oder  $\epsilon$  sprungweise ändert. Die an einer solchen Stelle zu erfüllenden Bedingungen werden sofort aus (90') abgeleitet, da  $V$  stetig bleiben muß. Es folgt, daher aus (90') und (95), daß dort sein muß:

$$\frac{\partial i}{\partial s} \frac{1}{\epsilon} \lg \frac{d}{R} \text{ stetig.} \quad (104)$$

Ebenso muß natürlich auch  $i$  stetig sein.

Falls die Permeabilität  $\mu$  der Umgebung der Drähte unstetig variiert, so sind Stetigkeit von  $i$  und  $V$ , d. h.  $\frac{\partial i}{\partial s}$ , die Grenzbedingungen.

## 14. Die vollständige Lösung des Problems.

Zur vollständigen Integration der Differentialgleichung (96) bzw. (96') bedarf es außer den Bedingungen (98), (102), (103), (104), welche für bestimmte Stellen, d. h. bestimmte Werte von  $s$ , zu jeder Zeit  $t$  gelten, noch einer Anfangsbedingung für  $t = 0$ , welche für alle  $s$  gilt, d. h. es muß der Anfangszustand des Leitersystems gegeben sein. Man muß daher annehmen, daß für  $t = 0$   $i$  eine bekannte Funktion von  $s$

ist. Oft sind die Anfangsbedingungen für das Potential  $V$ , resp. die Ladung  $e$  direkter gegeben, als die für die Stromstärke  $i$ . Dies ist z. B. der Fall, wenn der ursprünglich ungeladene Schließungsdraht mit einem Kondensator verbunden wird, der zu bekanntem Potential geladen ist. Wie schon oben angeführt wurde, kann man einen Kondensator ersetzt denken durch eine zu gleichem Potential geladene Drahtstrecke von gewisser, vorläufig noch unbekannter Länge  $l_0$ . Anstatt der bekannten Länge  $l$  der Drähte ist dann die unbekannte Größe  $l + l_0 = l_1$  für ihre Länge einzuführen.  $V$  ist dann für  $t = 0$  überall gleich Null, außer auf der (unbekannten) Länge  $l_0$  der Drähte, wo es konstant ist. Da für  $e$  resp.  $V$  dieselbe Differentialgleichung (96) wie für  $i$  gilt und auch die Grenzbedingungen, welche wir für  $i$  hingeschrieben haben, gemäß der Gleichung (95) leicht in solche für  $e$  verwandelt werden können, so gelten für die Ladungswellen ganz dieselben Ueberlegungen, die wir hier für die Stromwellen durchführen wollen.

Es möge nun also  $i = \varphi(s)$  für  $t = 0$  im Intervall  $s = 0$  bis  $s = l_1$  als gegeben angesehen werden.  $l_1$  ist nur dann gleich der Länge  $l$  der Drähte, wenn kein Kondensator angehängt ist. Nach dem Fourierschen Lehrsatz kann man nun stets schreiben:

$$i_{(t=0)} = A_0 + A_1 \sin \frac{\pi s}{l_1} + A_2 \sin \frac{2\pi s}{l_1} + \dots + A_n \sin \frac{n\pi s}{l_1} + \dots \\ + B_1 \cos \frac{\pi s}{l_1} + B_2 \cos \frac{2\pi s}{l_1} + \dots + B_n \cos \frac{n\pi s}{l_1} + \dots, \quad (105)$$

wo die  $A$ ,  $B$  aus  $\varphi(s)$  berechnet werden können. Es ist nämlich

$$A_n = \frac{2}{l_1} \int_0^{l_1} \varphi(s) \sin \frac{n\pi s}{l_1} ds, \\ B_n = \frac{2}{l_1} \int_0^{l_1} \varphi(s) \cos \frac{n\pi s}{l_1} ds.$$

Da  $i$  für beliebige  $t$  in der Form (97) erscheinen muß (es soll jetzt  $\mu = \epsilon = 1$  gesetzt werden), so folgt aus (105) für beliebige  $t$  (die Konstante  $A_0$  wird fortgelassen, da es sich hier um veränderliche Ströme handelt):

$$i = \Sigma A_n' \sin \frac{n\pi}{l_1} (s - ct) + \Sigma A_n'' \sin \frac{n\pi}{l_1} (s + ct) \\ + \Sigma B_n' \cos \frac{n\pi}{l_1} (s - ct) + \Sigma B_n'' \cos \frac{n\pi}{l_1} (s + ct), \quad (106)$$

welche Gleichung man auch in der Form schreiben kann:



$$\begin{aligned}
 i = & \Sigma A_n \sin \frac{n\pi s}{l_1} \cos \frac{n\pi ct}{l_1} \\
 & + \Sigma B_n \cos \frac{n\pi s}{l_1} \cos \frac{n\pi ct}{l_1} \\
 & + \Sigma C_n \cos \frac{n\pi s}{l_1} \sin \frac{n\pi ct}{l_1} \\
 & + \Sigma D_n \sin \frac{n\pi s}{l_1} \sin \frac{n\pi ct}{l_1}.
 \end{aligned} \tag{107}$$

Die  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$ ,  $D_n$  sind erst dann völlig bestimmt, wenn nicht nur  $i$ , sondern auch  $\frac{\partial i}{\partial s}$  oder  $\frac{\partial i}{\partial t}$  für  $t = 0$  gegeben ist.

Aus der Formel (106) oder (107) erkennt man, daß  $i$  in jedem Falle eine Uebereinanderlagerung von Schwingungen ist, deren Periode ist:

$$T_n = \frac{2l_1}{nc}. \tag{108}$$

Diese Schwingungsdauern, die überhaupt vorkommen können, fallen je nach den verschiedenen Nebenbedingungen (98), (102), (103), (104) verschieden aus.

Betrachten wir spezieller den uns hier interessierenden Fall, daß bei  $s = l$  ein Kondensator der Kapazität  $C$  angehängt ist, während die anderen Enden der Drähte ( $s = 0$ ) leitend verbunden sind.  $d$  und  $R$  sollen überall denselben Wert haben. Dann gilt für  $s = l$  die Gleichung (102'), (für  $\varepsilon = 1$ ,  $i_n = 0$ ), nämlich:

$$\left[ i = -4 \lg \frac{d}{R} c^2 C \frac{\partial i}{\partial s} \right]_{s=l}, \tag{109}$$

während nach (98) für  $s = 0$  gilt:

$$\left[ \frac{\partial i}{\partial s} \right]_{s=0} = 0.$$

Zufolge letzterer Gleichung müssen die Koeffizienten  $A_n$ ,  $D_n$  in (107) verschwinden. Die erstere Gleichung (109) liefert dagegen:

$$\cos \frac{n\pi l}{l_1} = 4 \lg \frac{d}{R} c^2 C \sin \frac{n\pi l}{l_1} \cdot \frac{n\pi}{l_1},$$

oder wenn man die Schwingungsdauer  $T_n$  nach (108) einführt:

$$1 = 8 \lg \frac{d}{R} c C \frac{\pi}{T_n} \operatorname{tg} \frac{2\pi l}{T_n c}. \tag{110}$$

Dies ist eine transzendente Gleichung für die Schwingungsdauer  $T_n$ . Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{2\pi l}{T_n c} = x, \tag{111}$$

so wird (110) zu

$$x \operatorname{tg} x = \frac{1}{4 c^2 C \lg \frac{d}{R}}. \quad (112)$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist nun bei Entladungen größerer Kondensatoren durch einen Schließungskreis, für welchen  $d : R$  eine große Zahl ist, eine kleine Zahl. So ist z. B. bei dem oben S. 486 berechneten

Versuche Feddersens  $C = 0,013$  Mikrofarad  $= 0,013 \cdot 10^{-15}$ ,  $\lg \frac{d}{R}$  annähernd gleich 14,5, für den längsten Schließungskreis war  $l$  (die halbe Länge)  $= 0,67 \cdot 10^5$  cm. Es wird die rechte Seite von (112) zu 0,101. Die Werte von  $x$  liegen daher nahe bei 0,  $\pi$ ,  $2\pi$  ... usw. Für den kleinsten Wert von  $x$ , welcher nach (111) der größten Schwingungsdauer  $T_0$  entspricht, d. h. der sogenannten Grundschiwingung, erhält man daher aus (112), wenn man  $x$  für  $\operatorname{tg} x$  schreibt:

$$x^2 = \frac{4\pi^2 l^2}{T_0^2 c^2} = \frac{1}{4 c^2 C \lg \frac{d}{R}},$$

d. h.

$$T_0 = 2\pi \sqrt{2l' \lg \frac{d}{R} C} = 2\pi \sqrt{L' C}, \quad (113)$$

wobei  $l' = 2l$  die Gesamtlänge des Schließungsdrahtes bedeutet. Dies ist dieselbe Formel, die oben S. 489 (86) abgeleitet ist unter der Annahme, daß die Stromstärke nicht längs  $s$  variere. Das dort erhaltene Resultat wird also durch die Oberschwingungen nicht merklich modifiziert.

Die erste Oberschwingung  $T_1$  erhält man angenähert, indem man  $x = \pi$  setzt. Es folgt dann aus (111)  $T_1 = \frac{l'}{c}$ . Einen genaueren Wert erhält man, indem man  $x = \pi + \alpha$  setzt, wo  $\alpha$  eine kleine Zahl ist. Für diese ergibt sich aus (112):

$$(\pi + \alpha) \alpha = \frac{1}{4 c^2 C \lg \frac{d}{R}},$$

oder, indem man  $\alpha^2$  gegen  $\pi \alpha$  vernachlässigt:

$$\pi \alpha = \frac{1}{4 c^2 C \lg \frac{d}{R}},$$

d. h.

$$x = \pi \left( 1 + \frac{1}{4\pi^2 c^2 C \lg \frac{d}{R}} \right).$$

Folglich wird der genauere Wert von  $T_1$ :

$$T_1 = \frac{l'}{c} \left( 1 - \frac{l'}{8\pi^2 c^2 C \lg \frac{d}{R}} \right).$$

Bei dem soeben angeführten Versuche Feddersens ergibt sich daher  $T_1$  zu

$$T_1 = \frac{1,34 \cdot 10^5}{3 \cdot 10^{10}} \left( 1 - \frac{1,34}{8 \cdot \pi^2 \cdot 9 \cdot 0,013 \cdot 14,5} \right) \\ = 4,46 \cdot 10^{-6} (1 - 0,01) = 4,42 \cdot 10^{-6} \text{ sek.}$$

Wie man sieht, ist der Näherungswert  $T_1 = \frac{l'}{c}$  bis auf 1% richtig.

Vergleicht man den Wert der ersten Oberschwingung  $T_1$  mit dem der Grundschiwingung  $T_0$ , welche nach (113) bei diesem Versuche zu

$$T_0 = 44,6 \cdot 10^{-6} \text{ sek}$$

folgt, so erkennt man, daß die Wirkung der Grundschiwingung von der der Oberschwingungen experimentell leicht zu trennen ist, da erstere 10mal langsamer erfolgt als die langsamste der Oberschwingungen. Die Entladung eines großen Kondensators bietet also eine gewisse Analogie zu dem Schwingungsvorgang in einer recht massiven Stimmgabel, welche ebenfalls erst so hohe Obertöne zeigt, daß sie den Grundton kaum stören.

Die höheren Oberschwingungen  $T_2$ ,  $T_3$  usw. des Schließungskreises sind sehr nahezu ganzzahlige Brüche von  $T_1$ , nämlich  $T_2 = \frac{1}{2} T_1$ ,  $T_3 = \frac{1}{3} T_1$  usw. Die Oberschwingungen sind also sehr nahezu harmonisch zueinander.

Da wir jetzt die Schwingungsdauern berechnet haben, so können wir auch die oben S. 503 eingeführte, dem Kondensator äquivalente Drahtlänge  $l_0$  berechnen. Wenn nämlich der Schließungsdraht bei  $s = l + l_0 = l_1$  frei endigt, ohne merkliche Kapazität an seinen Enden zu besitzen, so muß dort nach (103)  $i$  verschwinden. Da nach (98) die Koeffizienten  $A_n$ ,  $D_n$  in (107) verschwinden (vgl. S. 504), so folgt aus  $i = 0$  für  $s = l_1$ , daß  $n$  die Form besitzen muß

$$n = \frac{2h + 1}{2},$$

wo  $h$  eine ganze Zahl bedeutet. Die Schwingungsdauern ergeben sich daher nach (108) zu:

$$T_h = \frac{4l_1}{(2h + 1)c} = \frac{4(1 + l_0)}{(2h + 1)c}. \quad (114)$$

Für die Grundschiwingung muß also sein:

d. h.

$$\frac{l_0}{l} = \pi \sqrt{C \frac{c^2}{l} \lg \frac{d}{R}} - 1. \quad (115)$$

Bei dem berechneten Versuch ergibt sich so  $l_0 = 4l$  als die äquivalente Drahtlänge für die Grundschiwingung. — Für die  $h^{\text{te}}$  Oberschiwingung muß sein:

$$T_h = \frac{2l}{hc} = \frac{4(l + l_0)}{(2h + 1)c}, \quad \text{d. h. } \frac{l_0}{l} = \frac{1}{2h}. \quad (116)$$

Es wirkt also für die Oberschiwingungen ein angehängter großer Kondensator so, als ob die Drähte dort leitend überbrückt wären, was von vornherein als plausibel erscheinen muß, da ein großer Kondensator den Eintritt eines Stromes nahezu ungehindert gestattet. In der Tat würden wir nämlich, falls die Drähte nicht nur bei  $s = 0$ , sondern auch bei  $s = l$  überbrückt sind, aus (98) erhalten, daß in (107)  $A_n = D_n = 0$  sein muß, und ferner, daß  $n$  eine ganze Zahl  $h$  sein muß. Die Schwingungsdauern  $T_h$  würden sich daher aus (108) ergeben zu:

$$T_h = \frac{2l}{hc}. \quad (117)$$

Dies sind aber dieselben Schwingungsdauern, wie sie nach (112) nahezu für die wirklich stattfindenden Oberschiwingungen bei Anhängung eines großen Kondensators  $C$  erfolgen.

Wie schon oben erwähnt wurde, hat  $T_{hc}$  die Bedeutung der Wellenlänge  $\lambda_h$  der  $h^{\text{ten}}$  Oberschiwingung. Aus (117) folgt daher, daß der Abstand  $l$  zwischen zwei Brücken ein ganzzahliges Vielfaches einer halben Wellenlänge sein muß, da die Beziehung besteht:

$$l = h \cdot \frac{\lambda_h}{2}. \quad (117')$$

Es bilden sich daher stehende Wellen aus, deren Schwingungsmaximum (Bauch) für die Stromwellen an den Brücken liegt, während der Knoten der Grundschiwingung in der Mitte zwischen den Brücken liegt.

Umgekehrt liegen für die Ladungs- oder Spannungswellen ( $V$ ) an den Brücken die Knoten, in der Mitte zwischen denselben der Bauch für die langsamste Eigenschiwingung.

Ferner folgt aus (114), daß der Abstand  $l_1$  zwischen einer Brücke und einem freien Ende gleich dem ungeraden Vielfachen einer Viertelwellenlänge ist, da nach (114):

$$l_1 = (2h + 1) \frac{\lambda_h}{4}. \quad (114')$$

Die Analogie dieses Falles mit der der Luftschwingung in einer gedackten Pfeife liegt auf der Hand. Das geschlossene Ende derselben entspricht für die Exkursionen der Luftteile dem freien Ende der Drähte für die Stromwellen, das offene Ende der Pfeife entspricht der Brücke der Drähte. — Ebenso entspricht der in (117') behandelte Fall den Schwingungen in einer offenen Pfeife.

## 15. Das Problem der Drahtwellen unter Berücksichtigung des Widerstandes.

Wir hatten in (92), S. 497  $\sigma$  gleich  $\infty$  gesetzt. Wir wollen nun die allgemeinere Gleichung behandeln, die wir erhalten, wenn wir die Leitfähigkeit des Drahtes endlich nehmen, und zwar wollen wir zunächst die Gleichung (92) in ganz allgemeiner Form hinschreiben. Da  $\frac{\partial V_z}{\partial t}$  die durch die elektrischen Ströme hervorgebrachte elektromotorische Kraft der Induktion bedeutet, so können wir dafür auch schreiben  $L' \frac{di}{dt}$ , unter  $L'$  den Selbstinduktionskoeffizienten des betrachteten Drahtstückes, d. h. der Längeneinheit des Drahtes, verstanden. Bezeichnen wir ferner mit  $C'$  die Kapazität desselben Drahtstückes, so ist  $\mathcal{E} = -\frac{c}{C'} \frac{\partial e}{\partial s}$  nach (94). Also geht (92) in die Form über:

$$\frac{j}{\sigma} = -L' \frac{\partial i}{\partial t} - \frac{c}{C'} \frac{\partial e}{\partial s}.$$

Nimmt man zur Schätzung des Einflusses des galvanischen Widerstandes an, daß die Stromdichte  $j$  gleichförmig verteilt sei innerhalb eines Querschnittes  $q$ , der allerdings kleiner sein kann als der wirkliche Querschnitt des Drahtes, so ist  $\frac{1}{q\sigma}$  der galvanische Widerstand  $w'$  der Längeneinheit, und  $j = i : q$ . Die obige Gleichung wird daher zu:

$$i w' = -L' \frac{\partial i}{\partial t} - \frac{c}{C'} \frac{\partial e}{\partial s}.$$

Verbindet man mit dieser Gleichung die Formel (95), nämlich

$$\frac{\partial i}{\partial s} = -\frac{1}{c} \frac{\partial e}{\partial t},$$

so erhält man durch Elimination von  $e$ :

$$c^2 \frac{\partial^2 i}{\partial s^2} = C' L' \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + C' w' \frac{\partial i}{\partial t}. \quad (118)$$

Dies ist die allgemeine Gleichung für die Fortpflanzung einer Stromschwankung längs eines Drahtes. Sie gilt z. B. für die Fortleitung der Stromstöße beim Telegraphieren und wird deswegen die „Telegraphengleichung“ genannt. Sie ist zuerst von Kirchhoff<sup>1)</sup> aufgestellt worden. Für den speziellen Fall des in den vorhergehenden Paragraphen behandelten Doppeldrahtsystems ist unter den dort aufgestellten Bedingungen:

$$L' = 2 \log \frac{d}{R}, \quad C' = \frac{1}{2 \log \frac{d}{R}}$$

und (118) geht daher über in die Gleichung

$$c^2 \frac{\partial^2 i}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + \frac{w'}{2 \log \frac{d}{R}} \frac{\partial i}{\partial t}. \quad (118')$$

Wenn die Gleichung (96) eine längs der Drähte hingleitende Wellenbewegung charakterisiert, so gilt das gleiche von der Gleichung (118) bzw. (118a); nur sind die Wellen in diesem Falle solche, deren Amplitude beim Fortschreiten längs der Drähte abnimmt. Denn eine Wellenbewegung, die der Gleichung (118) genügt, läßt sich allgemein darstellen in der Form

$$i = i_0 e^{i(\nu t - ps)}, \quad (119)$$

wenn zwischen  $\nu$  und  $p$  die durch Einsetzen von (119) in (118) sich ergebende Gleichung besteht:

$$p^2 = \frac{C' L'}{c^2} \nu^2 - i \frac{C' w'}{c^2} \nu. \quad (120)$$

Die Größe  $p$  ist also selber wieder eine komplexe Größe. Wir wollen sie mit  $\alpha - i\beta$  bezeichnen.

Dann läßt sich (119) in der Form schreiben:

$$i = i_0 e^{-\beta s} \cdot e^{i(\nu t - \alpha s)}$$

oder in reeller Form:

$$i = i_0 e^{-\beta s} \sin(\nu t - \alpha s). \quad (121)$$

Das ist eine fortschreitende Welle, deren Amplitude während des Fortschreitens abnimmt, da die periodische Funktion mit dem Faktor  $e^{-\beta s}$  multipliziert ist. Man bezeichnet  $\beta$  als den Absorptionskoeffizienten. Führen wir statt der zyklischen Schwingungszahl  $\nu$  die Schwingungsdauer  $T$  ein durch die Beziehung  $\nu = \frac{2\pi}{T}$ , und setzen wir

$\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}$ , so läßt sich  $i$  in der Form schreiben:

<sup>1)</sup> G. Kirchhoff, Pogg. Ann. **100**, S. 193; **102**, S. 529, 1857; Gesamm. Abhandl. S. 131 u. S. 154.

$$i = i_0 e^{-\beta s} \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{s}{\lambda} \right). \quad (121)$$

Pflanzt sich eine Schwingung von der Periode  $T$  an den Drähten fort, so ist  $\lambda$  ihre Wellenlänge und ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $c'$  ist gleich  $\frac{v}{\alpha}$ .

Durch Einsetzen des Ausdruckes  $p = \alpha - i\beta$  in (120) ergibt sich:

$$\alpha^2 - \beta^2 = \frac{C' L'}{c^2} v^2 \quad \text{und} \quad 2\alpha\beta = \frac{C' w'}{c^2} v.$$

Daraus folgt:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{C' L' v^2}{2c^2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{w'^2}{v^2 L'^2}} \right) \\ \beta &= \frac{C' w' v}{2\alpha c^2} \end{aligned} \right\} \quad (122)$$

Wir wenden diese Formeln zunächst auf unser Paralleldrahtsystem an und erörtern die Frage, wie weit die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Drahtwellen durch den Widerstand beeinflusst wird. Für die Paralleldrähte ist

$$\alpha = \frac{v}{c \cdot \sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{w'^2}{4v^2 \left( \log \frac{d}{R} \right)^2}}} \quad (122')$$

und daher die Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$c' = \frac{v}{\alpha} = \frac{c \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{w'^2}{4v^2 \left( \log \frac{d}{R} \right)^2}}}} \quad (123)$$

$$\text{Ist} \quad \frac{w'}{2 \log \frac{d}{R}} \text{ so klein gegen } \frac{2\pi}{T} \quad (124)$$

daß das Verhältnis beider Größen gegen 1 vernachlässigt werden kann, so ist  $c' = c$ , d. h. gleich der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen im freien Raum. Je schneller die Schwingungen sind, d. h. je größer  $v$  oder je kleiner  $T$  ist, um so weniger kann daher der galvanische Widerstand von Einfluß auf die Periode sein, falls nicht allerdings  $w'$  dadurch sehr erheblich wird, daß die Stromstärke sich nach der Oberfläche sehr stark hindrängt und der Querschnitt  $q$  sehr klein wird. Man kann letzteren Einfluß nach der im VI. Kapitel auf S. 393 gegebenen Formel (97) schätzen. Nach dieser ist nämlich für sehr schnelle Schwingungen der

Periode  $T$  der Widerstand  $w$  eines Drahtes vom Radius  $R$  und der spezifischen Leitfähigkeit  $\sigma$  (nach elektromagnetischem Maß):

$$w = w_0 \pi R \sqrt{\frac{\mu \sigma}{T}}, \quad (125)$$

falls  $w_0$  den Widerstand des Drahtes für konstanten Strom bedeutet und  $\mu$  die magnetische Leitfähigkeit des Drahtes. Da nun ist

$$w_0 = \frac{1}{\pi R^2 \sigma},$$

so ist der Widerstand  $w'$  pro Längeneinheit:

$$w' = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{\mu}{\sigma T}}. \quad (125')$$

Der Widerstand bei schnellen Schwingungen hängt also auch von der magnetischen Leitfähigkeit ab, was daraus verständlich ist, daß bei großem  $\mu$  die Schwingungen mehr an die Oberfläche des Drahtes gedrängt werden als bei kleinem  $\mu$  (vgl. oben S. 391). Der galvanische Widerstand ist also ohne Einfluß auf die Periode der Schwingungen und ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit, falls

$$\frac{1}{R} \sqrt{\frac{\mu}{\sigma T}} \text{ zu vernachlässigen ist gegen } \frac{4\pi \lg \frac{d}{R}}{T}$$

oder falls

$$\sqrt{\frac{\mu}{\sigma}} \text{ klein gegen } \frac{4\pi R \lg \frac{d}{R}}{\sqrt{T}}.$$

Also auch nach dieser strengeren Schätzung ergibt sich, daß der galvanische Widerstand um so mehr vernachlässigt werden kann, je schneller die Schwingungen sind und je größer  $R$  und  $d$  ist. Für Kupferdrähte, für welche  $\mu = 1$ ,  $\sigma = 1,063 \cdot 10^{-5} \cdot 60$  [nach Formel (20) auf S. 362; es ist das Verhältnis  $\sigma'$  der Leitfähigkeit des Kupfers zum Quecksilber etwa gleich 60], ergibt sich für verhältnismäßig langsame Schwingungen, nämlich  $T = 10^{-5}$ , wie sie Entladungen großer Leidener Flaschen durch lange Drähte entsprechen, bei  $R = 1$  mm und  $d = 10$  cm:

$$\sqrt{\frac{\mu}{\sigma}} = 39,6; \quad \frac{4\pi R \lg \frac{d}{R}}{\sqrt{T}} = 1833.$$

Also schon bei Schwingungen der Schnelligkeit  $T = 10^{-5}$  und noch schnelleren ist bei 2 mm dicken Kupferdrähten ihr Widerstand ohne merkbaren Einfluß auf die Geschwindigkeit der in ihnen fortgepflanzten



setzen wir in (124) für  $T$  den Wert der Grundschiwingung  $T_0$  nach (113), so spricht (124) dieselbe Bedingung aus, wie sie oben S. 451 für die Unabhängigkeit der Schwingungsdauer vom galvanischen Widerstande angegeben ist, nämlich  $w^2$  klein gegen  $\frac{4L}{C}$ . Ist der Draht aber ohne Kondensator, so erhält man nach dem vorigen Abschnitt die langsamsten Schwingungen, wenn die beiden parallelen Drähte von der Länge  $l$  an einem ihrer Enden leitend verbunden sind, während ihre anderen Enden ohne Kapazität auslaufen. Nach (114'), S. 507 ist dann für die Grundschiwingung  $l$  gleich  $\frac{1}{4}$  Wellenlänge  $= \frac{1}{4} Tc$ , d. h.  $T = 4 \frac{l}{c} = 2 \frac{l'}{c}$ , falls  $l'$  die Gesamtlänge der Drähte bezeichnet. Die Bedingung (124) geht daher in diesem Falle über in:

$$w' \text{ klein gegen } 2\pi c \frac{\lg \frac{d}{R}}{l'},$$

oder, falls man den Widerstand der ganzen Leitung mit  $w = w'l'$  bezeichnet, so folgt, daß die Schwingungsperiode, d. h. auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen unabhängig vom galvanischen Widerstande der Leitung ist, wenn

$$w \text{ klein gegen } 2\pi c \lg \frac{d}{R} = 188 \lg \frac{d}{R} \text{ Ohm} \quad (126)$$

(vgl. oben S. 361) ist.

Setzt man für  $w$  seinen Wert nach (125') und für  $T$  den der Grundschiwingung  $T = 2l' : c$ , so geht die Bedingung (126) über in:

$$\sqrt{\frac{\mu}{\sigma}} \text{ klein gegen } 2\pi \sqrt{\frac{c}{l}} R \lg \frac{d}{R}. \quad (126')$$

Diese Bedingung ist bei allen in Laboratorien mit Metalldrähten ausgeführten Versuchen erfüllt.

Für Kupferdrähte von  $R = 0,1$  cm,  $d = 10$  cm, der Länge  $l = 100$  m, folgt

$$2\pi R \lg \frac{d}{R} \sqrt{\frac{c}{l}} = 5000.$$

Die Drähte müßten also erheblich dünner oder länger sein, wenn der Wert von  $\sqrt{\frac{\mu}{\sigma}}$ , der gleich 39,6 ist, ins Gewicht gegen  $2\pi R \lg \frac{d}{R} \sqrt{\frac{c}{l}}$  fallen sollte. — Wenn anstatt der Kupferdrähte Eisen genommen wird, für welches  $\sigma = 1,063 \cdot 10^{-5}$ ,  $10,1 = 10,8 \cdot 10^{-5}$  und  $\mu$  bei sehr schnellen Schwingungen etwa gleich 111 ist<sup>1)</sup>, so folgt  $\sqrt{\frac{\mu}{\sigma}} = 1020$ . Dies

<sup>1)</sup> Diese Zahl ist einer Bestimmung von J. Klemencic entnommen, Wied. Ann. 50, S. 475, 1893.

würde schon einen gewissen Einfluß des Widerstandes auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit bedingen für  $l = 100$  m, d. h. für  $Tc = \lambda = 2l' = 4l = 400$  m, also für Wellen von 400 m Länge. Dagegen würde für Wellen von 4 m Länge der Einfluß des Widerstandes sehr unerheblich sein, da 1020 klein neben 50 000 ist.

Wir untersuchen ferner die Dämpfung der Wellen, d. h. die Abnahme ihrer Amplitude während ihres Fortschreitens. Für die Berechnung des Absorptionskoeffizienten können wir uns in der Gleichung (122)

für  $\beta$  des angenäherten Wertes  $\frac{\nu}{c}$  für  $\alpha$  bedienen. Dann ist

$$\beta = \frac{w' C'}{2c} = \frac{w'}{4c \cdot \log \frac{d}{R}}. \quad (127)$$

Die Amplitude sinkt auf den  $e^{\text{ten}}$  Teil ihres Anfangswertes, wenn  $\beta s = 1$  ist, d. h. nach Durchlaufen eines Weges

$$s = \frac{4c \log \frac{d}{R}}{w'} = \frac{4cR \sqrt{T \log \frac{d}{R}}}{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}}, \quad (128)$$

wenn wir wieder den sogenannten Hauteffekt nach Formel (125') berücksichtigen.

Für das obige Beispiel der beiden Kupferdrähte von 2 mm Durchmesser und 10 cm Abstand ergibt sich  $s = 4,4 \cdot 10^6$  cm oder  $= 44$  km für  $T = 10^{-5}$ . Die Dämpfung der Wellen ist also außerordentlich klein. Sie wird wesentlich größer, wenn man sehr dünne Eisendrähte nimmt. Wenn die Leitung aus zwei Eisendrähnen von 0,1 mm Dicke in 5 cm Abstand besteht, so wird unter Benutzung der obigen Zahl für Eisen und für die Schwingungsdauer  $T = 10^{-5}$  die Strecke  $s = 1,28 \cdot 10^4 = 128$  m. Für die wesentlich schnelleren Hertzschen Schwingungen wird die Dämpfung noch beträchtlich größer und man kann für solche Schwingungen ein Leitungssystem von mäßiger Länge benutzen, um die Wellen daran sich totlaufen zu lassen. In dieser Weise hat v. Geitler <sup>1)</sup> ein System von zwei parallelen 0,1 mm starken Eisendrähnen in 5 cm Abstand benutzt. Die Schwingungsdauer betrug in diesem Falle  $T = 6 \cdot 10^{-8}$ . Unter diesen Bedingungen ergibt sich  $s = 10$  m, d. h. nach Durchlaufen von 10 m ist die Amplitude der Welle auf den  $e^{\text{ten}}$  Teil heruntergegangen. Das Drahtsystem war 60 m lang; die Wellen würden, am Ende angelangt, nur noch den 400. Teil des Anfangswertes ihrer Amplitude besitzen.

Ein anderer Fall, auf den sich unsere Gleichungen anwenden lassen,

<sup>1)</sup> J. v. Geitler, Wied. Ann. 49, S. 184, 1893.

ist die Fortleitung derjenigen Stromschwankungen, die durch die Schwingungen einer Telephon- oder Mikrophonmembran erregt werden, längs der Telephonleitung. Hier ist die Periode sehr viel größer als in den bisher betrachteten Fällen; man kann  $T$  im Mittel gleich  $\frac{1}{500}$  sek setzen.

Für Schwingungen von solcher Schwingungszahl kommt der Hauteffekt noch nicht in Betracht; daher kann  $w'$  einfach durch den Widerstand der Längeneinheit des Drahtes für Gleichstrom:

$$w_0' = \frac{1}{\pi R^2 \sigma}$$

ersetzt werden. Unter diesen Umständen ist der Ausdruck  $\frac{w'}{2\nu \lg \frac{d}{R}}$

[vgl. (124) auf S. 510] nicht mehr klein gegen 1, sondern, je nach der Annahme, die man über Dicke und Abstand der Telephondrähte macht, etwa von der Größenordnung von 1 oder etwas größer. Daher ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser Stromschwankungen etwas kleiner als  $c$ , um so mehr, je kleiner  $\nu$ , d. h. je tiefer der betreffende Ton ist. Während aber dieser Umstand kaum ins Gewicht fällt, ist die Absorption, die diese Wellen bei ihrer Fortleitung erfahren, sehr erschwerend für das Telephonieren auf größere Entfernungen. Der Absorptionskoeffizient läßt sich in diesem Falle durch Vereinigung von (122) und (123) berechnen aus der Gleichung:

$$\beta = \frac{C' w_0' c'}{2c^2}.$$

Für unser früher angenommenes System von Kupferdrähten von 1 mm Radius und 10 cm Abstand würde sich in diesem Falle, für  $T = \frac{1}{500}$  sek, ergeben, daß die Amplitude der Schwingung nach Durchlaufen von ca. 135 km auf den  $e^{\text{ten}}$  Teil heruntergegangen wäre. Noch schwieriger liegt der Fall bei der Anwendung von Kabeln zum Telephonieren, weil bei diesen die Kapazität der Drähte durch ihren kleineren Abstand und durch das Einbetten in ein Isoliermaterial von höherer Dielektrizitätskonstante beträchtlich erhöht ist. Es gibt aber einen anderen Faktor, durch dessen Vergrößerung die Absorption heruntergesetzt werden kann. Aus den allgemeinen Gleichungen (122) läßt sich nämlich durch Einsetzen des Ausdrucks von  $\alpha$  in die Gleichung für  $\beta$  und unter abermaliger Vernachlässigung von  $\frac{w'}{\nu L^2}$  gegen 1 der Ausdruck für  $\beta$  in der Form schreiben:

$$\beta = \frac{w'}{2c} \sqrt{\frac{C'}{L'}}.$$

Je größer man  $L'$  macht, um so kleiner wird  $\beta$ . Bei Paralleldrähten ließe sich eine Erhöhung von  $L'$  nur erreichen durch Einbetten in ein Medium von höherer Permeabilität. Dieser Weg ist natürlich ausgeschlossen. Aber Pupin hat gezeigt, daß man dasselbe erreicht, wenn man in die Telephonleitung in passenden Abständen Spulen einschaltet. Es genügt, auf die Wellenlänge der in Betracht kommenden Schwingungen 4—10 Spulen zu verteilen, um die Absorption auf den vierten Teil herabzusetzen.

Für tiefe Töne und für die langsamen Stromschwankungen der gewöhnlichen Wechselstrommaschinen ist schließlich  $\frac{w'}{vL'}$  groß gegen 1. Indem man dann umgekehrt wie bisher 1 gegen diesen Ausdruck vernachlässigt, erhält man folgende Näherungswerte für diesen Fall:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{c} \sqrt{\frac{w' C' v}{2}} \\ c' &= \frac{v}{\alpha} = c \sqrt{\frac{2v}{w' C'}} = c \sqrt{\frac{4\pi}{w' C' T}} \\ \beta &= \frac{1}{c} \sqrt{\frac{w' C' v}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (129)$$

Hier hängt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in erheblichem Maße von Widerstand und Kapazität ab. Für die Kupferdrähte von 1 mm Radius und 10 cm Abstand würde z. B. für  $T = \frac{1}{50}$  sek  $c' = 0,34c$  sein.

Da die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in diesem Falle von der Schwingungsdauer abhängt, so ist die Wellenlänge, die einer bestimmten Schwingungsdauer auf einem solchen Drahtsystem entsprechen würde, nicht mehr der Schwingungsdauer, sondern ihrer Wurzel proportional.

Denn wenn man  $c' = \frac{\lambda}{T}$  setzt, so ist

$$T = \frac{w' C' \lambda^2}{4\pi c^2}.$$

Für ein Drahtsystem, das an einem Ende offen, am anderen Ende überbrückt ist, würde die Länge des Systems gleich  $\frac{\lambda}{4}$  der Grundschwingung sein. Bedeutet  $l'$  die Gesamtlänge der beiden Drähte zusammen, so würde also  $l' = \frac{\lambda}{2}$  sein. Daher würde die Dauer der Grundschwingung

$$T_0 = \frac{w' C'}{\pi c^2} l'^2 \quad (130)$$

oder  $T_0/l'^2$  würde eine Konstante sein. Die gleiche Beziehung hat sich experimentell für die Zeit ergeben, die ein Stromstoß oder eine elektrische

Ladung braucht, um an einer langen Leitung, z. B. einer Telegraphenleitung, entlang zu laufen. So hat E. Hagenbach <sup>1)</sup> bei Benutzung verschieden langer Schleifen von Telegraphenleitungen dieses Gesetz bestätigt gefunden; die Zeit, die ein Stromstoß braucht, um über die Leitung am Ausgangsorte wieder einzutreffen — die sogenannte Ladungszeit —, war dem Quadrat der Länge der Leitung proportional. Von einer bestimmten Geschwindigkeit der Fortpflanzung der Elektrizität in der Leitung kann man also unter diesen Umständen nicht sprechen. Ist  $t$  die Ladungszeit, so fand Hagenbach für eine Leitung von 284,8 km  $t/l'^2 = 217 \cdot 10^{-20}$  sek/cm<sup>2</sup>. Die Angaben von Hagenbach über  $w'$  und  $C'$  der von ihm benutzten Leitung ergeben für den Ausdruck  $w' C' / \pi c^2$   $300 \cdot 10^{-20}$  sek/cm<sup>2</sup>. Von der gleichen Größenordnung sind die Ergebnisse, die von anderen Beobachtern für den Ausdruck  $t/l'^2$  an oberirdischen Leitungen gefunden worden sind, soweit die Untersuchungen an Leitungen von 280 und mehr Kilometer ausgeführt worden sind <sup>2)</sup>.

Die Theorie dieses Vorgangs läßt sich unmittelbar aus der allgemeinen Grundgleichung (118) entwickeln, indem man schon in dieser Gleichung das Glied, welches die Selbstinduktion enthält, vernachlässigt. Man erhält dann die Gleichung

$$\frac{di}{dt} = \frac{c^2}{C' w'} \cdot \frac{d^2 i}{ds^2}. \quad (131)$$

Sie stimmt in ihrer Form mit derjenigen Differentialgleichung überein, welche für die Erscheinungen der Diffusion und der Wärmeleitung maßgebend ist. Gleichung (131) ist zuerst von Ohm <sup>3)</sup> aufgestellt, ihre Anwendung auf die Telegraphie zuerst von Sir William Thomson <sup>4)</sup> ausführlich behandelt worden.

<sup>1)</sup> E. Hagenbach, Wied. Ann. 29, S. 377, 1886.

<sup>2)</sup> Die ausführliche Literatur siehe bei Hagenbach.

<sup>3)</sup> G. S. Ohm, Die galvanische Kette, mathematisch bearbeitet. Berlin 1827. Gesammelte Abhandl. S. 121.

<sup>4)</sup> Sir William Thomson, Scient. Papers, Vol. II, S. 61, 92, 1855.

## Kapitel IX.

# Elektrische Wellen.

---

### 1. Elektrische Schwingungen in kurzen, ungeschlossenen Leitern.

In dem vorhergehenden Kapitel sind elektrische Schwingungen in geschlossenen oder nahezu geschlossenen Leitern behandelt worden. Es kommt nun darauf an, durch geeignete experimentelle Anordnungen diese Wellen loszulösen von den ihnen durch die Leitungsdrähte gewiesenen Bahnen und Wellen daraus zu schaffen, welche sich frei durch den Luftraum, ohne Gegenwart irgendwelcher Leiter, bewegen. Gelingt dies, so läßt sich auf diesem Wege das zu Beginn des vorigen Kapitels angedeutete Ziel erreichen, die den Wellen im freien Luftraume zukommende Wellenlänge zu messen.

Man muß allerdings zur Erreichung dieses Zweckes die Periode der Schwingungen noch bedeutend verkleinern; den bisher betrachteten Kondensatorentladungen der Periode  $T = 2 \cdot 10^{-6}$  sek würde nämlich eine Wellenlänge der Größe  $\lambda = 6 \cdot 10^4$  cm entsprechen. Diese Wellenlänge, d. h. auch die Periode  $T$  muß jedenfalls noch verkleinert werden, wenn sie in einem Zimmer gemessen werden soll.

Die genannten experimentellen Bedingungen sind nun durch eine Versuchsanordnung von Hertz<sup>1)</sup> im Jahre 1887 verwirklicht. Er ging von dem Gedanken aus, daß die Schwingungsdauer der Entladung zweier zu verschiedenem Potential geladener Körper  $A_1$ ,  $A_2$  sehr klein ausfallen müßte, wenn dieselben durch einen kurzen, geraden Schließungsdraht verbunden würden, weil bei dieser Anordnung die Selbstinduktion und die Kapazität des Systems sehr gering ist.

Hertz verwandte als Konduktoren  $A_1$  und  $A_2$  zwei Zinkkugeln von 30 cm Durchmesser. In dieselben waren zwei geradlinige Kupferdrähte von 0,5 cm Durchmesser verschiebbar eingesetzt. An ihren anderen Enden trugen die Drähte zwei kleine, gut polierte Messingkugeln  $K_1$ ,  $K_2$  von etwa 3 cm Durchmesser. Wir wollen dieselben der Kürze halber

---

<sup>1)</sup> H. Hertz, Wied. Ann. 31, S. 421, 1887.

die „Entladungskugeln“ nennen. Auf isolierenden Stützen wurden nun die Leitersysteme derart aufgestellt (vgl. Fig. 53), daß die Drähte eine geradlinige Fortsetzung bildeten, und daß die Entladungskugeln einen gegenseitigen Abstand von etwa 0,75 cm, die Zentren der Kugeln  $A_1$ ,  $A_2$  einen Abstand von 1,50 m oder 1 m (in verschiedenen Versuchen verschieden) besaßen. Dicht bei den Entladungskugeln waren die Enden der Sekundärspule eines großen Ruhmkorffschen Induktionsapparates angefügt. Bei einer einmaligen Unterbrechung des Stromes in der Primärspule des Ruhmkorffschen Apparates ladet die Sekundärspule die Kugeln  $A_1$ ,  $A_2$  zu entgegengesetztem Potential, wodurch ein Funken an den Entladungskugeln überschlägt. Diese Entladung der Kugeln  $A_1$ ,  $A_2$  muß oscillatorischer Natur sein, da der galvanische Widerstand der Schließung sehr gering ist. Sein Wert ist deshalb nicht genau angebbar, weil der Widerstand der Funkenstrecke nicht zu bestimmen ist. Jedenfalls ist aber aus weiter unten zu beschreibenden

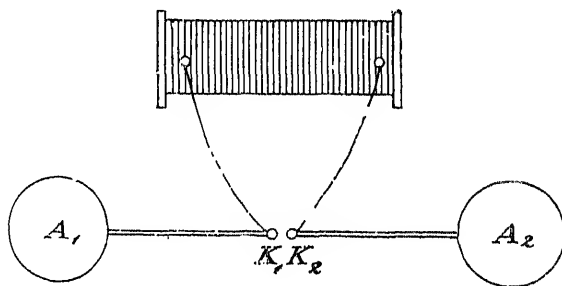


Fig. 53.

Erscheinungen mit Sicherheit auf die oscillatorische Natur der Entladung zu schließen, falls gewisse Nebenbedingungen noch erfüllt sind, die ebenfalls weiter unten besprochen werden sollen.

Zunächst ist die Frage zu erledigen, ob die Eigenschwingung des Systems, nämlich der Konduktoren  $A_1$  und  $A_2$  und der angesetzten geraden Drähte, nicht beeinflußt werde durch die Verknüpfung mit der Sekundärspule des Ruhmkorffschen Apparates, welche ja eine leitende Verbindung zwischen  $A_1$  und  $A_2$  herstellt.

Aus unseren früheren Betrachtungen (siehe Kapitel VIII, Abschnitt 7) geht hervor, daß, auch wenn gar kein Funken zwischen den Entladungskugeln überschlägt, doch der durch eine einmalige Unterbrechung des Primärstromes hergestellte Potentialunterschied der Konduktoren  $A_1$ ,  $A_2$  sich in oscillatorischer Weise durch die Sekundärspule entladen muß. Diese Schwingungen sind wegen der großen Selbstinduktion der Sekundärspule verhältnismäßig langsam und jedenfalls sehr viel langsamer als die Eigenschwingung der durch die geraden Drähte und den Entladungs-

funkten leitend verbundenen Konduktoren  $A_1$ ,  $A_2$ . Da diese Eigenschwingungen sehr schnell verlaufen müssen, bildet für sie die leitende Verbindung durch die Sekundärspule mit ihrer großen elektrischen Trägheit überhaupt keine Leitung; die in der Eigenschwingung oszillierende Stromstärke wird also trotz der Verbindung mit der Sekundärspule nur in den geraden Drähten und dem Entladungsfunken fließen.

Es bliebe nun aber noch zu untersuchen, ob nicht die Induktion der trägen Schwingungen der Sekundärspule merklich die Periode der schnellen Schwingungen der geraden Drähte beeinflussen könnte. Die beiden Systeme — die Induktionsspule mit den Konduktoren  $A_1$  und  $A_2$  an ihren Enden einerseits und die Konduktoren  $A_1$  und  $A_2$  mit ihrer geraden Entladungsbahn andererseits — stellen zwei elektrostatisch gekoppelte Systeme von sehr verschiedener Schwingungsdauer dar. Es gelten daher für sie die Resultate, die in Kapitel VIII, Abschnitt 8 (S. 482) abgeleitet worden sind. Danach bleibt in diesem Falle die schnelle Schwingung ganz unbeeinflusst. Die langsame Schwingung würde durch die Kopplung noch mehr verlangsamt werden. Aber es ist zu beachten, daß auch die schnelle Schwingung eine gedämpfte Schwingung ist. Da sie 1000—10 000mal schneller erfolgt als die langsame Schwingung, so ist sie erloschen, ehe die letztere überhaupt in Gang gekommen ist. Die langsame Schwingung kann daher überhaupt nur insoweit zur Ausbildung kommen, als nach dem Erlöschen des Funkens, durch den die schnelle Schwingung hindurchgeht, auf den Konduktoren noch Restladungen zurückgeblieben sind, die sich nun durch die Induktionsspule rückwärts in langsamer Schwingung ausgleichen.

Wenn man also durch einen automatischen Unterbrecher (Neef'schen Hammer, Foucault'schen Quecksilberinterruptor) den Strom in der Primärspule des Ruhmkorff periodisch schließt und öffnet, so haben wir drei wesentlich voneinander verschiedene Perioden der elektrischen Vorgänge zu unterscheiden: die schnellste Periode ist die in dem Entladungsfunken sich abspielende. Ueber sie lagert sich die vielleicht mehr wie 1000mal langsamere Schwingung in der Sekundärspule, soweit sie noch zur Ausbildung kommt. Auch diese langsamen Schwingungen sterben ab. Wenn sie schon vollständig abgeklungen sind, wird ein neuer Anstoß des Neef'schen Hammers die beiden soeben betrachteten Schwingungen wieder ins Leben rufen. Diese Periode der Wiederholungen der Vorgänge, welche man aus dem Tone des Neef'schen Hammers berechnen kann, ist also die weitaus langsamste der Vorgänge, und sie bezweckt weiter nichts, als daß die Erscheinungen, welche bei einer einmaligen Unterbrechung des Primärstromes sich vielleicht wegen der Kürze ihrer Dauer der Beobachtung entziehen könnten, durch häufige Wiederholung bequemer sichtbar werden.



Wegen der sehr verschiedenen Größenordnung dieser drei Perioden ist es leicht, die Wirkungen der schnellsten von ihnen ungestört durch das Vorhandensein der langsameren für sich zu untersuchen. — Wir wollen uns jetzt zu einer Berechnung dieser schnellsten Periode wenden, nämlich der Eigenschwingung der durch eine gerade Leiterstrecke der Länge  $l$  verbundenen Konduktoren  $A_1$  und  $A_2$ .

## 2. Berechnung der Periode des Hertzschen Erregers.

Es gilt die Gleichung (4) des vorigen Kapitels (S. 449) auch hier noch, welche lautet, falls man den galvanischen Widerstand  $w$  vernachlässigt:

$$0 = -L \frac{di}{dt} + V_1 - V_2. \quad (1)$$

$L$  bedeutet den Koeffizienten der Selbstinduktion des Systems oder, wenn man die ungleiche Verteilung der Stromdichte im Querschnitt berücksichtigt, den Induktionskoeffizienten des Stromsystems auf die in seiner Oberfläche verlaufenden Ströme (vgl. oben S. 487 ff).  $V_1$  und  $V_2$  bedeuten die Potentialwerte der Enden des Systems, in elektromagnetischem Maße gemessen.

Schwierigkeiten macht nun vor allem die Berechnung des Induktionskoeffizienten  $L$ . Wir haben denselben oben berechnen können für gewisse einfachste Formen eines geschlossenen Leiterkreises unter Vernachlässigung der Induktionswirkungen der Verschiebungsströme, welche in dem den Leiter umgebenden Isolator verlaufen. Von diesen Verschiebungsströmen können wir aber im vorliegenden Falle, wo der Leiter aus einem geraden Drahte besteht, nicht absehen, denn ohne sie würde der elektrische Strom gar nicht als ein geschlossener, in sich zurücklaufender erscheinen. Eine strenge Berechnung der Eigenschwingung unseres Systems hat nun deshalb in der Tat mit großen Schwierigkeiten zu kämpfen. Der Weg, auf welchem man zu einer solch strengen Berechnung gelangt, ist der schon oben S. 493 skizzierte. Aber nur in wenigen speziellen Fällen sind bisher die mathematischen Schwierigkeiten, welche der Weg bietet, überwunden und ist eine strenge Berechnung von  $T$  ermöglicht.

Zur Schätzung der Schwingungsdauer kann man dagegen einen angenäherten Weg gehen, indem wir einen ähnlichen Gedankengang einschlagen wie im Abschnitt 10 des vorigen Kapitels. Wir gehen zu diesem Zweck nicht von der Gleichung (4), sondern von der Gleichung (78) des vorigen Kapitels aus, die, wenn wir auch in ihr wieder den Widerstand vernachlässigen, lautet:

$$0 = - \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial t} + \mathfrak{E}, \quad (2)$$

und berechnen zunächst den Wert des Vektorpotentials  $\mathfrak{B}_z$  für einen Punkt der Oberfläche des Drahtes. Dabei benutzen wir die Vorstellung, daß die Rückleitung durch die Verschiebungsströme besorgt wird. Diese fließen längs Rotationsflächen, die den Draht als Achse umschließen. Für den mittleren Teil des Drahtes können wir diese Rotationsflächen als konzentrische Zylindermäntel betrachten und können unter dieser Voraussetzung für die Berechnung des Vektorpotentials die Formeln benutzen, die wir oben in Kapitel III aufgestellt haben für den Fall eines Drahtes von kreisförmigem Querschnitt, der von einem konzentrischen Hohlzylinder als Rückleitung umgeben ist. Der Hohlzylinder habe die Radien  $R_1$  und  $R_1'$ , der innere Vollzylinder den Radius  $R$ . Dann hat, wenn wir die Magnetisierungskonstanten für sämtliche Medien  $= 1$  setzen, auf der Oberfläche des inneren Drahtes, d. h. für  $r = R$ ,  $\mathfrak{B}_z$  nach Formel (56), S. 251 folgenden Wert:

$$\mathfrak{B}_z = \pi j_1^2 (R_1^2 - R_1'^2) + 2\pi j_1 R_1^2 \lg \frac{R_1'}{R_1} + 2\pi j_2 R_2^2 \lg \frac{R_1'}{R}. \quad (3)$$

Da die ganze durch den Zylinder fließende Stromstärke der ganzen im Draht fließenden Stromstärke gleich und entgegen gerichtet sein soll, so ist:

$$-\pi j_1 (R_1^2 - R_1'^2) = \pi j_2 R^2 = i, \quad (4)$$

also

$$\mathfrak{B}_z = -i - 2i \frac{R_1^2}{R_1^2 - R_1'^2} \lg \frac{R_1'}{R_1} + 2i \lg \frac{R_1'}{R}.$$

Wir wollen nun annehmen, daß der Zylindermantel sehr dünn sei; es sei

$$R_1 - R_1' = dr \quad \text{und} \quad R_1' = r.$$

Dann geht, unter Vernachlässigung der Glieder, die  $dr$  oder seine höheren Potenzen als Faktor enthalten,  $\mathfrak{B}_z$  über in die einfache Form:

$$\mathfrak{B}_z = 2i \lg \frac{r}{R}. \quad (5)$$

Auf unseren Fall angewandt, ist  $i$  derjenige Anteil des ganzen Stromes, der als Verschiebungsstrom in einem unendlich dünnen Zylindermantel vom Radius  $r$  fließt. Es ist also nur ein Differential des ganzen Stromes in dem Drahte; wir müssen daher  $di$  statt  $i$  schreiben und müssen, um das ganze Vektorpotential zu erhalten, den Ausdruck (5) integrieren über alle Zylindermäntel, in denen die Verschiebungsströme fließen, d. h. von  $r = R$  an bis  $r = \infty$ . Dazu müssen wir wissen, wie die Verschiebungsströme vom Radius abhängen. Für die Punkte der Ebene, die im Mittelpunkte des Leiters auf dem Drahte senkrecht steht, läßt sich die von den Ladungen

auf den Kugeln herrührende elektrische Kraft und der durch ihre Veränderung bedingte Verschiebungsstrom leicht angeben. Wenn  $e_m$  die momentane Ladung der Kugel (in elektromagnetischem Maße) bedeutet, so ist die elektrische Kraft in P (vgl. Fig. 54):

$$\mathcal{E} = + \frac{2 e_m}{\rho^2} \cos \varphi = + \frac{e_m l}{\rho^3} = + \frac{e_m l}{\left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{3/2}}. \quad (6)$$

Nach Formel (14) des VII. Kapitels (S. 412) ist die Dichtigkeit des Verschiebungsstromes, wenn wir auch die Dielektrizitätskonstante des Isolators  $= 1$  setzen, also Luft als Isolator annehmen:

$$j = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}. \quad (7)$$

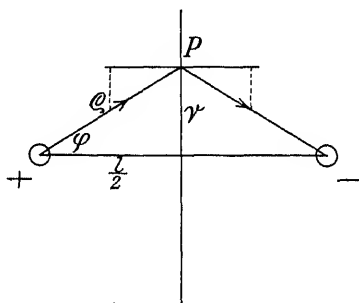


Fig. 54.

Also ist in unserem Falle die Dichte des Verschiebungsstromes:

$$j = + \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{3/2}} \frac{de_m}{dt} \quad (8)$$

und der ganze in dem Zylindermantel vom Radius  $r$  und der Dicke  $dr$  fließende Verschiebungsstrom ist

$$2\pi r j dr = + \frac{1}{2} \frac{de_m}{dt} \cdot \frac{r dr}{\left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{3/2}}.$$

Also ist der entsprechende Anteil des Stromes im Drahte:

$$di = - \frac{1}{2} \frac{de_m}{dt} \cdot \frac{r dr}{\left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{3/2}} \quad (9)$$

und das vollständige Vektorpotential hat den Wert

$$\mathfrak{B}_z = \int_R^\infty di \lg \frac{r^2}{R^2} = - \frac{1}{4} \frac{de_m}{dt} \int_R^\infty \lg \frac{r^2}{R^2} \frac{d(r^2)}{\left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{3/2}}. \quad (10)$$

Bei diesem Ansatz ist allerdings angenommen, daß der Verschiebungsstrom im ganzen Dielektrikum gleichzeitig vor sich geht; es ist also die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit der Störung bei unserer Rechnung vernachlässigt. Insofern entspricht auch diese Rechnung wieder einem Verhalten, das man als ein quasistationäres bezeichnen könnte.

Die Ausrechnung des Integrals ergibt:

$$\mathfrak{B}_z = - \frac{d e_m}{dt} \lg \frac{\sqrt{1 + \frac{4 R^2}{l^2}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{4 R^2}{l^2}} - 1}. \quad (11)$$

Da nun  $R$ , der Radius des Drahtes, als sehr klein gegenüber seiner Länge  $l$  angenommen werden kann, so geht  $\mathfrak{B}_z$  schließlich über in

$$\mathfrak{B}_z = - 2 \lg \frac{l}{R} \cdot \frac{d e_m}{dt}. \quad (12)$$

Dieser Wert ist in Gleichung (2) einzusetzen. Für  $\mathfrak{E}$  ist entsprechend der Gleichung (79) des vorigen Kapitels zu setzen:

$$\mathfrak{E} = \frac{V_1 - V_2}{l}. \quad (13)$$

Dagegen gilt die frühere Gleichung (2), S. 448, nämlich

$$e_m = C (V_1 - V_2)$$

nicht mehr, falls  $e_m$  die an dem einen Ende des Systems befindliche elektrische Ladung, d. h. besser die dort austretende Zahl der elektrischen Kraftlinien bedeutet. Denn in dem Falle des Hertzschen Erregers sind die beiden Konduktoren  $A_1$  und  $A_2$  so weit voneinander entfernt, daß sie kaum noch influenzierend aufeinander einwirken können. Wir wollen diese Influenz ganz vernachlässigen. Dann ist:

$$e_m = C V_1, \quad (14)$$

falls  $C$  die Kapazität (in elektromagnetischem Maße) des für sich allein betrachteten Konduktors  $A_1$  bedeutet. Bei symmetrischer Beschaffenheit des Systems ist  $V_2 = - V_1$ , daher

$$\mathfrak{E} = \frac{2 V_1}{l} = \frac{2 e_m}{C l}. \quad (15)$$

Die Ausdrücke (12) und (15) in (2) eingesetzt ergeben:

$$\frac{d^2 e_m}{dt^2} + \frac{e_m}{C l \cdot \lg \frac{l}{R}} = 0,$$

oder, wenn man die Gleichung (3), S. 449 berücksichtigt, nämlich:

$$i = - \frac{de_m}{dt},$$

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{i}{Cl \cdot \lg \frac{1}{R}} = 0. \quad (16)$$

Diese Gleichung entspricht der Gleichung (7) des vorigen Kapitels für den Thomsonschen Schwingungskreis, nur daß an die Stelle der Kapazität C des Kondensators die halbe Kapazität der einen Endkugel getreten ist. Berücksichtigt man dies, so sieht man, daß als Selbstinduktion des geraden Drahtes

$$L = 2l \lg \frac{1}{R} \quad (17)$$

anzusetzen ist. Hertz hat die Schwingungsdauer ebenfalls auf Grund der Thomsonschen Gleichung, d. h. der Gleichung (21) des vorigen Kapitels berechnet; aber er hat für die Selbstinduktion eine Formel benutzt, die aus dem Neumannschen Potentialgesetz für zwei parallele Ströme hergeleitet werden kann; sie lautet:

$$L = 2l \left( \lg \frac{2l}{R} - 0,75 \right)$$

$$= 2l \left( \lg \frac{1}{R} - 0,06 \right) \quad (17')$$

Bei dieser Formel ist allerdings vorausgesetzt, daß der Strom den Leiterquerschnitt gleichmäßig ausfüllt. Nimmt man an, daß er nur auf einer dünnen Schicht der Oberfläche fließt, wie es bei sehr schnellen Schwingungen der Fall ist, so lautet die entsprechende Formel angenähert<sup>1)</sup>:

$$L = 2l \left( \lg \frac{1}{R} + \lg 2 - 1 \right)$$

$$= 2l \left( \lg \frac{1}{R} - 0,31 \right) \quad (17'')$$

Für einen dünnen Draht, bei dem  $l$  groß ist gegen  $R$ , unterscheiden sich die drei Formeln für  $L$  sehr wenig voneinander, so daß wir ohne Bedenken mit dem von uns abgeleiteten angenäherten Ausdruck rechnen können. Eine weitere Vernachlässigung bei der Ableitung dieser Formel bezieht sich auf die Induktionswirkung der in  $A_1$  und  $A_2$  selber ablaufenden Ströme. Man ist dazu um so eher berechtigt, je größer die Dimensionen von  $A_1$  und  $A_2$  im Verhältnis zu denen des Querschnittes ihres Verbindungsdrahtes sind, weil dann die Stromdichte in den Konduktoren um vieles kleiner ist als in dem Drahte.

Sind  $A_1$  und  $A_2$  große Kugeln (Hertz verwandte solche von 30 cm Durchmesser) vom Radius  $R'$ , so ist zu setzen:

<sup>1)</sup> P. Debye in Enzyklopädie der math. Wiss. Bd. V, S. 467, 1910.

$$C = \frac{R'}{c^2}. \quad (18)$$

Unter Einsetzung dieses Wertes ergibt die Gleichung (16) für die Schwingungsdauer den Wert:

$$T = \frac{2\pi}{c} \sqrt{1R' \lg \frac{l}{R}}. \quad (19)$$

Man erhält daher für die eine der Hertzschen Versuchsanordnungen, in welcher  $R' = 15$ ;  $R = 0,25$ ;  $l = 120$  (die Kugelmittelpunkte waren um 1,50 m voneinander entfernt) zu setzen ist:

$$T = 2,21 \cdot 10^{-8} \text{ sek.}$$

Eine ebene elektromagnetische Welle dieser Periode, welche sich mit der Geschwindigkeit  $c = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm sek}^{-1}$  fortpflanzt, würde daher eine Wellenlänge besitzen von

$$\lambda = Tc = 6,62 \text{ m.}$$

Bei einer anderen Versuchsanordnung von Hertz betrug der Abstand der Mittelpunkte der Kugeln  $A_1, A_2$  1 m, es ist also  $l = 70 \text{ cm}$  zu setzen. Dann wird

$$T = 1,60 \cdot 10^{-8} \text{ sek,}$$

und

$$\lambda = 4,80 \text{ m.}$$

Diese Schwingungsdauern sind über 100mal kleiner als die bei den Feddersenschen Versuchen erreichten.

Ob der galvanische Widerstand auch in diesem Falle wirklich klein genug ist, um den oszillatorischen Charakter der Entladung nicht zu stören und die Periode nicht merklich zu beeinflussen, können wir leicht beurteilen, wenn wir uns daran erinnern (vgl. oben S. 450), daß dieser Umstand für die Entladungen von Leidener Flaschen eintritt, falls  $w^2$  klein neben  $4 \frac{L}{C}$  ist. Da nun hier an Stelle der Kapazität  $C$  der Leidener Flasche die halbe Kapazität der Kugel  $A_1$  tritt, so lautet also die Bedingung so, daß  $w^2$  klein neben  $8 \frac{L}{C}$  ist, d. h.  $w$  klein gegen  $2 \sqrt{2 \frac{L}{C}}$ . Nach (17) und (18) wird der letzte Ausdruck zu

$$2 \sqrt{2 \frac{L}{C}} = 4c \sqrt{\frac{1}{R'} \lg \frac{l}{R}}.$$

Für  $l = 120$ ,  $R' = 15$ ,  $R = 0,25$ , ergibt sich daher, daß  $w$  klein sein muß gegen  $84 \cdot 10^{10}$ , oder da  $10^9$  absolute Einheiten ein Ohm sind (vgl. oben S. 361), so muß  $w$  klein gegen 840 Ohm sein. Diese Bedingung

ist wohl sicher als erfüllt anzusehen, falls die Funkenstrecke nicht zu lang ist, selbst wenn der Strom wesentlich nur an der Oberfläche der Kupferdrähte verläuft.

### 3. Resonanzerscheinungen bei elektrischen Schwingungen.

Bringt man in die Nähe der im Abschnitt 1 beschriebenen Anordnung, die wir kurz den „Erreger“ oder die „Primärleitung“ nennen wollen, Drahtstücke, welche bis auf einen sehr kleinen Abstand, nämlich Bruchteile eines Millimeters, einander genähert werden können, so sieht man dort im allgemeinen bei jedem Erregerfunken (Primärfunken) ebenfalls kleine Fünkchen (Sekundärfunken) erscheinen. Bei bestimmter Anordnung dieser Drahtstücke, welche wir die Sekundärleitung nennen wollen, erreichen diese Sekundärfünkchen eine besondere Stärke, während sie bei gewissen Anordnungen der Sekundärleitung ganz verschwinden. Man schafft sich ein bequemes Maß für die

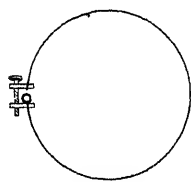


Fig. 55.

Größe der die Sekundärfunken verursachenden Potentialdifferenz, wenn man die Enden der Unterbrechungsstelle der Sekundärleitung mikrometrisch gegeneinander verschiebbar macht. Derjenige Abstand<sup>1)</sup> der Drahtenden, bei welchem gerade das Spiel der Sekundärfunken aufhört, kann als Maßstab für die sie verursachende Potentialdifferenz der Drahtenden angesehen werden. Zweckmäßig wählt man das eine Drahtende

als feine Spitze, das andere als kleine Kugelfläche von etwa  $\frac{1}{4}$  cm Radius, weil hierdurch schon bei kleinen Potentialdifferenzen Funken entstehen (vgl. Fig. 55).

Besteht die Sekundärleitung aus einem bis auf die Unterbrechungsstelle leitend geschlossenen, isolierten Drahte, der ein gewisses ebenes Flächenstück von der Größe  $F$  umgrenzt (vgl. Fig. 55), so erscheinen die Sekundärfunken im allgemeinen immer, wenn die Fläche  $F$  bei Verlängerung durch die Leitung des Erregers geht und ihr Mittelpunkt etwa auf der Senkrechten liegt, welche man auf der Primärleitung in ihrer Funkenstrecke errichten kann.

Aber die Länge der Sekundärfunken, gemessen an der besprochenen mikrometrischen Einrichtung, variiert, wenn man die Kapazität der Sekundärleitung durch angefügte Konduktoren, z. B. Stanniolblättchen, verändert, oder wenn man Kapazität und Selbstinduktion der Sekundärleitung verändert, indem man ihre Länge ändert. Es gibt zu jeder be-

<sup>1)</sup> Diese maximale zu erreichende Länge der Sekundärfunken soll im folgenden kurz mit „Länge der Sekundärfunken“ bezeichnet werden.

stimmten elektrischen Anordnung, d. h. Verfügung über Kapazität und Selbstinduktion des Erregers, eine bestimmte elektrische Anordnung der Sekundärleitung, für welche die Sekundärfunken eine maximale Länge erreichen, d. h. ihre Länge nimmt sowohl ab, wenn man die Kapazität oder Selbstinduktion der Sekundärleitung verkleinert, als wenn man jene vergrößert. So fand Hertz bei dem auf S. 518 besprochenen Erreger, der aus zwei Zinkkugeln von 30 cm Durchmesser bestand, deren Mittelpunkte einen Abstand von 1,50 m hatten, und deren Entladungsdraht von 0,5 cm Durchmesser war, daß die Länge der Sekundärfunken ein Maximum war, wenn die Sekundärleitung die Gestalt eines Quadrats von 75 cm Seitenlänge besaß. Diese maximale Funkenlänge betrug 3 mm, wenn die nächste Entfernung der Sekundärleitung von der primären 30 cm betrug. Bei einem Abstände der Mittelpunkte der Kugeln des Erregers von 1 m ergab sich für kreisförmige Gestalt der Sekundärleitung eine maximale sekundäre Funkenlänge, falls die Sekundärleitung einen Kreis von 35 cm Radius bildete.

Diese Erscheinungen sind nun offenbar nur durch eine Resonanzwirkung zwischen der primären und sekundären Leitung zu erklären. In der Tat können wir uns nach den im Abschnitt 14 des vorigen Kapitels angestellten Ueberlegungen leicht überzeugen, daß die Dauer der Grundschwingung der Sekundärleitung in den beiden angegebenen Fällen nahe mit der im vorigen Abschnitt berechneten Periode des Erregers zusammenfallen muß. An der genannten Stelle haben wir nämlich gesehen, daß bei zwei parallelen Drähten der Länge  $l'$ , welche an ihrem einen Ende leitend überbrückt sind, während ihre anderen Enden frei in der Luft ohne merkliche Kapazität endigen, für die Grundschwingung die Länge  $l$  gleich einer viertel Wellenlänge ist, d. h. die Gesamtlänge  $l' = 2l$  der Drähte ist gleich einer halben Wellenlänge. Da die Drähte so weit voneinander entfernt sein sollten, daß sie merklich influenzierend nicht aufeinander wirken, so können wir das hier gewonnene Resultat auch für die soeben beschriebenen Formen der Sekundärleitung anwenden, indem also allgemein für die Grundschwingung die Gesamtlänge einer beiderseits ohne Kapazität endigenden Leitung gleich einer halben Wellenlänge ist. Da die Wellen sich mit der Geschwindigkeit  $c$  fortpflanzen, so ist  $cT$  die Wellenlänge. Aus

$$l' = \frac{1}{2} cT$$

folgt also die Dauer der Grundschwingung der sekundären Leitung zu:

$$T = \frac{2l'}{c}.$$

Für das Quadrat von 75 cm Seitenlänge ist  $l' = 3$  m, d. h.  $T = 2,0 \cdot 10^{-8}$  sek. Für den Kreis von 35 cm Radius ist  $l' = 70 \pi$  cm, d. h.



$T = 1,47 \cdot 10^{-8}$  sek. Diese beiden Werte von  $T$  sind nahezu dieselben, welche im vorigen Abschnitt auf S. 525 als Perioden der zugehörigen Erreger berechnet sind. Erstere sind etwas kleiner als letztere, jedoch wird diese Differenz dadurch herbeigeführt sein, daß in Wirklichkeit die Enden der Sekundärleitung nicht ohne alle Kapazität sind, daß also an Stelle ihrer wirklichen Länge  $l'$  eine etwas größere einzusetzen wäre. Die Dimensionen der Sekundärleitung, für welche Resonanz mit dem Erreger eintritt, sind von der Natur ihres Metalls ganz unabhängig, z. B. für Eisendrähte ganz dieselben wie für Kupferdrähte.

Diese Erscheinung, daß der Eisendraht keine langsamere Eigenschwingung hat als der Kupferdraht, ist nach den Erörterungen des Abschnitts 10 des vorigen Kapitels auf S. 491 zu erklären.

Wie nun der Sekundärfunke zustande kommt, kann man sich in folgender Weise vorstellen. In der beschriebenen Lage der Sekundärleitung müssen die von der Primärleitung erzeugten magnetischen Kraftlinien die von der Sekundärleitung umgrenzte Fläche  $F$  durchsetzen. Denn jene magnetischen Kraftlinien sind Kreise, deren Ebenen senkrecht zur Primärleitung und deren Mittelpunkte in der Primärleitung liegen. Es wird daher in der Sekundärleitung eine periodisch wechselnde elektromotorische Kraft induziert, welche durch die Anzahl der die Fläche  $F$  durchsetzenden magnetischen Kraftlinien gemessen wird. Die Vorgänge in der Sekundärleitung sind daher diejenigen, welche wir im Abschnitt 5 des vorigen Kapitels ausführlich behandelt haben. Die in der sekundären Leitung erregten Schwingungen erreichen ihren größten Betrag im Fall der Resonanz, d. h. wenn die Periode der Eigenschwingungen der Sekundärleitung mit der Periode der erregenden Kraft, also der Periode der Schwingungen des Primärleiters übereinstimmt. Wenn die Potentialdifferenz an den Enden der Unterbrechungsstelle der Sekundärleitung durch mehrere, synchron mit den Eigenschwingungen erfolgende Anstöße der Primärschwingung eine genügende Höhe erreicht hat, wird sie einen Funken zwischen den Enden überschlagen lassen. In diesem Augenblicke steht die Sekundärleitung unter wesentlich anderen Bedingungen als ursprünglich, so lange der Funke die Enden nicht leitend verband. Da nämlich jetzt durch den Funken ein stetig zusammenhängender Leiter hergestellt ist, so ergibt sich aus den Entwicklungen des Abschnitts 14 auf S. 507, daß für die Grundschiwingung die Länge des Leiters gleich einer Wellenlänge ist. Die Periode der Eigenschwingungen ist daher jetzt nur halb so groß, als vorher ohne leitenden Funken. Diese jetzigen Eigenschwingungen der Sekundärleitung können durch die nur halb so schnell erfolgenden Primärschwingungen offenbar nicht in der Stärke der Resonanzschwingung erhalten werden. Der Sekundärfunke muß daher erlöschen auch dann, wenn die Primär-

schwingung noch längere Zeit bestehen bleibt. Eine Reihe neuer Anstöße von seiten der Primärleitung wird das beschriebene Spiel dann wieder erneuern, indem, falls die Funkenleitung fehlt, die Sekundärleitung wieder in Resonanz mit der Primärleitung steht, und daher die Schwingungsamplitude bis zu einem erneuten Funkendurchbruch gesteigert wird.

Aber die Primärschwingung ist im allgemeinen stark gedämpft, so daß das beschriebene Spiel schnell erlischt und erst durch eine neue Funkenentladung des Induktoriums wieder in Gang kommt.

#### 4. Nebenbedingungen für die Wirksamkeit der Primärfunken.

Daraus, daß die Sekundärfunken bei einer bestimmten Periode der Eigenschwingung des Sekundärleiters eine maximale Länge annehmen, daß also ein Resonanzphänomen besteht, kann mit Sicherheit auf den oszillatorischen Charakter der Primärentladung geschlossen werden. Denn eine Eigenschwingung kann nur dann den Effekt einer äußeren Kraft steigern, wenn diese ebenfalls periodisch pulsiert. Daher versagen auch die Resonanzerscheinungen und das Spiel der Sekundärfunken, wenn durch irgendwelche Umstände die Primärentladung nicht mehr oszillatorisch ist. Dies tritt z. B. ein, wenn die primäre Funkenstrecke zu lang ist, so daß ihr Widerstand zu groß wird, um eine oszillatorische Entladung zuzulassen (vgl. oben S. 450), oder wenn überhaupt kein Primärfunke erscheint, so daß nur die weit trägeren Ruhmkorff-Schwingungen übrig bleiben. — Falls die primäre Funkenstrecke zu kurz ist, versagen die Erscheinungen ebenfalls, vermutlich weil die Konduktoren  $A_1$ ,  $A_2$  der Primärleitung dann nicht zu einer genügend hohen Potentialdifferenz vor dem Einsetzen des Funkens geladen werden können, so daß die Energie der ganzen elektrischen Bewegung zu klein ist. — Es gibt einen gewissen günstigsten Abstand der Entladungskugeln der Primärleitung, der etwa bei  $\frac{3}{4}$  cm liegt. Es kann dieser Abstand leicht in jedem Falle aus der Beobachtung der Lebhaftigkeit der Sekundärfunken gefunden werden. Der Primärfunke besitzt dann einen scharfen, lauten Knall und sieht weißlich, nicht rötlich aus.

Aber auch bei diesem günstigsten Abstände der Entladungskugeln versagen die Schwingungen, wenn diese Kugeln nicht eine reine und gut polierte Oberfläche besitzen, z. B. wenn sie Spuren von Fett enthalten oder durch die Entladungen selbst in stärkerem Maße oxydiert werden. Vielleicht übernehmen in diesem Falle losgerissene Schmutzteilchen den Transport der Elektrizität, wenigstens teilweise; diese materiellen Teilchen vermögen aber infolge ihrer Trägheit nicht die sehr schnellen Schwingungen auszuführen.

Wegen des zuletzt angeführten Verhaltens ist es notwendig, die Entladungskugeln öfters wieder frisch zu putzen. Schon ein Abreiben mit einem Schmirgelpapier Nr. 0000 genügt meist, um den Primärfunken wieder „aktiv“ zu machen, eventuell muß man noch mit Alkohol, Putzleder und Wiener Kalk nachputzen. Außerdem soll ein auf die Kugeln gerichteter Strom trockener Luft ihre Aktivität längere Zeit bewahren<sup>1)</sup>. — Von sehr gutem Erfolge zur Bewahrung der Aktivität ist ein von Sarasin und de la Rive<sup>2)</sup> angewandtes Mittel, den Entladungsfunken anstatt in Luft in Oel oder Petroleum überschlagen zu lassen. Die Entladungsfunken werden von einem kleinen Glas- oder Ebonitgefäß umgeben, dessen Wände die Entladungsdrühte gut schließend durchsetzen. In das Gefäß wird das Oel gegossen. Bei dieser Einrichtung erhält man andauernd kräftige aktive Funken, ohne daß man wiederholt ein Putzen der Entladungskugeln vorzunehmen braucht. In jedem Falle empfiehlt es sich, Feuchtigkeit von den Entladungskugeln fernzuhalten. Wenn man den Funken nicht in Oel überschlagen läßt, so umgibt man ihn daher bei Demonstrationen in Zimmern, in denen viel Menschen sind, zweckmäßig mit einem kleinen metallfreien Kästchen, in welches man Stücke von Chlorkalzium oder sonstige Trockenmittel legt.

Schließlich muß man auch die primäre Funkenstrecke vor Beleuchtung mit ultravioletttem Lichte schützen, wie sie z. B. durch eine kleine Nebentladung oder durch kräftige Sekundärfunken in großer Nähe an der Primärleitung hervorgerufen werden kann, falls sie nicht ihre Aktivität einbüßen sollen<sup>3)</sup>.

Außerdem hat es sich für alle Experimente mit elektrischen Wellen als vorteilhaft herausgestellt, den primären Leiter nicht direkt durch das Induktorium anzuregen, sondern einen Tesla-Transformator dazwischenschalten<sup>4)</sup>. Das Induktorium erregt in diesem Falle zunächst einen Thomsonschen Schwingungskreis, der aus einer Leidener Flasche, der Primärspule des Tesla-Transformators und einer Funkenstrecke besteht. Die schnellen Schwingungen dieses Kreises wirken induzierend auf die Sekundärspule des Tesla-Transformators, mit deren Enden der Hertzsche Primärleiter verbunden ist. Dieser wird also nun im Tempo dieser Schwingungen aufgeladen und wird bei jeder halben Schwingung des Thomsonschen Kreises zu einer Reihe seiner 100mal schnelleren gedämpften Eigenschwingungen angeregt.

<sup>1)</sup> Vgl. dazu H. Classen, Wied. Ann. **39**, S. 647, 1890.

<sup>2)</sup> Sarasin et de la Rive, Compt. rend. **115**, S. 489, 1892. — Arch. de Genève (3) **28**, S. 306, 1892.

<sup>3)</sup> Vgl. dazu H. Hertz, Wied. Ann. **34**, S. 169, 1888.

<sup>4)</sup> Vgl. dazu H. Hertz, Wied. Ann. **34**, S. 169, 1888.

## 5. Untersuchung der elektrischen Kraft mit Hilfe des Resonators.

Die Funken in der passend dimensionierten sekundären Leitung, die wir jetzt kurz auch als den Resonator im Gegensatz zu dem Erreger oder Oszillator bezeichnen wollen, haben nach der im Abschnitt 3 angestellten Ueberlegung ihre Ursache darin, daß in die vom Resonator umgrenzte Fläche  $F$  periodisch wechselnd magnetische Kraftlinien eintreten und austreten. Aber wir können dem Resonator auch Lagen geben, in welchen die Gesamtzahl der die Fläche  $F$  schneidenden Kraftlinien stets Null ist, ohne daß deshalb die Sekundärfunken aufhören, nämlich wenn wir einen kreisförmigen Resonator so aufstellen, daß seine Fläche  $F$  senkrecht zu derjenigen Ebene steht, welche man durch die Primärleitung und das Zentrum von  $F$  legen kann. Liegt z. B. das Zentrum von  $F$  in derselben Horizontalebene mit der Primärleitung, so würde der Resonator eine der genannten Lagen einnehmen, falls seine Fläche  $F$  vertikal steht. Da aus Symmetrierücksichten die magnetischen Kraftlinien des in der Primärleitung verlaufenden Stromes konzentrisch zu ihr verlaufende Kreise sein müssen, deren Ebenen senkrecht zur Primärleitung stehen, so müssen in der beschriebenen Lage von  $F$  dieselben Kraftlinien, welche in  $F$  eintreten, auch wieder aus  $F$  austreten, so daß zu jeder Zeit die Gesamtzahl der  $F$  wirklich durchsetzenden Kraftlinien Null ist. Obgleich dann die über den ganzen Resonator summierte elektromotorische Kraft der Induktion verschwindet, so treten trotzdem bei gewissen Lagen der Funkenstrecke des Resonators die sekundären Funken auf. Aber es macht sich ein bemerkenswerter Unterschied in dem Verhalten des Resonators bei diesen Lagen und bei denjenigen geltend, in welchen die Fläche  $F$  von magnetischen Kraftlinien durchsetzt wird. Während nämlich in letzterem Falle die Lage der Unterbrechungsstelle, falls man den Resonator in sich dreht, im allgemeinen ziemlich wenig Einfluß auf das Einsetzen der Sekundärfunken hat, so tritt dies im ersteren Falle in bedeutendem Maße ein, so daß man immer bei Drehung des Resonators in sich zwei Lagen für die Unterbrechungsstelle findet, in welcher die Sekundärfunken überhaupt nicht einsetzen.

Diese Erscheinungen beweisen, daß wir bisher noch nicht alle auf den Resonator wirkenden elektromotorischen Kräfte berücksichtigt haben, und daß für die bei den zuletzt beschriebenen Erscheinungen wirkenden elektromotorischen Kräfte der Resonator nicht als ein geschlossener Leiter aufzufassen ist, wie wir es bei der Berechnung der bisherigen elektromotorischen Kräfte annahmen, sondern daß für die hier wirkenden

Kräfte die Lage der Unterbrechungsstelle in der Leitung des Resonators von Bedeutung ist.

Es ist nun auch nicht schwer, die Theorie des Resonators zu vervollständigen, so daß man auch von den neuen Erscheinungen Rechenschaft erhält<sup>1)</sup>. Wir haben nämlich bisher die Wirkung der vom Erreger ausgesandten elektrischen Kraftlinien nicht berücksichtigt. Wenn diese den Resonator treffen, so verursachen sie elektrische Strömung im Resonator. Die Wirkung der an einer Stelle P desselben herrschenden elektrischen Kraft muß aber um so stärker ausfallen, je näher P am Schwingungsbauche der Strömung liegt, d. h. je mehr P vom Schwingungsknoten, nämlich der Unterbrechungsstelle des Resonators, entfernt liegt. Es ist dieses ohne weitere mathematische Untersuchung verständlich, wenn man an analoge Vorgänge in der Akustik denkt; z. B. kann man eine Stimmgabel nicht zum Tönen bringen, wenn man sie an ihrem Fußende anstreicht.

Daher eignet sich der Resonator in einer Lage, bei welcher magnetische Kraftlinien seine Fläche  $F$  nicht durchsetzen, zur Untersuchung der Summenwirkung derjenigen elektrischen Kraft, welche an den von der Unterbrechungsstelle entfernten Orten der Resonatorleitung wirkt. Da die elektrischen Kraftlinien des Erregers ebene Kurven sind, welche seine beiden Konduktoren verbinden, so müssen daher in der auf voriger Seite genannten Lage des Resonators die Sekundärfunken maximale Längen besitzen, wenn seine Unterbrechungsstelle die höchste oder die tiefste Lage einnimmt. Liegt sie aber in einer Horizontalebene mit dem

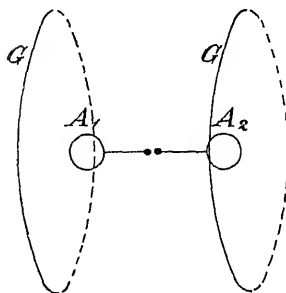


Fig. 56.

Erreger, so müssen die Sekundärfunken verschwinden, weil aus Symmetrietricksichten die Wirkung aller elektrischen Kräfte im Resonator sich aufhebt.

Liegt das Zentrum der Resonatorfläche  $F$  in einer durch den Erreger gehenden Horizontalebene, liegt ferner die Unterbrechungsstelle des Resonators vertikal über (oder unter) dem Zentrum, und dreht man den Resonator um eine, durch das Zentrum gehende, vertikale Achse, so erreichen während einer vollen Umdrehung die Sekundärfunken zweimal einen Maximalwert und zweimal einen Minimalwert (bzw. Null). Bei letzteren Lagen muß offenbar die Richtung der maximalen elektrischen Kraft senkrecht zur Resonatorfläche  $F$  gerichtet sein. — In ge-

<sup>1)</sup> Ueber eine ausführlichere Theorie des Resonators vgl. P. Drude, Wied. Ann. 53, S. 721, 1894.

wissen Stellen  $G$  des Raumes, welche sich zu zwei, die Konduktoren  $A_1$ ,  $A_2$  umgebenden Ringen zusammenschließen (vgl. Fig. 56), variiert jedoch die Länge der Sekundärfunken gar nicht bei Drehung des Resonators.

Diese Erscheinungen sind ein sicheres Anzeichen dafür, daß die elektrische Kraft an einer beliebigen Stelle  $P$  des vom Erreger erzeugten Feldes aus mehreren Komponenten verschiedener Phase besteht, so daß sich die Richtung der in  $P$  resultierenden elektrischen Kraft im Laufe einer Schwingung einmal herumdreht. Bleibt dabei die Größe der Resultierenden annähernd konstant, so hat sie für alle Richtungen, welche man durch  $P$  legen kann, den gleichen Mittelwert im Laufe mehrerer Schwingungen. Dies muß offenbar für die Ringgebiete  $G$  eintreten, die wir auch kurz Kreisgebiete nennen wollen, weil in ihnen eine die elektrische Kraft repräsentierende Gerade einen Kreis beschreibt während einer Schwingung.

Welches die verschiedenen, hier ins Spiel tretenden Komponenten der elektrischen Kraft nach der Maxwellschen Theorie sind, soll genauer in Abschnitt 7 untersucht werden.

## 6. Verhalten des Resonators bei beliebiger Lage.

Bei beliebiger Lage des Resonators entstehen die sekundären Funken durch Ueberlagerung der im Abschnitt 3 allein betrachteten Induktionskraft, welche die Aenderung der äußeren magnetischen Kraft hervorbringt, und der im vorigen Abschnitt 5 betrachteten Wirkung der äußeren elektrischen Kraft.

Von diesem Standpunkte aus kann man nun leicht alle Erscheinungen verstehen, welche der Resonator in speziellen Lagen bei Drehungen in sich zeigt, d. h. bei Drehungen um eine durch das Zentrum der Resonatorfläche  $F$  hindurchgehende, senkrecht zu  $F$  stehende Achse.

Betrachten wir der Einfachheit halber nur die Fälle, daß der Mittelpunkt der Resonatorfläche  $F$  in der Aequatorebene<sup>1)</sup> und mit der Primärleitung in einer Horizontalebene liege, so können drei Hauptlagen von  $F$  unterschieden werden.

1.  $F$  ist vertikal und senkrecht zum Primärleiter. Bei keiner Lage der Unterbrechungsstelle des Resonators erscheinen Sekundärfunken. In der Tat kann weder die elektrische noch die magnetische Kraft wirken.

2.  $F$  ist vertikal und parallel zum Primärleiter. Es erscheinen Sekundärfunken, falls die Funkenstrecke die höchste oder tiefste

<sup>1)</sup> Hierunter ist die Ebene verstanden, welche senkrecht zur Primärleitung steht und durch ihre Funkenstrecke hindurchgeht.

Stelle des Resonators einnimmt, dagegen keine, falls die Funkenstrecke in der durch den Mittelpunkt von F gehenden Horizontalebene liegt. — Der Grund für diese Erscheinungen ist schon oben S. 532 gegeben. Die magnetische Kraft wirkt hier nicht.

3. F ist horizontal. Die Sekundärfunken verschwinden bei keiner Lage der Unterbrechungsstelle des Resonators. Sie erreichen aber einen Maximal- bzw. Minimalwert, falls die Unterbrechungsstelle auf der durch den Primärfunken und das Zentrum von F gehenden Geraden liegt, und zwar erreichen die Funken den Maximalwert, falls die Unterbrechungsstelle von dem Primärleiter abgewandt ist, dagegen den Minimalwert, falls sie dem Primärleiter zugewandt ist. Dieses Verhalten ergibt sich daraus, daß die Wirkung der magnetischen Kraft bei allen Lagen der Unterbrechungsstelle dieselbe ist. Die Wirkung der elektrischen Kraft erreicht ihre Maximalwerte, falls die Unterbrechungsstelle auf der Geraden G liegt. Eine genauere Diskussion<sup>1)</sup>, die aber hier übergangen werden möge, ergibt nun tatsächlich das Verhalten des Resonators, wie es die Beobachtung lehrt.

Liegt die Unterbrechungsstelle senkrecht zur Geraden G, so wirkt die elektrische Kraft gar nicht. In dieser Lage erscheint daher der Resonator geeignet zur Untersuchung der alleinigen Wirkung der magnetischen Kraft. (Streng genommen untersucht man den Mittelwert der magnetischen Kraft innerhalb der Kreisfläche F.)

Haben wir uns bisher von dem Verlauf der elektrischen und magnetischen Kraft in der Umgebung des Erregers nur eine Art rohe Vorstellung gebildet, um besser von vornherein die Bedeutung der hier beschriebenen Hertz'schen Versuche erkennen zu können, so soll jetzt eine strengere Berechnung auf Grund der Formeln (20) und (21) des VII. Kapitels (S. 420) geschehen<sup>2)</sup>.

## 7. Die elektrische und die magnetische Kraft um eine geradlinige Schwingung nach der Maxwell'schen Theorie.

Die Gleichungen (20) und (21) des VII. Kapitels, von denen auszugehen ist, sollen zunächst für den Fall spezialisiert werden, daß die Verteilung der Kräfte symmetrisch um die z-Achse ist, derart, daß dieselben für irgendeinen Punkt nur abhängen von seiner z-Koordinate und seiner senkrechten Entfernung  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  von der z-Achse. Dieser Fall liegt offenbar bei der bisher betrachteten geradlinigen Primär-

<sup>1)</sup> Vgl. hierüber den S. 532 in der Anm. genannten Aufsatz von P. Drude.

<sup>2)</sup> Diese Berechnung ist H. Hertz, Wied. Ann. **36**, S. 1, 1889, entlehnt.

leitung vor, falls die z-Achse in dieselbe gelegt wird. Nennen wir  $\mathcal{E}_\rho$  die Komponente der elektrischen Kraft nach  $\rho$ ,  $\mathcal{E}_t$  die Komponente der elektrischen Kraft, welche senkrecht zu  $\rho$  und  $z$  liegt, und zwar positiv gerechnet in dem Sinne, daß  $\mathcal{E}_t$  durch eine negative Drehung (vgl. oben S. 21) um die z-Achse in die Richtung von  $\mathcal{E}_\rho$  übergeführt werden kann, so ist

$$\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_\rho \frac{x}{\rho} - \mathcal{E}_t \frac{y}{\rho}, \quad \mathcal{E}_y = \mathcal{E}_\rho \frac{y}{\rho} + \mathcal{E}_t \frac{x}{\rho}. \quad (20)$$

Ferner soll  $\mathfrak{H}_\rho$  die Komponente der magnetischen Kraft nach  $\rho$ ,  $\mathfrak{H}_t$  die senkrecht zu  $\rho$  und  $z$  liegende Komponente bedeuten, und zwar ist  $\mathfrak{H}_t$  positiv gerechnet in demselben Sinne wie  $\mathcal{E}_t$ , d. h. ein positives  $\mathfrak{H}_t$  sucht seinen Angriffspunkt in positivem Sinne (vgl. oben S. 21) um die +z-Achse zu drehen. Dann gelten analog wie (20) auch die Formeln

$$\mathfrak{H}_x = \mathfrak{H}_\rho \frac{x}{\rho} - \mathfrak{H}_t \frac{y}{\rho}, \quad \mathfrak{H}_y = \mathfrak{H}_\rho \frac{y}{\rho} + \mathfrak{H}_t \frac{x}{\rho}. \quad (20')$$

Setzt man diese Werte nach (20) und (20') in die Formeln (20) und (21) der S. 420 ein, so erhält man unter Berücksichtigung der Beziehungen

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x}{\rho}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{y}{\rho}$$

und geeigneter Zusammenfassung der entstehenden Formeln mit den Faktoren  $\frac{x}{\rho}$ ,  $\frac{y}{\rho}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \mathcal{E}_\rho}{\partial t} &= - \frac{\partial \mathfrak{H}_t}{\partial z}, \\ \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \mathcal{E}_t}{\partial t} &= \frac{\partial \mathfrak{H}_\rho}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial \rho}, \\ \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial t} &= \frac{\mathfrak{H}_t}{\rho} + \frac{\partial \mathfrak{H}_t}{\partial \rho}, \\ \frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}_\rho}{\partial t} &= \frac{\partial \mathcal{E}_t}{\partial z}, \\ \frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}_t}{\partial t} &= - \frac{\partial \mathcal{E}_\rho}{\partial z} + \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial \rho}, \\ \frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t} &= - \frac{\mathcal{E}_t}{\rho} - \frac{\partial \mathcal{E}_t}{\partial \rho}, \end{aligned} \quad (21)$$

während aus den Formeln (22) und (23) der S. 420 entsteht, falls  $\epsilon$  und  $\mu$  als konstant angenommen werden:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{E}_\rho}{\partial \rho} + \frac{\mathcal{E}_\rho}{\rho} + \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial z} \right) = 0, \quad (22)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathfrak{H}_\rho}{\partial \rho} + \frac{\mathfrak{H}_\rho}{\rho} + \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial z} \right) = 0. \quad (23)$$



Die beiden letzten Formeln sind nicht unabhängig von den Gleichungen (21), sondern folgen identisch aus ihnen, wie man sich leicht durch Einsetzen der Werte von  $\frac{\partial \mathfrak{E}_e}{\partial t}$  usw. nach (21) überzeugen kann.

Die abgeleiteten Formeln haben das Eigentümliche, daß nur  $\mathfrak{H}_t$ ,  $\mathfrak{E}_e$  und  $\mathfrak{E}_z$  notwendig miteinander verbunden erscheinen und ebenso  $\mathfrak{E}_t$ ,  $\mathfrak{H}_e$  und  $\mathfrak{H}_z$ . Wir können daher den allgemeinsten Fall, in welchem die elektrischen Kräfte sowohl als die magnetischen nur von  $z$ ,  $\rho$  und  $t$  abhängen, als eine Uebereinanderlagerung von zwei Kraftsystemen auffassen, für deren eines die elektrischen Kraftlinien in den Meridianebenen, die magnetischen Kraftlinien senkrecht zu ihnen (als Breitenkreise) verlaufen, während im anderen Kraftsystem umgekehrt die magnetischen Kraftlinien in Meridianebenen verlaufen, während die elektrischen Kraftlinien Breitenkreise sind. Für den geradlinigen Hertzschen Erreger tritt offenbar das erstere Kraftsystem allein auf; wir haben daher zu setzen  $\mathfrak{H}_e = \mathfrak{E}_t = \mathfrak{H}_z = 0$ . Die übrigbleibenden Kräfte  $\mathfrak{H}_t$ ,  $\mathfrak{E}_e$ ,  $\mathfrak{E}_z$  müssen durch eine einzige Größe ausdrückbar sein. Wir befriedigen die erste der Gleichungen (21), indem wir setzen:

$$\mathfrak{E}_e = - \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \mathfrak{H}_t = + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial Q}{\partial t}, \quad (24)$$

worin  $Q$  eine noch weiter zu bestimmende Funktion von  $\rho$ ,  $z$  und  $t$  ist. Nach der dritten der Gleichungen (21) muß dann sein

$$\mathfrak{E}_z = \frac{Q}{\rho} + \frac{\partial Q}{\partial \rho}, \quad (25)$$

während nach der fünften der Gleichungen (21) für  $Q$  die Gleichung folgt:

$$\frac{\mu \varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{Q}{\rho} + \frac{\partial Q}{\partial \rho} \right). \quad (26)$$

Die Lösung der Aufgabe ist also in den Gleichungen (24) und (25) enthalten, wenn wir darin  $Q$  entsprechend der Gleichung (26) wählen. Diese Gleichung (26) hat dieselbe Bauart wie diejenigen beiden Gleichungen, denen  $\mathfrak{E}_e$  und  $\mathfrak{H}_t$  für sich allein genügen müssen, wie man sofort erkennt, wenn man (26) einmal nach  $z$  oder einmal nach  $t$  differenziert und für  $\frac{\partial Q}{\partial z}$ , bzw.  $\frac{\partial Q}{\partial t}$  die Werte  $\mathfrak{E}_e$ , bzw.  $\mathfrak{H}_t$  nach (24) einsetzt. Dagegen muß  $\mathfrak{E}_z$  einer anderen Differentialgleichung genügen. Dividiert man nämlich (26) durch  $\rho$ , so kann man schreiben:

$$\frac{\mu \varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{Q}{\rho} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{Q}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{Q}{\rho} + \frac{\partial Q}{\partial \rho} \right),$$

differenziert man dagegen (26) nach  $\rho$ , so erhält man:

$$\frac{\mu \varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial Q}{\partial \rho} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial Q}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \left( \frac{Q}{\rho} + \frac{\partial Q}{\partial \rho} \right).$$

Addiert man nun die beiden zuletzt erhaltenen Gleichungen und setzt für  $\frac{Q}{\rho} + \frac{\partial Q}{\partial \rho}$  nach (25) den Wert  $\mathfrak{E}_z$ , so ergibt sich für  $\mathfrak{E}_z$  die Differentialgleichung:

$$\frac{\mu \varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_z}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_z}{\partial \rho^2}. \quad (27)$$

Diese Gleichung muß die Umgestaltung der nach S. 434 im VII. Kapitel aufgestellten, stets gültigen Formel (34) sein, nämlich

$$\frac{\mu \varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_z}{\partial t^2} = \Delta \mathfrak{E}_z, \quad (27')$$

falls man  $\rho$  und  $z$  als unabhängige Veränderliche einführt. Es ist also die rechte Seite von (27) identisch mit  $\Delta \mathfrak{E}_z$ , d. h. es ist:

$$\Delta \mathfrak{E}_z = \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_z}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_z}{\partial \rho^2}. \quad (28)$$

Man kann nun auch die Lösung des hier gestellten Problems zurückführen auf die Aufsuchung einer Funktion  $\Pi$ , welche nicht einer Differentialgleichung der Form (26), sondern einer der Form (27) genügt. Man braucht zu dem Zwecke nämlich nur zu setzen:

$$Q = \frac{\partial \Pi}{\partial \rho}. \quad (29)$$

Setzt man nämlich diesen Wert für  $Q$  in (26) ein, so kann man eine Integration nach  $\rho$  ausführen und erhält für  $\Pi$  die Gleichung:

$$\frac{\mu \varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Pi}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \rho^2} = \Delta \Pi. \quad (30)$$

Die Gleichungen (24) werden dann nach (29):

$$\mathfrak{E}_\varrho = - \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \rho \partial z}, \quad \mathfrak{E}_t = + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \rho \partial t}, \quad (31)$$

während (25) ergibt:

$$\mathfrak{E}_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Pi}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \rho^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \Pi}{\partial \rho} \right). \quad (32)$$

Die Gleichungen (30), (31) und (32) enthalten also ebenso die Lösung der gestellten Aufgabe, wie die früheren Gleichungen (24), (25) und (26). Diese zweite Form der Lösung ist hier angegeben, weil die Differentialgleichung (30) eine bekanntere ist als die Differentialgleichung (26).

Die Differentialgleichung (30) ist für die unabhängigen Veränderlichen  $\rho$  und  $z$  explizit hier hingeschrieben. Es ist für das Folgende auch nützlich, sie für den Fall umzuformen, daß  $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$  allein als unabhängige

Veränderliche auftritt. Diese Umgestaltung gelingt am einfachsten, wenn wir wiederum den oben S. 244 eingeschlagenen Weg gehen, indem wir berücksichtigen, daß  $\Pi$  als die Potentialfunktion einer Massenverteilung angesehen werden kann, deren räumliche Dichte  $-\frac{1}{4\pi} \frac{\mu \varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2}$  ist.

Wenden wir dann auf  $\Pi$  den Gaußschen Satz (cf. oben S. 32) an innerhalb einer von den Radien  $r$  und  $r + dr$  begrenzten Kugelschale, so ergibt sich

$$4\pi \left\{ (r + dr)^2 \left[ \frac{\partial \Pi}{\partial r} \right]_{r+dr} - r^2 \left[ \frac{\partial \Pi}{\partial r} \right]_r \right\} = 4\pi r^2 dr \frac{\mu \varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2},$$

d. h. durch Entwicklung von  $\left[ \frac{\partial \Pi}{\partial r} \right]_{r+dr}$  nach dem Taylorschen Lehrsatzes folgt:

$$\frac{\mu \varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} = \frac{2}{r} \frac{\partial \Pi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2}. \quad (33)$$

Dies ist also die gesuchte Umgestaltung der Differentialgleichung (30) in dem spezielleren Fall, daß  $\Pi$  nur von  $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$  abhängt.

Für diesen Fall kann man nun leicht das allgemeine Integral der Differentialgleichung (33) hinschreiben. Es ist nämlich

$$\Pi = \frac{1}{r} \left[ f_1 \left( r - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} t \right) + f_2 \left( r + \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} t \right) \right], \quad (34)$$

wobei  $f_1$  und  $f_2$  irgendwelche beliebige Funktionen ihrer in den beigesetzten Klammern stehenden Argumente bedeuten. In der Tat erhält man aus (34), falls man den ersten Differentialquotienten von  $f_1$  nach seinem Argument mit  $f_1'$ , den zweiten mit  $f_1''$  bezeichnet:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial r} &= \frac{1}{r} (f_1' + f_2') - \frac{f_1 + f_2}{r^2}, \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2} &= \frac{1}{r} (f_1'' + f_2'') - \frac{2(f_1' + f_2')}{r^2} + \frac{2(f_1 + f_2)}{r^3}, \\ \frac{2}{r} \frac{\partial \Pi}{\partial r} &= \frac{2(f_1' + f_2')}{r^2} - \frac{2(f_1 + f_2)}{r^3}. \end{aligned}$$

Addiert man die beiden letzten Gleichungen, so sieht man, daß (33) identisch erfüllt ist.

Die Form (34) von  $\Pi$  entspricht zwei mit der Geschwindigkeit  $\frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$  fortgepflanzten Kugelwellen, von denen die eine ( $f_1$ ) sich in Richtung der wachsenden Radien  $r$ , während die andere ( $f_2$ ) sich in Richtung abnehmender Radien  $r$  fortpflanzt. Letztere Bewegung kann nur durch Reflexion der vom Erreger ausgehenden Wellen an irgend-

welchen Wänden entstehen. Wir wollen sie vorläufig beiseite lassen, indem wir annehmen, der Erreger befinde sich in einem unbegrenzten Luft-raum. Für diesen ist auch  $\varepsilon = \mu = 1$  zu setzen, was wir von nun an tun wollen.

$\Pi$  wird im Koordinatenanfang, d. h. für  $r = 0$  unendlich groß. Dort kann daher die Form (34) keine Gültigkeit mehr besitzen. Um zu erfahren, welche elektrischen Vorgänge in diesem Punkte der durch  $\Pi$  gegebenen Kräfteverteilung entsprechen, untersuchen wir seine nächste Umgebung, indem wir  $r$  gegen  $-ct$  vernachlässigen. Es wird dann nach (34), wenn wir für  $f_1(-ct)$  einfach  $f(t)$  schreiben und  $f_2 = 0$  setzen:

$$\Pi = \frac{1}{r} f(t). \quad (34')$$

Nach (31) wird

$$\mathcal{E}_\rho = - \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \rho \partial z} = - f(t) \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} \right), \quad (35)$$

nach (32) wird, da nach (30)

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Pi}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \rho^2} = \Delta \Pi - \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2}$$

ist und  $\Delta \Pi$  nach (34') verschwindet:

$$\mathcal{E}_z = - \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} = - f(t) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} \right). \quad (36)$$

Die Formeln (35) und (36) entsprechen der elektrostatischen Wirkung eines elektrischen Dipols, d. h. der Kraft, welche von zwei auf der  $z$ -Achse in kleinem Abstand  $dz$  befindlichen Punkten herrührt, deren Ladungen  $e$  entgegengesetzt gleich und zu  $f(t)$  proportional sind. Denn nach den Ausführungen in Abschnitt 29 des I. Kapitels (S. 61) ist das Potential zweier solcher Punkte:

$$V = edz \cdot \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r}.$$

Es ist nun wirklich

$$\mathcal{E}_\rho = - \frac{\partial V}{\partial \rho}, \quad \mathcal{E}_z = - \frac{\partial V}{\partial z},$$

falls man setzt

$$edz = f(t). \quad (37)$$

Die hier gewählte Form von  $\Pi$  entspricht also angenähert der um den Hertzschen Erreger bestehenden Kraftverteilung, falls seine Länge als die unendlich kleine Größe  $dz$  angesehen werden kann, d. h. falls man die Kraft in Punkten untersucht, welche so weit vom Erreger ent-

fernt sind, daß seine Länge gegen diese Entfernung als klein angesehen werden kann.

Die magnetische Kraft  $\mathfrak{H}_t$  in der Nähe des Erregers ist nach (31), (34') und (37)

$$\mathfrak{H}_t = \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \rho \partial t} = \frac{dz}{c} \frac{\partial e}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{r}.$$

Nun ist  $\frac{\partial r}{\partial \rho} = \frac{\rho}{r} = \sin(r dz)$ , folglich

$$\mathfrak{H}_t = -\frac{1}{c} dz \cdot \frac{\partial e}{\partial t} \frac{\sin(r dz)}{r^2}. \quad (38)$$

Nach dem Biot-Savartschen Gesetz [Formel (61) auf S. 255] müßte die magnetische Kraft, welche von einem Stromelemente der Länge  $dz$  und der Stromstärke  $i$  herrührt, sein:

$$\mathfrak{H}_t = \frac{i dz}{r^2} \sin(r dz).$$

Eine Vergleichung mit der Formel (38) liefert für  $i$ :

$$i = -\frac{1}{c} \frac{\partial e}{\partial t},$$

und in der Tat wird die im Erreger fließende Stromstärke  $i$  nach elektromagnetischem Maße durch diese Formel gegeben, da  $e$  elektrostatisch gemessen ist; denn  $\mathfrak{E}_\rho$  und  $\mathfrak{E}_z$  sind in diesem Maßsystem gemessen.

In größeren Entfernungen vom Erreger, falls also  $r$  nicht mehr neben  $ct$  zu vernachlässigen ist, folgt aus (31), (32) und (34), da  $\frac{\partial r}{\partial \rho} = \frac{\rho}{r}$ ,  $\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$  ist, wenn man den Index 1 an  $f_1$  fortläßt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_t &= \frac{\rho}{r^2} \left( \frac{f'}{r} - f'' \right), \\ \mathfrak{E}_\rho &= \frac{\rho z}{r^3} \left( -\frac{3f}{r^2} + \frac{3f'}{r} - f'' \right), \\ \mathfrak{E}_z &= \frac{2}{r^2} \left( -\frac{f}{r} + f' \right) + \frac{\rho^2}{r^3} \left( \frac{3f}{r^2} - \frac{3f'}{r} + f'' \right). \end{aligned} \quad (39)$$

Für die  $z$ -Achse, d. h. in Richtung der Erregerschwingung, ist  $\rho = 0$ , daher  $\mathfrak{H}_t = \mathfrak{E}_\rho = 0$ ,  $\mathfrak{E}_z = -\frac{2f}{r^3} + \frac{2f'}{r^2}$ . Die elektrische Kraft fällt also in die Richtung der Schwingung. Ist  $f$  eine periodische Funktion der Zeit, wie es beim Hertzschen Erreger der Fall ist, so nimmt die Amplitude der elektrischen Kraft  $\mathfrak{E}_z$  in kleinen Entfernungen ab wie

die dritte Potenz, in größeren Entfernungen wie das Quadrat der reziproken Entfernung.

In der Aequatorebene ist  $z = 0$ ,  $\rho = r$ , daher

$$\mathcal{E}_\varrho = 0, \quad \mathfrak{S}_t = \frac{f'}{r^2} - \frac{f''}{r}, \quad \mathcal{E}_z = \frac{f}{r^3} - \frac{f'}{r^2} + \frac{f''}{r}.$$

Ist  $f$  eine periodische Funktion, so nimmt also die Amplitude der elektrischen Kraft mit wachsendem  $r$  zunächst, bei kleiner Entfernung  $r$ , schnell ab, wie  $\frac{1}{r^3}$ , für große  $r$  langsamer, nämlich wie  $\frac{1}{r}$ .

In sehr großen Entfernungen ergibt sich aus (39), falls man den Winkel, welchen der Radiusvektor  $r$  mit der  $z$ -Achse bildet,  $\vartheta$  nennt, wobei  $\rho : r = \sin \vartheta$ ,  $z : r = \cos \vartheta$  ist,

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_t &= - \frac{f''}{r} \sin \vartheta, \\ \mathcal{E}_\varrho &= - \frac{f''}{r} \sin \vartheta \cos \vartheta, \\ \mathcal{E}_z &= + \frac{f''}{r} \sin^2 \vartheta. \end{aligned} \quad (39')$$

Hieraus folgt  $\mathcal{E}_z \cos \vartheta + \mathcal{E}_\varrho \sin \vartheta = 0$ , d. h. die Richtung der elektrischen Kraft steht in großen Entfernungen überall senkrecht auf der Richtung vom Ausgangspunkte der Kraft, dieselbe pflanzt sich also dort als Transversalwelle fort. Die Größe der resultierenden elektrischen Kraft ist  $\sqrt{\mathcal{E}_\varrho^2 + \mathcal{E}_z^2} = \frac{f''}{r} \sin \vartheta$ . Dieselbe ist also in der Aequatorebene ( $\vartheta = 90^\circ$ ) am größten, dagegen verschwindet sie in der Verlängerung der Achse des Erregers ( $\vartheta = 0$ ). Die Versuche bestätigen diese Folgerung.

Nach (37) gibt  $f$  für  $r = 0$  die elektrische Ladung eines Konduktors des Erregers an, multipliziert mit der Länge  $dz$  des Erregers. Je schneller die Ladung variiert, um so mehr überwiegt in den Formeln (39)  $f''$  über  $f'$  und  $f$ . Die mit  $f$  proportionalen Terme geben daher die elektrische Kraft für sehr langsame Schwingungen des Erregers an, d. h. die sogenannte elektrostatische Kraft. Die mit  $f''$  proportionalen Terme entsprechen dagegen der von dem Strome im Erreger induzierten elektromotorischen Kraft, da dieselbe proportional mit  $\frac{\partial i}{\partial t} = \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} = f''$  ist. Die Induktionskraft überwiegt also um so mehr über die elektrostatische Kraft, je schneller die Schwingungen des Erregers erfolgen und je größer der Abstand  $r$  ist.

Außer diesen beiden Bestandteilen setzt sich die elektrische Kraft noch aus einem dritten Teil zusammen, nämlich aus den mit  $f'$  propor-

tionalen Termen. Diese würden erhalten bleiben, auch wenn der Primärleiter von einem konstanten Strome durchflossen wäre, da dann  $f'$  von Null verschieden, während  $f''$  gleich Null ist. Diese Terme entstehen offenbar dadurch, daß der Primärleiter ungeschlossen ist, so daß ein in demselben fließender Strom notwendig von Verschiebungsströmen im umgebenden Luftraum begleitet ist. Wir wollen daher abkürzend die mit  $f'$  proportionalen Terme die elektrische Kraft der Verschiebungsströme nennen.

Alle drei Bestandteile der elektrischen Kraft, die elektrostatische Kraft, die Induktionskraft und die elektrische Kraft der Verschiebungsströme, haben dieselbe Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $c$ , letztere Kraft hat aber, im Falle periodischer Veränderungen, eine Phasendifferenz von  $90^\circ$  gegen die beiden ersteren, die von gleicher Phase sind. Daraus ergibt sich für die nähere Umgebung des Erregers ein verwickelter Verlauf der Erscheinungen, den wir in Abschnitt 9 näher erörtern werden. Zunächst behandeln wir die Vorgänge in großer Entfernung noch von einem anderen Gesichtspunkte aus.

## 8. Strahlung der Energie.

Nach dem oben auf S. 427 abgeleiteten Poyntingschen Gesetz kann man die Aenderungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Energie eines Raumes herbeigeführt ansehen durch einen Energiefluß durch seine Oberfläche. Derselbe ist für die Flächeneinheit gleich dem Produkt aus der elektrischen und der magnetischen Kraft, multipliziert mit dem Sinus des Winkels, welchen sie miteinander bilden, und dem Faktor  $c:4\pi$ . Die Richtung des Energieflusses ist senkrecht auf der elektrischen und magnetischen Kraft.

Berechnen wir die Aenderung der Energie innerhalb einer sehr großen um den Erreger beschriebenen Kugelfläche, so liegen nach den Untersuchungen des vorigen Abschnittes die magnetische und elektrische Kraft für große  $r$  in jener Kugeloberfläche und stehen senkrecht aufeinander. Die in einer Sekunde durch die Flächeneinheit dieser Kugeloberfläche hindurchströmende Energie hat daher den Betrag

$$\mathfrak{E} = \frac{c}{4\pi} \mathfrak{G}_t \sqrt{\mathfrak{G}_\theta^2 + \mathfrak{G}_z^2} = \frac{c}{4\pi} \frac{f''^2}{r^2} \sin^2 \vartheta. \quad (40)$$

Für die Richtung dieser Energieströmung ist die Flemingsche Regel (siehe S. 428) unter Berücksichtigung der im Anfang des letzten Abschnittes festgesetzten Vorzeichen der elektrischen und magnetischen Kraft maßgebend; es ergibt sich daraus, daß die Strömung in Richtung des Radius nach außen, vom Erreger fort gerichtet ist. Sie stellt also eine

dauernde Aussendung von Energie seitens des Erregers dar. Diese Energie wandert mit der elektromagnetischen Welle in den Raum hinaus; man bezeichnet sie als die Strahlung des Erregers. Diese Strahlung hat nicht den gleichen Betrag nach allen Richtungen; wie Formel (40) zeigt, ist sie in Richtung der Achse des Erregers Null und hat in allen zur Achse senkrechten Richtungen ihr Maximum vom Betrage

$$\mathfrak{S}_m = \frac{c}{4\pi} \frac{f''^2}{r^2}.$$

Vollführt der Erreger periodische Schwingungen konstanter Amplitude, so ist nach (37), falls die Länge  $dz$  des Erregers gleich  $l$  und die maximale elektrische Ladung einer seiner Konduktoren gleich  $e_0$  gesetzt wird,

$$f = e_0 l \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} \right), \quad f'' = -e_0 l \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} \right). \quad (41)$$

Also ist der Betrag der Strahlung im Abstände  $r$  in dem Zeitelement  $dt$ :

$$d\mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi} \cdot \frac{e_0^2 l^2 16\pi^4}{\lambda^4 r^2} \sin^2 \vartheta \cdot \sin^2 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} \right) dt$$

und der ganze Betrag während einer halben Schwingungsperiode:

$$\mathfrak{S}_{\frac{T}{2}} = \frac{c}{4\pi} \frac{e_0^2 l^2 16\pi^4}{\lambda^4 r^2} \sin^2 \vartheta \int_0^{T/2} \sin^2 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} \right) dt.$$

Da nun  $\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x$ , so folgt für die während  $\frac{1}{2} T$  ausgestrahlte Energiemenge, wenn man noch die Beziehung  $\lambda = cT$  benutzt (siehe oben S. 441):

$$\mathfrak{S}_{\frac{T}{2}} = \frac{\pi^3 e_0^2 l^2}{\lambda^3 r^2} \sin^2 \vartheta.$$

Man kann die Größe  $e_0$  aus der Schlagweite der Entladungskugeln des Erregers schätzen. Bei den von Hertz angestellten Versuchen war diese Schlagweite 1 cm. Nimmt man entsprechend neueren Messungen als Potentialdifferenz für diese Schlagweite rund 100 elektrostatische Einheiten an, so berechnet sich die Ladung jeder Kugel von 15 cm Radius zu  $15 \times 50 = 750$  elektrostatischen Einheiten. Für den Fall, daß die Kugelmittelpunkte 100 cm Abstand haben<sup>1)</sup> und die Wellenlänge den

<sup>1)</sup> Bei der Berechnung der Schwingungsdauer mußte oben die wahre Länge des Drahtes zwischen den Kugeln, also 70 cm, in die Formel für die Selbstinduktion eingesetzt werden. Für die Wirkung, die der Erreger als Dipol in großer Entfernung ausübt, muß aber offenbar der Abstand der Kugelmittelpunkte für  $l$  in obiger Formel eingeführt werden, da bei den Kugeln, die sich ja durch Influenz nicht beeinflussen sollen, die elektrischen Ladungen so wirken, als ob sie in den Kugelmittelpunkten vereinigt wären.



oben (S. 525) dafür berechneten Wert von 480 cm hat, ergibt sich der Betrag der Strahlung unseres Erregers in der Aequatorialebene ( $\vartheta = 90^\circ$ ) während  $\frac{T}{2}$  zu  $\frac{1577}{r^2} \frac{\text{Erg}}{\text{cm}^2}$ . Wir vergleichen diesen Wert mit der Strahlung der Sonne. Sie beträgt für Punkte außerhalb unserer Atmosphäre ungefähr 3 Gramm-Kalorien oder  $12,6 \times 10^7$  Erg für 1 qcm in einer Minute. Sie würde also für die Zeit  $0,8 \times 10^{-8}$  Sekunden  $0,017 \frac{\text{Erg}}{\text{cm}^2}$

betragen. Den gleichen Wert würde die Strahlung unseres Erregers in der Aequatorialebene in Abständen von 3 Meter besitzen.

Wir berechnen ferner die ganze Energiemenge  $q$ , die der Erreger während einer halben Schwingung aussendet. Dazu bilden wir das Integral der Strahlung über die ganze Oberfläche der großen Kugel vom Radius  $r$ :

$$q = \frac{\pi^3 e_0^2 l^2}{\lambda^3} \int \frac{\sin^2 \vartheta}{r^2} dS,$$

wenn  $dS$  ein Element dieser Kugeloberfläche bedeutet.

Zerlegt man diese Oberfläche durch Ebenen, welche senkrecht zur  $z$ -Achse stehen, in Flächenstreifen, deren Meridianschnitt vom Koordinatenanfang aus unter dem Winkel  $d\vartheta$  erscheint, so ist die Größe eines solchen Streifens

$$dS = 2\pi r^2 \sin \vartheta d\vartheta.$$

Da nun

$$\int \sin^3 \vartheta d\vartheta = -\frac{1}{3} (2 + \sin^2 \vartheta) \cos \vartheta$$

ist, d. h.

$$\int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta = \frac{4}{3},$$

so wird

$$q = \frac{8}{3} \frac{\pi^4}{\lambda^3} e_0^2 l^2 \quad (42)$$

Dieser Betrag der ganzen während der Zeit  $\frac{T}{2}$  ausgestrahlten Energie berechnet sich für unseren Erreger nach den obigen Daten zu 13 200 Erg.

Die elektrische Energie des Erregers ist nach Formel (106) des I. Kapitels auf S. 93 ursprünglich

$$E_0 = 2 \cdot \frac{1}{2} e_0 \cdot V_0,$$

<sup>1)</sup> Diese Formel stimmt mit der von Hertz in Wied. Ann. 36, S. 12 gegebenen überein, da das hier gebrauchte  $T$  und  $\lambda$  doppelt so groß als die von Hertz unter diesem Buchstaben verstandenen Größen sind.

falls  $V_0$  das Anfangspotential auf einem der Konduktoren  $A_1, A_2$  des Erregers bedeutet. Da  $V_0 = e_0 : R'$ , falls  $R'$  den Radius der kugelförmigen Konduktoren  $A$  bezeichnet, so ist also

$$E_0 = e_0^2 : R'.$$

Das Verhältnis der während einer halben Periode ausgestrahlten Energie zur ursprünglich vorhandenen ist daher

$$\frac{q}{E_0} = \sigma = \frac{8}{3} \cdot \frac{\pi^4}{\lambda^3} l^2 R' : 1. \quad (43)$$

Für unseren Hertzschen Erreger berechnet sich dieses Verhältnis zu 0,352, erreicht also einen sehr bedeutenden Wert.

Wegen dieser Energieabgabe durch Strahlung kann der Erreger nur dann Schwingungen konstanter Amplitude ausführen, wenn ihm in genügendem Maße Energie für jede Schwingung wieder zugeführt wird. Ohne diese Energiezufuhr, welche bei den angestellten Experimenten tatsächlich fehlt, muß daher die Energie des Erregers schnell abnehmen. Die Dämpfung seiner Schwingungen wird daher nicht nur durch den galvanischen Widerstand der primären Leitung und der Funkenstrecke herbeigeführt, d. h. durch die Umsetzung in Joulesche Wärme, sondern zum großen Teil auch durch Strahlung. Planck bezeichnet diesen letzteren, durch Abwanderung der Energie bedingten Teil der Dämpfung als die konservative Dämpfung im Gegensatz zu der durch Energieumwandlung bedingten konsumtiven Dämpfung<sup>1)</sup>. Wir wollen noch berechnen, wie groß das logarithmische Dekrement der Schwingung (siehe Kapitel VIII, S. 454) sein würde, wenn nur die Strahlung als dämpfende Ursache in Betracht käme.

Nach der ersten halben Schwingung ist die Energie von  $E_0$  auf  $E_0 - q$  gesunken, hat sich also vermindert im Verhältnis  $\frac{E_0 - q}{E_0}$ . Während der zweiten halben Schwingung wird die zu Beginn dieser halben Schwingung vorhandene Energie  $E_0 - q$  wieder in demselben Verhältnis geschwächt werden. Nach einer ganzen Schwingung wird also nur noch die Energie  $E_1 = \frac{(E_0 - q)^2}{E_0}$  vorhanden sein. Das Dämpfungsverhältnis der Energie ist also  $\frac{E_0}{E_1} = \frac{E_0^2}{(E_0 - q)^2}$ . Da die Energie in den Momenten maximaler Ladung dem Quadrat der Ladung oder dem Quadrat des Potentials proportional ist, so ist das Dämpfungsverhältnis für die Amplitude der Potentialschwingung gleich der Wurzel der obigen Größe, d. h.  $= \frac{E_0}{E_0 - q}$  und das logarithmische Dekrement  $\gamma$  der Potential-

<sup>1)</sup> M. Planck, Wied. Ann. 60, S. 577, 1897.

schwingung würde  $= -\log\left(1 - \frac{q}{E_0}\right)$  sein. Ist  $\frac{q}{E_0}$  klein, so kann das logarithmische Dekrement direkt  $= \frac{q}{E_0}$  gesetzt werden; d. h. es ist

$$\gamma = \frac{8\pi^4 l^2 R'}{3\lambda^3} \cdot 1).$$

In unserem Falle ist  $\frac{q}{E_0}$  nicht klein genug, als daß man in dieser Weise rechnen dürfte. Der genaue Wert von  $\gamma$  würde in unserem Falle 0,433 sein.

## 9. Die Verteilung der Kraft in der näheren Umgebung des Erregers. Graphische Darstellungen.

Führt man die periodische Funktion nach (41) für  $f$  in die Gleichung (39) ein, wobei wir zur Abkürzung

$$2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right) = \omega \quad \text{und} \quad \frac{2\pi r}{\lambda} = x$$

setzen wollen, so nehmen die Gleichungen (39) die Form an:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{G}_t &= \frac{e_0 l \sin \vartheta}{r^3} x (x \sin \omega - \cos \omega) \\ \mathfrak{G}_\vartheta &= -\frac{e_0 l \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta}{r^3} [(3 - x^2) \sin \omega + 3x \cos \omega] \\ \mathfrak{G}_x &= -\frac{e_0 l}{r^3} [(2 - 3 \sin^2 \vartheta + x^2 \sin^2 \vartheta) \sin \omega + (2 - 3 \sin^2 \vartheta) x \cdot \cos \omega] \end{aligned} \right\} (44)$$

Wir haben in Abschnitt 7 drei Gebiete unterschieden, ein Gebiet in der unmittelbaren Nähe des Erregers, ein Gebiet in sehr großer Entfernung und ein dazwischenliegendes. Für die Scheidung dieser Gebiete kommt es nicht auf den absoluten Wert von  $r$ , sondern, wie die Formeln (44) erkennen lassen, auf den absoluten Wert von  $x$ , d. h. auf das Verhältnis von  $r$  zur Wellenlänge  $\lambda$  an. Ist  $x$  sehr klein, d. h. beschränkt man sich auf ein Gebiet, dessen Dimensionen klein sind gegen die Wellenlänge, die der Erreger ausstrahlt, so ist

<sup>1)</sup> Die Formel entspricht in speziellerer Fassung einer allgemeinen von M. Planck an der genannten Stelle gegebenen Formel für das Strahlungsdekrement eines geradlinigen elektrischen Oszillators.

$$\mathfrak{G}_t = - \frac{e_0 l \sin \vartheta}{r^2} \frac{2\pi}{\lambda} \cos \omega,$$

$$\mathfrak{G}_\varrho = - \frac{3 e_0 l \sin \vartheta \cos \vartheta}{r^3} \sin \omega,$$

$$\mathfrak{G}_z = - \frac{e_0 l}{r^3} (2 - 3 \sin^2 \vartheta) \sin \omega.$$

Die magnetische und die elektrische Kraft variieren periodisch mit der Zeit, sind aber um  $\frac{\pi}{2}$  oder eine viertel Schwingungsdauer gegeneinander verschoben, entsprechend dem Umstande, daß der Maximalwert des Stromes eintritt, wenn die Ladung der Konduktoren, also auch die elektrische Kraft, Null ist. Ist  $x$  dagegen so groß, daß nur die Glieder mit  $x^2$  berücksichtigt zu werden brauchen, so lauten die Gleichungen:

$$\mathfrak{G}_t = + \frac{e_0 l \sin \vartheta}{r} \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \sin \omega,$$

$$\mathfrak{G}_\varrho = + \frac{e_0 l \sin \vartheta \cos \vartheta}{r} \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \sin \omega,$$

$$\mathfrak{G}_z = - \frac{e_0 l \sin^2 \vartheta}{r} \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \sin \omega.$$

Hier erreichen magnetische und elektrische Kraft gleichzeitig ihr Maximum und gehen gleichzeitig durch Null hindurch. In dem mittleren Gebiet muß daher eine allmähliche Verschiebung der Phasendifferenz zwischen der magnetischen und der elektrischen Kraft stattfinden. Ebenso erleiden die beiden Komponenten der elektrischen Kraft in diesem Gebiete mit wachsendem  $r$  fortschreitende Phasenverschiebungen. Denn wenn man die Ausdrücke (44) für  $\mathfrak{G}_t$ ,  $\mathfrak{G}_\varrho$ ,  $\mathfrak{G}_z$  auf die Form  $A \cdot \sin(\omega + \alpha)$  bringt, so ist die Phasengröße  $\alpha$  eine von  $r$  abhängige Funktion. Würde man daher als Maß für die Ausbreitungsgeschwindigkeit des elektromagnetischen Vorganges den Abstand zweier Punkte auf dem Radius Vektor  $r$  nehmen, für die die  $\sin$ -Funktion gleiche Werte hat, während sie zwischen ihnen einmal alle ihre möglichen Werte durchläuft, so würde diese Strecke in sehr großer Entfernung vom Erreger allerdings gleich der Wellenlänge  $\lambda$  sein; in dem mittleren Gebiet dagegen würde diese Strecke größer als  $\lambda$  sein, was einer Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $> c$  entsprechen würde. Im innersten Gebiet würde die Fortpflanzungsgeschwindigkeit wieder  $c$  sein; aber hier, wo die Dimensionen klein gegen  $\lambda$  sind, kommt sie überhaupt nicht zur Wahrnehmung. Während also, wie wir oben in Abschnitt 7 sagten, die Einzelwirkungen, aus deren Summe sich die magnetische Kraft und die Komponenten der elektrischen Kraft zusammensetzen, sich jede für sich mit der Geschwindigkeit  $c$  ausbreiten, gilt das gleiche nicht für die Gesamtwirkung. Dies rührt daher,

daß die Einzelwirkungen nicht alle die gleiche Phase haben, sondern eine um  $\frac{\pi}{2}$  gegen die andere verschoben ist, und daß außerdem die Amplitude der Einzelwirkungen in verschiedener Weise von  $r$  abhängt.

Aus dem ersteren Umstande folgt für das mittlere Gebiet eine weitere Eigentümlichkeit des Verhaltens der elektrischen Kraft. In demselben Punkte haben  $\mathcal{E}_\rho$  und  $\mathcal{E}_z$  verschiedene Phasen:

$$\mathcal{E}_\rho = -B \sin(\omega + \beta),$$

$$\mathcal{E}_z = -C \sin(\omega + \gamma).$$

Daher wird die resultierende Kraft während des Verlaufes einer Schwingung im allgemeinen nicht Null; sondern die Kraft dreht sich in der  $\rho Z$ -Ebene in der Zeit einer Schwingungsdauer einmal herum und variiert dabei in ihrer Größe. Stellt man die resultierende Kraft nach Größe und Richtung für verschiedene Zeitpunkte durch eine vom Aufpunkt ausgehende Strecke dar, so liegen die Endpunkte dieser Strecken auf einer Ellipse. In gewissen Punkten des Feldes geht diese Ellipse annähernd in einen Kreis über. Das sind die von Hertz bei seiner experimentellen Untersuchung des Feldes eines geradlinigen Erregers gefundenen Kreisgebiete. Die strengere Rechnung ergibt allerdings, daß Gebiete, in denen die Ellipse genaue Kreisform hätte, nicht existieren; in diesen Gebieten würden nämlich gleichzeitig  $B = C$  und die Phasendifferenz  $\beta - \gamma = \frac{\pi}{2}$  sein müssen. Diese Bedingungen sind aber an

keiner Stelle des Feldes gleichzeitig vollkommen erfüllt, wohl aber an gewissen Stellen ziemlich angenähert, und diese erscheinen dann einer nicht allzu genauen Beobachtung in der von Hertz beschriebenen Form als Stellen, an denen die elektrische Kraft keinerlei Richtung besitzt.

Um von dem komplizierten Verlauf der Kraft in diesem mittleren Gebiete eine Vorstellung zu geben und zu zeigen, wie sich die fortschreitenden Wellen des dritten Gebietes (für sehr große  $r$ ) aus den Vorgängen in der unmittelbaren Umgebung des Erregers entwickeln, hat sich Hertz der graphischen Methode bedient. Er hat für gewisse Momente der Schwingung den augenblicklichen Verlauf der elektrischen Kraftlinien gezeichnet. Die Gleichung der elektrischen Kraftlinien ist gegeben durch:

$$\mathcal{E}_z d\rho - \mathcal{E}_\rho dz = 0.$$

Benutzt man für  $\mathcal{E}_z$  und  $\mathcal{E}_\rho$  die Ausdrücke (24) und (25), so geht (44) über in

$$\rho dQ + Q d\rho = 0$$

und unter Berücksichtigung von (29) in

$$\rho \frac{\partial \Pi}{\partial \rho} = \text{Konst.} \quad (45)$$

Setzt man hier für  $\Pi$  den Wert (34) und dann für  $f$  den Wert (41) ein, so erhält man als Gleichung der elektrischen Kraftlinien den Ausdruck:

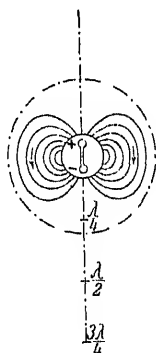
$$e_0 l \sin^2 \vartheta \left( \frac{\sin \omega}{r} + \frac{2\pi}{\lambda} \cos \omega \right) = \text{Konst.} \quad (46)$$

Die auf Grund dieser Beziehung von Hertz gezeichneten Bilder der Kraftverteilung geben wir in den nachstehenden Figuren in derjenigen Gestalt wieder, die ihnen J. Zenneck in seinem Buche gegeben hat<sup>1)</sup>. Zur Zeit  $t = 0$  ist die Ladung des Erregers und damit die elektrische Kraft gleich Null. Mit wachsender Zeit soll sich nun die obere Kugel des Erregers positiv, die untere negativ laden<sup>2)</sup>. Dann treten in zunehmender Anzahl elektrische Kraftlinien aus der oberen Kugel aus und ziehen sich nach der unteren hinunter (Fig. 57). Zur Zeit  $\frac{T}{4}$  hat diese Erfüllung des umgebenden Raumes mit elektrischen Kraftlinien ihr Maximum erreicht (Fig. 58). Von nun an ziehen sich die Kraftlinien, indem die Ladungen zurückfließen, wieder in die Erregerkugeln hinein. Aber Fig. 59 zeigt, wie sich dabei ein Teil dieser Kraftlinien abschnürt und schließlich, nachdem zur Zeit  $\frac{T}{2}$  der Erreger wieder ungeladen geworden ist, als selbständiges Gebilde von ringförmiger Gestalt zurückbleibt (Fig. 60). In der nächsten halben Schwingungsperiode wiederholt sich der Vorgang unter entgegengesetzter Ladung des Erregers (Fig. 61—64). Kraftlinien treten jetzt aus der unteren Kugel aus und erfüllen den Raum, indem sie sich nach der oberen Kugel hinüberziehen. Während sie sich ausbreiten und den Raum in gleicher Weise, wie die zuerst gebildeten, erfüllen, wandern die Reste dieser vor ihnen her in den Raum hinaus. Während der letzten Hälfte dieser zweiten Halbschwingung schnürt sich abermals ein Wulst ringförmig geschlossener Kraftlinien, von entgegengesetztem Umlaufsinne wie die ersten, vom Erreger ab und wandert im folgenden hinter dem ersten Ringe her in den Raum hinaus. Diese Zeichnungen geben ein anschauliches Bild davon, wie die Strahlung des Erregers zustande kommt. Um die Größenverhältnisse beurteilen zu können, ist als Maßstab auf der Achse des Erregers die Wellenlänge angegeben. Die Kraftlinien sind aber nicht bis in die unmittelbare Nähe des Erregers ausgezogen, weil die Formeln auf der Annahme beruhen, daß die Größe des Dipols unendlich klein sei gegen die Wellenlänge, während

<sup>1)</sup> J. Zenneck, Elektrom. Schwingungen und drahtlose Telegraphie, S. 748 u. 749.

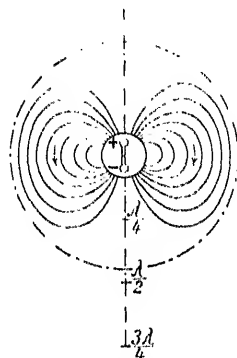
<sup>2)</sup> Um bei dieser Annahme mit den Formeln (44) in Uebereinstimmung zu bleiben, würden wir das Vorzeichen von  $\mathfrak{E}_\varrho$  und  $\mathfrak{E}_z$  in jenen Formeln umzukehren haben.

der Erreger in Wirklichkeit endliche Dimensionen im Verhältnis zu  $\lambda$  besaß. Die Zeichnungen entsprechen ferner in doppelter Beziehung den wirklichen Verhältnissen nicht. Erstens ist angenommen, daß die Schwingungen sich in unverminderter Stärke wiederholen, während sie



$$t = \frac{t}{8} T$$

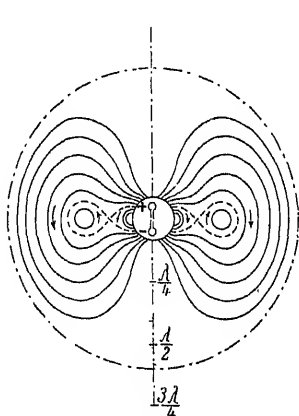
Fig. 57.



$$t = \frac{t}{4} T$$

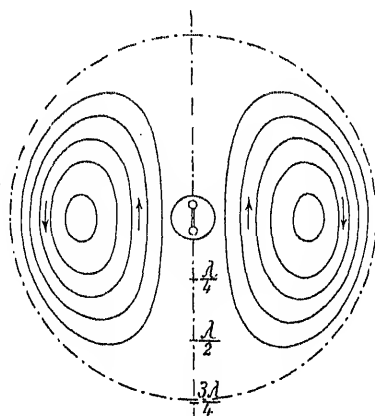
Fig. 58.

in Wahrheit gedämpft sind. Entsprechende Zeichnungen des Kraftlinienverlaufs unter Berücksichtigung dieses Umstandes sind von K. Pearson und Miß A. Lee veröffentlicht worden<sup>1)</sup>. Zweitens aber ist weder in



$$t = \frac{3}{8} T$$

Fig. 59.



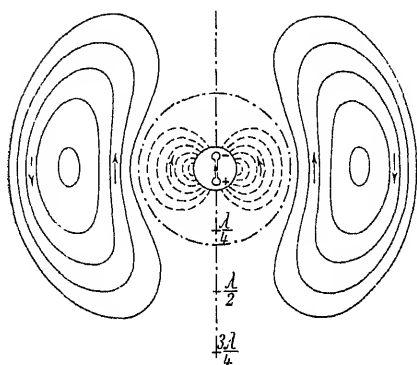
$$t = \frac{1}{2} T$$

Fig. 60.

den obigen Rechnungen noch in den Zeichnungen auf den Anfangszustand, von dem aus der oszillatorische Vorgang einsetzt, Rücksicht genommen.

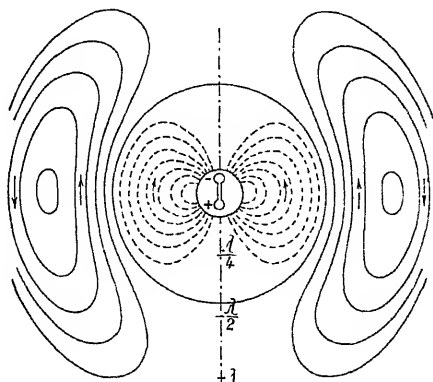
<sup>1)</sup> K. Pearson und Miß A. Lee, Philos. Trans. of the R. Soc. of London. Series A, 193, S. 159, 1900.

Die Lösung entspricht also streng genommen einem stationären Zustande, wie er sich bei ungedämpften Schwingungen erst längere Zeit nach Beginn der Schwingung einstellen würde. Nun ist der Anfangszustand



$$t = \frac{5}{8} T$$

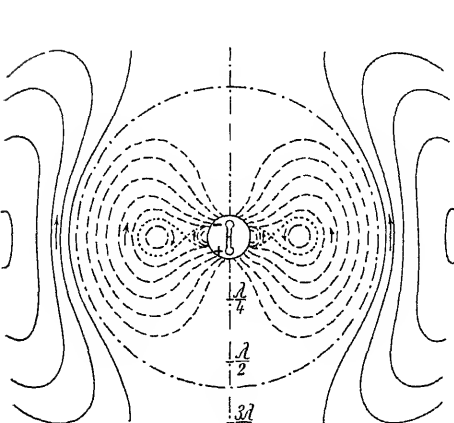
Fig. 61.



$$t = \frac{3}{4} T$$

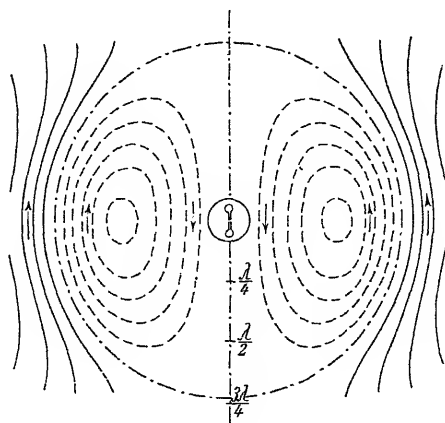
Fig. 62.

dadurch charakterisiert, daß die Erregerkugeln entgegengesetzt geladen sind; das plötzliche Auftreten des Funkens leitet die Entladung ein.



$$t = \frac{7}{8} T$$

Fig. 63.



$$t = T$$

Fig. 64.

Zu Beginn der Schwingung besteht also im umgebenden Raum das elektrostatische Feld, das diesen Ladungen entspricht. Wie die Zeichnungen von Pearson und Lee abgeändert werden müssen, wenn die Welle von diesem Anfangszustande aus in den vom elektrostatischen



Felde erfüllten Raum hinein fortschreitet, ist von Love <sup>1)</sup> erörtert und ebenfalls in Zeichnungen dargestellt worden <sup>2)</sup>.

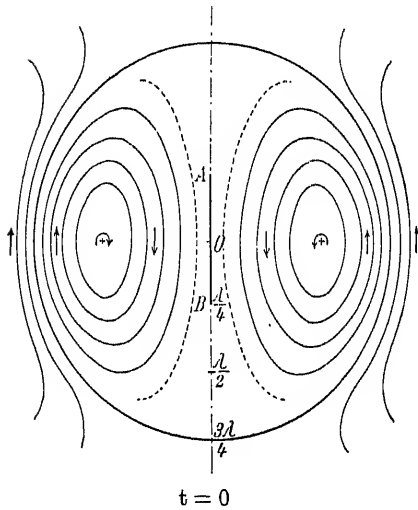


Fig. 65.

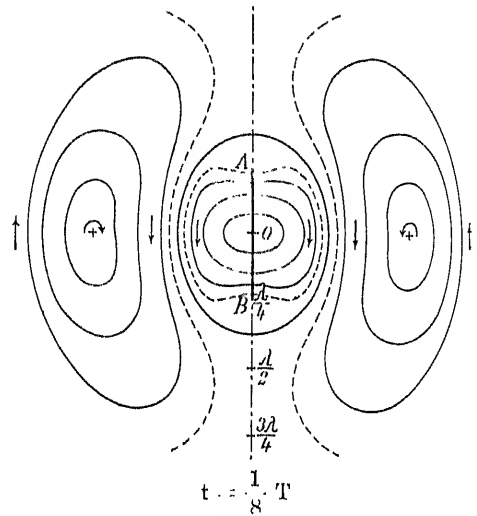


Fig. 66.

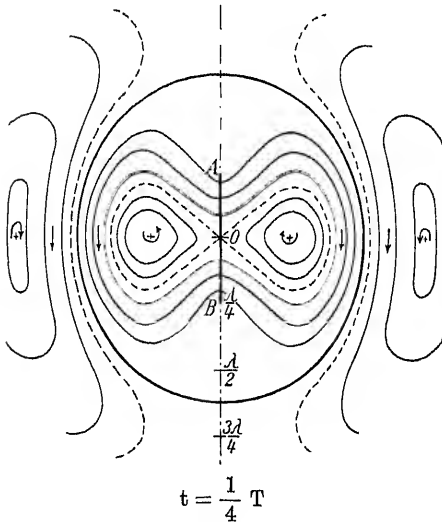


Fig. 67.

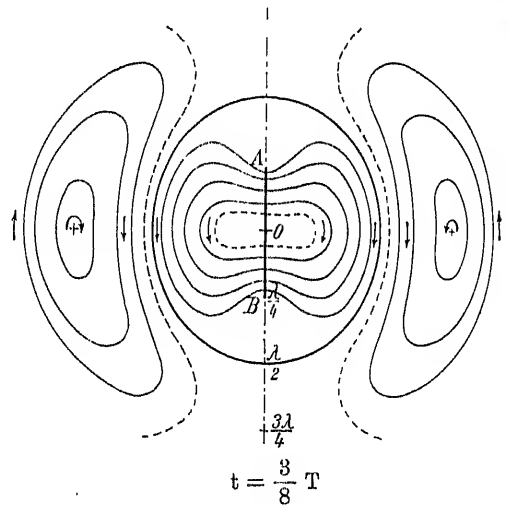


Fig. 68.

Die von Hertz aufgestellte Lösung der Maxwellschen Gleichungen entspricht einem schwingenden Dipol, der sich angenähert durch die

<sup>1)</sup> A. E. H. Love, Proc. of the R. Soc. of London 74, S. 73, 1904.

<sup>2)</sup> Hinsichtlich der genaueren Diskussion der Eigenschaften des Feldes eines Hertzischen Erregers sei auch noch auf M. Brillouin, Propagation de l'électricité, Paris 1904, S. 290 ff., hingewiesen.

Entladung zweier entgegengesetzt geladener Kapazitäten durch eine kurze Funkenstrecke hindurch verwirklichen läßt. Die vollständige Durchführung eines anderen Spezialfalles ist von M. Abraham<sup>1)</sup> gegeben worden. Er hat Lösungen des Maxwellschen Gleichungssystems aufgestellt, die in großer Entfernung ebenfalls von einem Erreger forteilende Wellen darstellen, die aber am Ausgangsorte der Bedingung genügen, daß die elektrischen Kräfte auf der Oberfläche eines langgestreckten Rotationsellipsoides senkrecht stehen. Indem er das Ellipsoid so gestreckt annimmt, daß das Quadrat des Quotienten aus der kleinen Halbachse und dem halben Abstand der Brennpunkte verschwindend klein ist, gelangt er zu dem Ausdrucke für die elektrischen Wellen, die von einem stabförmigen Erreger ausgesandt werden. Nach den Formeln von Abraham hat F. Hack<sup>2)</sup> den Verlauf der elektrischen Kraftlinien in der Umgebung eines schwingenden stabförmigen Leiters in derselben Weise gezeichnet, wie Hertz für den schwingenden Dipol. Es ist lehrreich, diese beiden Fälle miteinander zu vergleichen. Wir geben daher in Fig. 65—68 die von Hack entworfenen Bilder.

Hier können, entsprechend der vollständigen Lösung für einen Leiter von endlicher Längserstreckung, die Kraftlinien bis an den stabförmigen Leiter heran gezeichnet werden. Man sieht, wie die beiden Hälften des Leiters sich entgegengesetzt laden, während die Mitte dauernd neutral bleibt. Hier, in der unmittelbaren Nähe des Erregers weichen die Formen der Kraftlinien in charakteristischer Weise von denen des Hertzschen Dipols ab, während in größeren Abständen, für die abgeschwächten Kraftlinien, der Verlauf fast ganz der gleiche ist wie bei Hertz. Aber die Abrahamsche Lösung gibt nicht bloß die Gleichungen für die magnetischen und elektrischen Kräfte, sondern sie ergibt zugleich die Beziehung zwischen der Schwingungsdauer des Erregers und seiner Dimension, eine Beziehung, die in der Hertzschen Lösung für den Dipol nicht enthalten war. Wir können die Abrahamsche Theorie hier nicht entwickeln, sondern müssen uns begnügen, ihre Resultate kurz anzugeben. Danach besitzt ein stabförmiger Leiter eine Grundschwingung, deren Schwingungsdauer, wenn  $l$  die Stablänge bedeutet, 
$$= \frac{2l}{c},$$
 deren Wellenlänge also gleich der doppelten Stablänge ist

(vgl. S. 527). Aber die Theorie lehrt, daß für einen solchen Leiter auch eine unendliche Zahl von nahezu harmonischen Oberschwingungen möglich ist. Die obigen Zeichnungen gelten für den Fall der Grundschwingung. Hier ist die Mitte ein Knoten, die Enden sind Bäuche der Potentialschwingung, während der Strom an den Enden gleich Null,

<sup>1)</sup> M. Abraham, Dissert., Berlin 1897; Wied. Ann. **66**, S. 435, 1898.

<sup>2)</sup> F. Hack, Ann. der Physik (4) **14**, S. 539, 1904.

in der Mitte am größten ist. Ebenso ist es bei allen ungeradzahligem Eigenschwingungen. Bei ihnen teilt sich der Stab immer so in schwingende Unterabteilungen, daß symmetrisch liegende Punkte des Leiters immer entgegengesetztes Vorzeichen ihrer Ladung haben und die magnetischen Kräfte in zwei symmetrisch zur Aequatorebene gelegenen Punkten immer gleich und von gleichem Vorzeichen sind. Bei der ersten Oberschwingung dagegen und ebenso bei allen geradzahligem Teilschwingungen sind die magnetischen Kräfte in Punkten, die symmetrisch zur Aequatorebene liegen, entgegengesetzt gleich und die elektrischen Ladungen symmetrisch liegender Punkte des Leiters besitzen gleiches Vorzeichen. Daher kommt es, daß bei den geradzahligem Teilschwingungen die magnetische Kraft in der Aequatorebene immer gleich Null ist, und daß in dieser Ebene von den geradzahligem Teilschwingungen überhaupt keine fortschreitenden Wellen erregt werden. Das ist wichtig zu beachten; denn es folgt daraus, daß man das Vorhandensein dieser Teilschwingungen durch Messungen in den Aequatorialebenen überhaupt nicht feststellen kann. In der Abhandlung von Hlack finden sich Zeichnungen des Kraftlinienverlaufes auch für die erste und die zweite Oberschwingung. — Auch das Strahlungsdekrement (siehe Abschnitt 8) hat Abraham für den stabförmigen Leiter berechnet. Es ist für alle Teilschwingungen proportional der Größe

$$\epsilon = \frac{1}{4 \log \left( \frac{l}{b} \right)},$$

wenn  $l$  die Stablänge,  $b$  den Radius des Querschnittes bedeutet. Je kleiner also  $b$ , je dünner der Stab ist, um so geringer ist die Dämpfung durch die Ausstrahlung.

## 10. Stehende elektromagnetische Wellen.

In den vorangehenden Abschnitten 7—9 sind nur die vom Erreger ausgehenden Wellen berücksichtigt, indem für  $\Pi$  in der Formel (34) nur die Funktion  $f_1$  angenommen wurde. Wird die Homogenität des den Erreger umgebenden Luftraumes durch irgendeinen eingelagerten Körper gestört, z. B. durch eine große Metallwand, so tritt an der Oberfläche dieses Körpers eine partielle Reflexion der elektromagnetischen Wellen ein, so daß dann für  $\Pi$  in der Formel (34) auch die Funktion  $f_2$  auftritt.

Die Gesetze dieser Reflexion, d. h. des Wertes der Funktion  $f_2$ , sind zu erhalten, wenn man auch für den eingelagerten Körper, den wir kurz den „Spiegel“ nennen wollen, die Hauptgleichungen aufstellt, wie sie das System (20), (21) der S. 420 für den den Erreger um-

gebenden Isolator gibt. Die Integrale der sämtlichen aufgestellten Differentialgleichungen müssen mit den stets bestehenden Grenzbedingungen verträglich sein, daß beim Durchgang durch die Oberfläche des „Spiegels“ die Tangentialkomponenten der elektrischen und der magnetischen Kraft sich stetig ändern.

Wir wollen aber, um zunächst die Besprechung der Hertzschen Versuche fortzusetzen, diesen strengen Weg zur Ableitung der Reflexionsgesetze vorläufig nicht einschlagen. Wir wollen uns vielmehr mit einer einfachen Ueberlegung behelfen, indem wir von der Tatsache ausgehen, daß die spezifische Leitfähigkeit der Metalle außerordentlich groß ist. Nehmen wir sie als unendlich groß an, so können wir ohne speziellere Rechnungen einsehen, daß in diesem Falle die ganze Energie der einfallenden Welle reflektiert werden muß.

Betrachten wir nämlich den besonders einfachen Fall, daß ebene Wellen senkrecht auf einen unendlich großen Metallsiegel auftreffen, wie er experimentell zu verwirklichen ist, wenn man einen Metallsiegel, der groß gegen die Wellenlänge der vom Erreger ausgesandten Wellen ist, senkrecht zu dessen Aequatorebene in großem Abstand vom Erreger aufstellt. Die elektrische Kraft liegt dann parallel zur Oberfläche des Spiegels. Dieselbe muß sich also stetig aus dem Luftraum in das Innere des Metalls fortsetzen. In einem Metall, dessen Leitfähigkeit unendlich groß ist, muß aber die elektrische Kraft unendlich klein sein, weil eine endliche elektrische Kraft im Metall nach dem Ohmschen Gesetz elektrische Ströme von unendlich großer Dichtigkeit hervorrufen würde. Daher muß also auch die elektrische Kraft im Luftraum an der Spiegeloberfläche unendlich klein sein, d. h. zu Null abnehmen, wenn die Leitfähigkeit des Spiegels ins Unendliche wächst.

Nun ist nach (39') die elektrische Kraft  $\mathcal{E}_z$  in der Aequatorebene bei großem  $r$ :

$$\mathcal{E}_z = \frac{f_1'' + f_2''}{r},$$

falls

$$\Pi = \frac{1}{r} [f_1 (r - ct) + f_2 (r + ct)]$$

gesetzt wird. Wenn also  $\mathcal{E}_z$  am Spiegel verschwinden soll, so ergibt das:

$$f_1'' = -f_2'',$$

d. h. die Amplitude der einfallenden elektrischen Welle  $\frac{f_1''}{r}$  ist der Amplitude der reflektierten elektrischen Welle  $\frac{f_2''}{r}$  entgegengesetzt gleich,

die Intensität (Energie) der einfallenden elektrischen Welle ist daher gleich der Intensität (Energie) der reflektierten elektrischen Welle.

Hieraus ergibt sich nach den oben S. 437 abgeleiteten allgemeinen Sätzen, daß auch die Intensität der reflektierten magnetischen Welle gleich der der einfallenden magnetischen Welle sein muß, daß jedoch die magnetische Kraft  $\mathfrak{H}_t$  ohne Umkehr der Richtung ihrer Amplitude reflektiert wird. Man kann dieses Resultat auch sofort aus der für  $\mathfrak{H}_t$  gültigen Relation (31), S. 537, ableiten.

Sendet der Erreger periodische, ungedämpfte Schwingungen aus, so ist zu setzen:

$$f_1(r - ct) = A_1 \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} \right),$$

$$f_2(r + ct) = A_2 \sin \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{r}{\lambda} \right) + \Delta \right],$$

$$\lambda = Tc.$$

Befindet sich der Spiegel im Abstand  $r = D$  vom Erreger, so ist die Phase der einfallenden Welle  $f_1$  am Spiegel, d. h. für  $r = D$ , gegeben durch  $2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{D}{\lambda} \right)$ , die der reflektierten Welle  $f_2$  durch  $2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{D}{\lambda} \right) + \Delta$ . Es ist daher  $4\pi \frac{D}{\lambda} + \Delta$  die durch Reflexion herbeigeführte Phasenänderung der Wellen. Setzt man dieselbe gleich  $\delta$ , d. h. setzt man

$$\Delta = \delta - 4\pi \frac{D}{\lambda},$$

so wird am Spiegel:

$$f_1 = A_1 \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{D}{\lambda} \right), \quad f_2 = A_2 \sin \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{D}{\lambda} \right) + \delta \right].$$

Man kann daher der für  $r = D$  stattfindenden Beziehung  $f_1'' = -f_2''$  oder  $f_1 = -f_2$  genügen durch

$$A_1 = -A_2, \quad \delta = 0, \quad \text{oder durch } A_1 = A_2, \quad \delta = \pi.$$

In jedem Falle ist der Ausdruck für die reflektierte Welle gegeben durch

$$f_2 = -A_1 \sin \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{r}{\lambda} \right) - 4\pi \frac{D}{\lambda} \right].$$

Verlegt man den Anfangspunkt der Zeit  $t$ , indem man setzt:

$$\frac{t}{T} - \frac{D}{\lambda} = \frac{t'}{T},$$

$$f_1 = A_1 \sin \left( 2\pi \frac{t'}{T} + 2\pi \frac{D-r}{\lambda} \right).$$

$$f_2 = -A_1 \sin \left( 2\pi \frac{t'}{T} - 2\pi \frac{D-r}{\lambda} \right),$$

d. h.

$$f_1 + f_2 = 2A_1 \cos 2\pi \frac{t'}{T} \sin 2\pi \frac{D-r}{\lambda}.$$

Mit dieser Größe muß nun die elektrische Kraft  $\mathcal{E}_z$  proportional sein, da  $\mathcal{E}_z$  durch  $(f_1'' + f_2'') : r$  gegeben ist. Diese Größe stellt aber nicht mehr eine fortschreitende, sondern eine stehende Welle dar. Denn die zeitliche Schwankung dieses Ausdruckes erfolgt an allen Punkten gleichzeitig in gleicher Phase, während die Amplitude dieses periodischen Vorganges von Punkt zu Punkt variiert. Es bilden sich also stehende Wellen der elektrischen Kraft aus, deren Knoten im Spiegel selbst ( $r = D$ ) liegen und in Abständen vor dem Spiegel, welche Vielfache von  $\frac{1}{2} \lambda$  sind. An denselben Stellen müssen nach den allgemeinen auf S. 437 erhaltenen Resultaten die Bäuche der magnetischen Kraft liegen.

Wenn der Erreger nicht ungedämpfte periodische Schwingungen aussendet, so bilden sich auch nicht stehende Wellen im strengen Sinne des Wortes aus, d. h. es gibt (außer am Spiegel selbst) nicht Stellen im Luftraum, an welchen dauernd die elektrische oder die magnetische Kraft verschwindet. Wie sich in diesem Falle die Resultate abändern, ergibt sich, wenn man  $f_1(r - ct)$  für  $r = 0$  dem vom Erreger ausgesandten Störungszustande anpaßt. — Eine große Annäherung an die Wirklichkeit erzielt man, wenn man annimmt, daß der Erreger gedämpfte Sinus-Schwingungen aussende, d. h., wenn man für  $f_1(r - ct)$  die Formel

$$f_1(r - ct) = A_1 e^{-\gamma \left( \frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} \right)} \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} \right)$$

wählt. Es folgt dann, daß bei nicht zu großer Dämpfung  $\gamma$  in Abständen von  $\frac{1}{2} \lambda$  vor dem Spiegel zwar nicht Nullstellen der elektrischen Kraft, aber wohl ausgeprägte Minima derselben liegen.

Hertz hat nun die Existenz stehender Wellen sehr gut experimentell nachweisen können<sup>1)</sup>, indem ein auf den Erreger abgestimmter kreisförmiger Resonator vor einem großen, ebenen Metallspiegel in geeigneter Lage verschoben wurde. Liegt der Erreger horizontal, der Metallspiegel daher vertikal, so reagiert der Resonator allein auf die elektrische Kraft, wenn seine Fläche  $F$  vertikal, d. h. dem Spiegel parallel, und die Richtung der sekundären Funkenstrecke horizontal steht. Ist

<sup>1)</sup> H. Hertz, Wied. Ann. 34, S. 609, 1888.

dagegen F horizontal und die Richtung der sekundären Funkenstrecke senkrecht zum Spiegel, so zeigt der Resonator den Mittelwert der magnetischen Kraft innerhalb seiner Fläche F an. Befindet sich in dieser Lage der Mittelpunkt von F in einem Knoten der stehenden Welle der magnetischen Kraft, so müssen die Sekundärfunken des Resonators verschwinden. Man kann also die Lage der Knoten der elektrischen und der magnetischen Kraft gesondert untersuchen. In der Tat zeigte sich nun, daß bei Verschiebung des Resonators in einer jener beiden Lagen die Sekundärfunken abwechselnd verschwanden und wieder aufleuchteten, und zwar war die Entfernung zwischen zwei benachbarten Lagen, in welchen die Funken verschwanden, annähernd konstant. Diese Entfernung muß gleich einer halben Wellenlänge der Schwingungen sein.

Die von Hertz erhaltenen Resultate erscheinen noch deshalb etwas unrein, weil die reflektierende Metallwand nicht genügende Größe gegen die Länge der angewandten Wellen besaß. Später sind diese Versuche in großem Maßstabe von Sarasin und de la Rive<sup>1)</sup> wiederholt worden, indem sie zum Teil eine ebene Metallwand von 16 m Länge und 8 m Höhe anwandten, welche sich in einer Entfernung von 15—18 m vom Erreger befand. Es ergab sich eine nahezu völlige Uebereinstimmung zwischen den vorhin abgeleiteten theoretischen Resultaten und den beobachteten Lagen der Knoten der elektrischen, bzw. der magnetischen Kraft. Die Minima der elektrischen Kraft, von denen oft noch drei vor dem Spiegel liegende beobachtet werden konnten, hatten nahezu denselben Abstand voneinander; denselben Abstand besaß das erste vor dem Spiegel liegende Minimum vom Spiegel, so daß im Spiegel selbst ebenfalls ein Knoten der elektrischen Kraft liegt. In der Mitte zwischen den Minima der elektrischen Kraft lagen die Minima der magnetischen Kraft.

Auch in numerischer Hinsicht entsprechen die Resultate der Theorie, nämlich rücksichtlich des Abstandes zweier aufeinanderfolgender Minima, welcher gleich einer halben Wellenlänge der Schwingungen sein muß. So ergab sich, daß ein kreisförmiger Resonator von 75 cm Durchmesser in Resonanz stand mit einem Erreger, dessen Konduktoren A<sub>1</sub>, A<sub>2</sub> 30 cm Durchmesser besaßen, während der Abstand ihrer Mittelpunkte 1,20 m betrug. Die Dicke des Drahtes der Primärleitung betrug 5 mm. Für diesen Erreger ergibt sich nach der Formel (19) auf S. 525 für die halbe Wellenlänge seiner Schwingungen:

$$\frac{1}{2} \lambda = \frac{1}{2} T c = \pi \sqrt{1 R' \lg \frac{1}{R}} = 2,80 \text{ m},$$

da  $l = 90$ ,  $R' = 15$ ,  $R = 0,25$  zu setzen ist. Der Abstand zweier aufeinanderfolgender Knoten betrug im Mittel 3,00 m. Dies stimmt in

<sup>1)</sup> Ed. Sarasin et L. de la Rive, Arch. de Genève (3) 29, S. 358, 442, 1893.

der Tat annähernd mit dem berechneten Werte von  $\frac{1}{2} \lambda$  überein. Daß sich noch eine gewisse Differenz zwischen beiden Werten ergibt, ist nicht zu verwundern, da die Schwingungsdauer des Erregers nicht streng berechnet, sondern durch obige Formel nur als nahezu richtig geschätzt anzusehen ist.

Eine eigentümliche Anomalie beobachtet man gelegentlich an der ersten Halbwelle, indem man findet, daß das erste Maximum der elektrischen Kraft nicht genau in der Mitte zwischen dem Spiegel und dem ersten Minimum liegt, sondern näher am Spiegel. Nach Beobachtungen von K. F. Lindmann<sup>1)</sup> dürfte sich diese Anomalie darauf zurückführen lassen, daß die Schwingungen des Resonators durch die Nähe der Metallwand beeinflusst werden; die Erscheinung ist besonders auffallend, wenn man die elektrische Kraft nicht durch einen kreisförmigen, sondern durch einen geradlinigen Resonator untersucht. Das erklärt sich aus dem Umstande, daß ein geradliniger Resonator die in ihm erregten Schwingungen in viel stärkerem Maße ausstrahlt, als ein kreisförmiger; er ist daher auch einer stärkeren Beeinflussung seiner Schwingungen durch die reflektierende Wand unterworfen.

Noch genauer als die älteren Beobachtungen sind die in jüngster Zeit von M. Hammer ausgeführten Beobachtungen<sup>2)</sup>. Er maß die Lage der Knoten der elektrischen Kraft mit Resonatoren von verschiedener Größe und konnte bis zu 6 und 8 Minima feststellen. Die auf diese Weise ermittelte Wellenlänge verglich Hammer nicht mit den aus den Dimensionen des Resonators zu erwartenden, sondern mit den Wellenlängen, die er für seine Resonatoren durch Resonanzversuche an einem Lecherschen Drahtsystem (s. u.) ermitteln konnte. Er verglich also die Länge von Wellen, die sich frei ausbreiten, mit der Länge an Drähten fortschreitender Wellen für die gleiche Schwingungsdauer. Das Resultat war, daß die ersteren um 1—1,5 % größer waren als die letzteren. Aber diese Differenz rührte vielleicht davon her, daß der reflektierende Schirm ( $3 \times 2,5$  m) nicht groß genug war; denn bei Reflexion an einem kleineren Schirme wurde der Unterschied noch größer. Außerdem erwiesen sich als störend die Reflexionen an den Wänden des nicht allzu großen, geschlossenen Raumes. Die wesentlichste Schwierigkeit aber, die der Ermittlung der genauen Knotenlagen bei allen diesen Versuchen entgegensteht, ist der Umstand, daß die Schwingungen des Oszillators gedämpft sind. Daher sind die Amplituden der aufeinanderfolgenden und nach der Reflexion miteinander interferierenden Wellen nicht gleich, sondern die später ausgesandte Welle ist schwächer als die früher ausgesandte.

<sup>1)</sup> K. F. Lindmann, Ann. d. Physik 7, S. 824, 1902.

<sup>2)</sup> M. Hammer, Dissertation, Halle a. d. S. 1910; Berichte d. d. physik. Gesellschaft. 13, S. 27, 1911.



Dazu kommt ferner die Abnahme der Amplitude mit der räumlichen Ausbreitung der Wellen; denn man hat es bei diesen Versuchen nicht mit ebenen, sondern mit kugelförmig sich ausbreitenden Wellen zu tun. Beide Umstände bewirken, daß die Minima nicht Null sind, und daß die Kraft zu beiden Seiten eines Minimums nicht symmetrisch ansteigt, und machen dadurch die Bestimmung der Knotenlage unsicher.

Aber wenn auch die Erscheinung der stehenden Wellen nicht mit voller Reinheit ausgebildet ist, so läßt sie sich doch immerhin mit Sicherheit nachweisen, und dieser Nachweis ist von großer Bedeutung in theoretischer Hinsicht, da zur Evidenz dadurch gezeigt wird, daß die elektrische Kraft eine endliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit besitzen muß; denn nur dadurch sind Phasendifferenzen der einfallenden und reflektierten Welle möglich.

Der Umstand, daß die Minima in den Knoten nicht genau gleich Null sind, ließe sich allerdings auch dadurch deuten, daß nur ein Teil der Wirkung sich mit endlicher Geschwindigkeit ausbreitet, ein anderer Teil dagegen zeitlos. Eine solche Auffassung aber stünde im Widerspruch mit den Ergebnissen aller sonstigen Versuche, die die Maxwell'sche Theorie der ausschließlich endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektrischen Wirkungen immer wieder bestätigt haben. Auch ist solche Auffassung durchaus überflüssig, da wir in der Dämpfung der Schwingungen einen Umstand haben, der jene Erscheinung im Rahmen der Maxwell'schen Theorie vollkommen ausreichend erklärt.

Die Maxwell'sche Theorie behauptet aber nicht bloß die Endlichkeit der Fortpflanzung, sondern die vollständige Uebereinstimmung dieser Geschwindigkeit mit der Lichtgeschwindigkeit. Wie weit auch diese Forderung der Theorie durch die Beobachtungen bestätigt wird, zeigt die Rechnung auf S. 558. Allein es ist dabei immer zu beachten, daß die Schwingungsdauer nicht beobachtet, sondern nur berechnet ist, und zwar auf Grund von Formeln der älteren Elektrodynamik.

Eine einwandfreie Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen würden wir nur erhalten, wenn wir Wellenlänge und Schwingungsdauer gleichzeitig experimentell bestimmten. Annähernd, aber auch nicht vollständig, ist das Problem von Mac Lean<sup>1)</sup> auf folgendem Wege gelöst worden. Er maß die Wellenlänge eines Oszillators durch Aufsuchen der Knoten und Bäuche der durch Reflexion erzeugten stehenden Welle und fand die Wellenlänge zu 591,5 cm. Die Schwingungsdauer dieses Oszillators durch Photographie des Funkens im rotierenden Spiegel zu messen, war nicht möglich. Aber er maß auf diesem Wege die Schwingungsdauer eines ganz ähnlich gebauten Os-

<sup>1)</sup> Mac Lean, Phil. Mag. (5) 48, S. 115, 1899.

zillators, dessen Dimensionen aber größer waren. Diese fand er zu  $4,12382 \times 10^{-7}$  sek. Da die Kapazität 4-, die Selbstinduktion 109,26mal größer war, als die des ursprünglichen Oszillators, so würde die Schwingungsdauer des letzteren 20,905mal kleiner, also  $= 1,976 \times 10^{-8}$  sek. sein. Dann folgt aus  $591,5/1,976 \times 10^{-8}$  als Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen:  $2,991 \times 10^{10}$  cm/sek.

Wir werden weiter unten Versuche kennen lernen, durch welche ein zuverlässigerer Wert der Fortpflanzungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen erhalten ist.

## 11. Multiple Resonanz.

Bei ihren Versuchen machten Sarasin und de la Rive die Beobachtung, daß, wenn die Dimensionen des Resonators dieselben blieben, während die des Erregers geändert wurden, die durch Verschiebung des Resonators vor dem Spiegel zu ermittelnden Knoten der elektrischen, bzw. magnetischen Kraft ihre Lage im Räume nicht änderten. Dieses Resultat mag zunächst wundernehmen, da durch Abänderung des Erregers die Schwingungsdauer der ausgesandten Wellen geändert wird, und daher auch ihre Wellenlänge. Indes kommt man leicht zum Verständnisse der beschriebenen Erscheinung, wenn man die verschiedene Dämpfung der im Erreger und der im Resonator stattfindenden elektrischen Schwingungen berücksichtigt. Während nämlich die Dämpfung der Schwingungen im Erreger groß sein muß, sowohl wegen der von seinem Strome zu leistenden Arbeit der Erhitzung der primären Funkenstrecke, als auch wegen der Strahlung (cf. oben S. 545), muß die Dämpfung der Schwingungen im Resonator sehr gering sein, weil der Strom in ihm überall eine gute metallische Leitung besitzt (die sekundäre Funkenstrecke wird erst durchschlagen, wenn ihre Enden über die zulässige Maximalspannung geladen sind), und weil der Resonator — wenigstens der geschlossene Resonator, wie ihn Sarasin und de la Rive anwandten — durch Strahlung keine Energie verliert. Jedes Stromsystem nämlich, für welches sämtliche Stromlinien im Endlichen verlaufen, strahlt keine Energie nach unendlich fernen Punkten aus. Denn für diese verschwindet die magnetische Kraft, wie sich sofort aus der S. 238 angegebenen Formel (20) für das Vektorpotential ergibt, und daher verschwindet dort auch nach dem Poyntingschen Satze (S. 427) der Energiefluß.

Nehmen wir nun den extremen Fall an, daß die Dämpfung der Schwingungen des Erregers so stark wäre, daß er überhaupt nur einen Impuls aussendet, so pflanzt sich dieser nach den in Abschnitt 7 gegebenen Formeln mit der Geschwindigkeit  $c$  in den Raum fort. Beim Erreichen der Fläche  $F$  des Resonators wird in ihm eine elektrische

Schwingung einsetzen. Trifft der Impuls bei weiterer Fortpflanzung eine metallische Wand, so wird er an ihr mit Umkehrung seines Vorzeichens reflektiert und trifft nun den Resonator zum zweiten Male. Nennt man den Abstand des Resonators vom Spiegel D, so liegt die Zeit  $t' = \frac{2D}{c}$

zwischen dem ersten und dem zweiten Eintreffen des Impulses am Resonator. Durch das zweite Eintreffen des Impulses wird nun die durch das erste Eintreffen des Impulses erzeugte Schwingung des Resonators am meisten verstärkt, wenn dieselbe nach der Zeit  $t'$  in entgegengesetzter Richtung und Größe verläuft, als vor derselben, d. h. wenn  $t' = \frac{2h+1}{2} T'$  ist, falls  $T'$  die Dauer der Eigenschwingung des Reso-

nators und  $h$  eine ganze Zahl bezeichnet. Dagegen wird die Schwingung im Resonator durch das zweite Eintreffen des Impulses vernichtet, wenn die Schwingung im Resonator nach der Zeit  $t'$  dieselbe Richtung und Größe hat, wie vor derselben, d. h. wenn  $t' = \frac{2h}{2} T'$  ist. Die Sekundärfunken verschwinden daher, falls

$$\frac{2D}{c} = \frac{2h}{2} T', \text{ d. h. } D = \frac{h}{2} T' c$$

ist, dazwischen dagegen, nämlich für

$$\frac{2D}{c} = \frac{2h+1}{2} T', \text{ d. h. } D = \frac{2h+1}{4} T' c$$

nehmen die Sekundärfunken maximale Größen an.  $T'c$  ist die Wellenlänge  $\lambda'$  der Eigenschwingung des Resonators. Die Minima der Sekundärfunken liegen daher in Abständen von  $\frac{1}{2} \lambda'$  vor dem Spiegel, die Maxima dazwischen.

Nach dieser Ueberlegung haben die Dimensionen des Erregers, d. h. die Art des von ihm ausgesandten Impulses, gar keinen Einfluß auf die Größe der Sekundärfunken. In Wirklichkeit beobachtet man nun aber doch einen entschiedenen Einfluß der Dimensionen des Erregers auf die Größe der Sekundärfunken, wie schon im Abschnitt 3 besprochen ist; es sind nämlich entschieden Resonanzwirkungen da, d. h. maximale Sekundärfunken bei bestimmten Dimensionen des Erregers. Diese Erscheinungen können nur durch eine Periodizität der vom Erreger ausgesandten Impulse erklärt werden, nur ist ihre Dämpfung so stark im Vergleich zu der der Resonatorschwingungen, daß die Lage der Minima und Maxima der Sekundärfunken sich immer noch nur nach der Eigenschwingungsdauer des Resonators richtet.

Wenn daher die primäre und die sekundäre Leitung nicht in Resonanz stehen, so ergeben sich bei Verschiebung der letzteren peri-

odisch wechselnde Maxima und Minima der Sekundärfunken, deren Lage sich allein nach den Abmessungen der Sekundärleitung richtet, indes werden diese Maxima und Minima um so ausgeprägter, je mehr sich die primäre und sekundäre Leitung der Resonanz nähern. Dies Verhalten zeigt, daß die Periodizität der Impulse des Erregers sich immerhin noch geltend macht, wenn auch verhältnismäßig schwach, infolge ihrer starken Dämpfung.

In der folgenden Tabelle, welche den Versuchen von Sarasin und de la Rive entnommen ist, gibt die erste Zeile den Abstand  $d_1$  zwischen den Mittelpunkten der Konduktoren  $A_1, A_2$  der Primärleitung an ( $R' = 15$  cm), während die zweite Zeile die zugehörige Länge  $d_2$  der Sekundärfunken in  $\frac{1}{100}$  mm angibt bei einem kreisförmigen Resonator, dessen Fläche  $F$  einen Durchmesser von 75 cm besaß, und welcher sich 1,5 m vor dem reflektierenden Spiegel befand, d. h. in einem Schwingungsbauch der elektrischen Kräfte.

$d_1$	0,84 m	0,90	1,00	1,20	1,40	1,60	1,80	2,00
$d_2$	11	24	47	55	50	29	19	11

Wie man sieht, findet Resonanz zwischen dem Erreger und der Sekundärleitung statt für  $d_1 = 1,20$  m, welches Resultat oben auf S. 558 benutzt wurde.

d	$\frac{1}{2} \lambda'$	$\pi d$
1 m	4,0 m	3,14 m
0,75	3,0	2,35
0,50	2,0	1,57
0,35	1,5	1,10
0,25	1,1	0,78
0,20	1,0	0,63
0,10	0,8	0,31
0,075	0,33	0,24

Die zu verschiedenen kreisförmigen Resonatoren zugehörigen Abstände  $\frac{1}{2} \lambda'$  zweier benachbarter Lagen, in welchen die Längen der Sekundärfunken Minima annehmen, unabhängig von den Dimensionen des Erregers, sind in der obigen Tabelle zusammengestellt. Es bezeichnet  $d$  den Durchmesser der Resonatorfläche  $F$ .  $\pi d$  sollte nach der angegebenen Theorie (cf. oben S. 527) näherungsweise mit  $\frac{1}{2} \lambda'$  übereinstimmen. Die Differenz  $\pi d - \frac{1}{2} \lambda'$  ist auf Kosten der an den Enden der sekundären Funkenstrecke vorhandenen Kapazität zu setzen. Diese

ist bei den von Sarasin und de la Rive benutzten Resonatoren ziemlich beträchtlich gewesen. In der Tat ergibt die letzte Zeile der Tabelle, welche einem von Hertz<sup>1)</sup> angestellten Versuche entnommen ist, bei welchem der Resonator eine ganz kleine Kugel an der Unterbrechungsstelle trug, eine bessere Uebereinstimmung zwischen  $\frac{1}{2} \lambda'$  und  $\pi d$ .

Wenn man bei unverändertem Primärleiter die Knoten der stehenden Wellen mit Hilfe verschiedener Sekundärleiter untersucht, so erhält man also verschiedene Abstände derselben. Diese Erscheinung wurde von Sarasin und de la Rive multiple Resonanz genannt und in der Weise erklärt<sup>2)</sup>, daß der Erreger eine große Mannigfaltigkeit von Wellen verschiedener Schwingungsdauer aussende, daß aber der sekundäre Leiter nur auf diejenige unter diesen Schwingungen reagiere, welche mit ihm in Resonanz stehe.

Die hier vorgetragene Erklärung der Erscheinungen auf Grund der starken Dämpfung der Schwingungen im Erreger und der geringen Dämpfung im nahezu geschlossenen Sekundärleiter rührt von Poincaré<sup>3)</sup> und Bjerknes<sup>4)</sup> her.

Auf Versuche, welche die Richtigkeit dieser Auffassung bestätigen, kommen wir in Abschnitt 22 bei Erörterung der entsprechenden Erscheinungen an den Drahtwellen zurück.

Beide Erklärungen, die von Sarasin und de la Rive und die von Bjerknes, sind im Grunde genommen nicht als wesentlich voneinander verschieden anzusehen, da Sarasin und de la Rive, um Resonanzwirkungen erklären zu können, doch die Grundschiwingung des Erregers als die bei weitem intensivste annehmen müssen, und da man andererseits eine stark gedämpfte periodische Bewegung nach dem Fourierschen Theorem als eine Uebereinanderlagerung von unendlich vielen periodischen Bewegungen verschiedener Schwingungsdauern auffassen kann.

Aus dem letzten Grunde erhellt, daß auch die von Garbasso<sup>5)</sup> angestellten Versuche, in denen nachgewiesen wird, daß ein Komplex von Sekundärleitern der gleichen Periode  $T'$  die Einwirkung des Erregers nur für einen Sekundärleiter von der gleichen Periode  $T'$  abzuschirmen vermag, nicht gegen die Möglichkeit der Auffassung sprechen, daß der Erreger eine stark gedämpfte Sinusschwingung einer einzigen Periode  $T$  aussende.

<sup>1)</sup> H. Hertz, Wied. Ann. **30**, S. 773, 1889.

<sup>2)</sup> Sarasin et de la Rive, Arch. de Genève (3) **23**, S. 113, 1890.

<sup>3)</sup> H. Poincaré, Arch. de Genève (3) **25**, S. 609, 1891. — Elektrizität und Optik, deutsch von Jäger und Gumlich, Berlin 1891, II. Bd., Note V, S. 201.

<sup>4)</sup> V. Bjerknes, Wied. Ann. **44**, S. 92, 1891.

<sup>5)</sup> A. Garbasso, Atti R. Acc. delle Scienze Torino **28**, S. 246, 1893.

## 12. Strahlen elektrischer Kraft.

Unmittelbar nachdem es Hertz geglückt war, zu erweisen, daß sich die Wirkung einer elektrischen Schwingung als Welle in den Raum ausbreitet, stellte er Versuche an, diese Wirkung dadurch zusammenzuhalten und auf größere Entfernungen sichtbar zu machen, daß er den Erreger in die Brennpunktlinie eines größeren zylindrischen Hohlspiegels stellte. Dieser Gedanke mußte ja nach Analogie der in der Optik üblichen Benutzung der Hohlspiegel als fruchtbar erscheinen, und in der Tat kann man sich auf die Analogie mit optischen Erscheinungen hier bei elektrischen Schwingungen durchaus stützen, da die Gesetze ihrer Fortpflanzung ganz die der Lichtwellen sind. Denn nach S. 541 pflanzen sich die elektrischen Schwingungen als Transversalwellen mit endlicher Geschwindigkeit fort, und nach S. 555 werden sie von einem Metallspiegel nahezu total reflektiert, gerade wie die Lichtstrahlen an einem gut polierten Metallspiegel. Auch ergibt sich bei schiefe Einfall der elektrischen Wellen sofort das optische Reflexionsgesetz, daß der Einfallswinkel gleich dem Reflexionswinkel ist, da dieses Gesetz allein damit verträglich ist, daß an der Grenze des Metallspiegels gewisse Grenzbedingungen für die elektrischen bzw. magnetischen Kräfte erfüllt sein müssen (vgl. weiter unten).

Indes schlugen die ersten Versuche von Hertz zur Konzentration der Erregerwirkung durch Hohlspiegel fehl. Dies lag an dem Mißverhältnis, welches zwischen der Länge der benutzten Wellen, 4—5 m, und den Dimensionen bestand, welche dem Hohlspiegel im besten Falle zu geben waren. Ein in der Nähe eines Erregers aufgestellter Metallspiegel kann nämlich unter Umständen die Wirkung des Erregers in dem vor dem Spiegel gelegenen Raume schwächen, nämlich immer dann, wenn die Entfernung des Metallspiegels vom Erreger klein im Vergleich zu der von letzterem ausgesandten Wellenlänge ist. Denn nach den Ueberlegungen der S. 387 induziert eine in einem Drahte stattfindende elektrische Schwingung in einer nahe benachbarten Metallmasse Schwingungen, welche in jedem Momente der erregenden Schwingung gerade entgegengesetzt sind. Die Wirkung der Erregerschwingung in einem entfernten Punkte P muß daher durch die in der Metallmasse induzierte Schwingung geschwächt erscheinen. Es tritt aber dann eine lebhafte Verstärkung der Wirkung in P ein, wenn in der Zeit, welche die elektrische Welle zum Durcheilen der Entfernung zwischen Erreger und Metallspiegel hin und zurück braucht, die Erregerschwingung  $180^\circ$  an Phase gewonnen hat, d. h. wenn jene Entfernung gleich  $\frac{1}{4}$  Wellenlänge der Erregerschwingung ist. Um das Verhalten der magnetischen Kraft brauchen wir uns bei diesen Ueberlegungen nicht zu kümmern,

denn in der Nähe der Primärschwingung überwiegt die elektrische Kraft über die magnetische, da erstere nach S. 540 mit  $\frac{1}{r^3}$ , letztere mit  $\frac{1}{r^2}$  proportional ist.

Eine verstärkende Wirkung des Hohlspiegels ist also erst zu erwarten, wenn der Abstand seiner Brennnlinie vom Scheitel mindestens  $\frac{1}{4} \lambda$  beträgt. Für  $\lambda = 4$  m führt dies aber zu unhandlichen Dimensionen des Spiegels.

Daher mußten zunächst noch kürzere Erregerwellen geschaffen werden. Hertz<sup>1)</sup> stellte diese her, indem er dem Erreger die Gestalt eines zylindrischen Messingkörpers von 3 cm Durchmesser und 26 cm Länge gab, welcher in der Mitte seiner Länge durch eine Funkenstrecke unterbrochen war, deren Polo beiderseits durch Kugelflächen von 2 cm Radius gebildet wurden. In der Nähe der Funkenstrecke mündeten zwei Kupferdrähte D, D', welche mit der Sekundärspule eines Ruhmkorffschen Apparates verbunden wurden (vgl. Fig. 69).

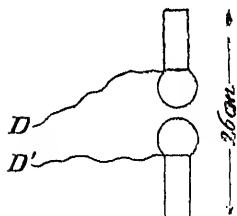


Fig. 69.

Bei der beschriebenen Gestalt des Erregers kann man für die Schwingungsdauer der Wellen nicht mehr die bisher angewandte Formel (19) der S. 525 benutzen, sondern man kommt hier auf eine angenäherte Schätzung der Schwingungsdauer

T, wenn man den Erreger als einen dicken Draht von gleichförmigem Querschnitt betrachtet, der frei (ohne Kapazität) endet. Für seine Grundschwingung ist nach S. 527 u. 553 seine Länge gleich einer halben Wellenlänge, es muß also für die von ihm ausgesandten Wellen näherungsweise sein:

$$\frac{1}{2} \lambda = \frac{1}{2} T c = 26 \text{ cm, d. h. } T = 17 \cdot 10^{-10} \text{ sek.}$$

In Wirklichkeit muß  $\frac{1}{2} \lambda$  und T etwas größer sein wegen der Kapazität der Enden des Erregers. Es ergab sich auch bei Untersuchung der vor einem Metallspiegel sich bildenden stehenden Wellen mit Hilfe eines kreisförmigen Resonators, der mit dem Erreger in Resonanz steht, wenn seine Fläche F einen Durchmesser von 7,5 cm besitzt,  $\frac{1}{2} \lambda$  zu etwa 30 cm, d. h.  $T = 20 \cdot 10^{-10}$  sek.

Diesen Erreger brachte Hertz in die Brennnlinie eines zylindrischen, parabolischen Hohlspiegels aus Zinkblech, dessen Brennweite  $12\frac{1}{2}$  cm

<sup>1)</sup> H. Hertz, Wied. Ann. 36, S. 769, 1889.

betrug. Da dieses nahezu  $= \frac{1}{4} \lambda$  ist, so verstärkt in der Tat ein solcher Spiegel die Wirkung des Erregers bedeutend, indem diese wie ein Bündel Parallelstrahlen in den Raum vor dem Spiegel reflektiert wird in der Richtung der Achse der Parabel. Man kann die Wirkung des Erregers beobachten mit Hilfe eines kleinen Resonators von 7,5 cm Durchmesser, besser jedoch mit Hilfe einer geradlinigen Sekundärleitung, welche in die Brennnlinie eines zweiten, in gleicher Weise konstruierten Hohlspiegels gestellt wird <sup>1)</sup> (vgl. Fig. 70). Diese Sekundärleitung bestand aus zwei geraden Drahtstücken von 50 cm Länge und 5 mm Durchmesser. Die einander zugekehrten Enden besaßen einen Abstand von

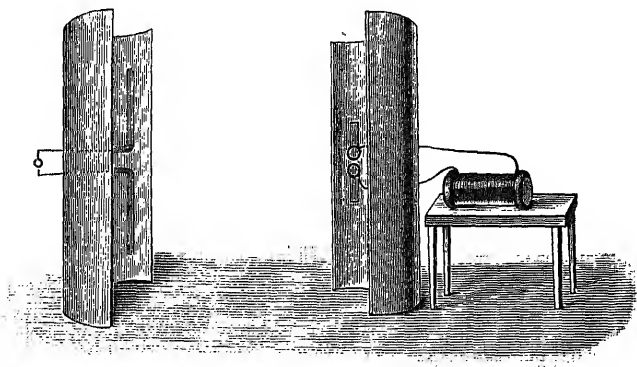


Fig. 70.

5 cm. Von diesen Enden führten zwei dünne Kupferdrähte durch die Wand des Hohlspiegels zu einem hinter ihm befestigten Funkenmikrometer, an welchem elektrische Schwingungen in der Sekundärleitung durch die in ihm auftretenden Sekundärfunken beobachtet werden können. Bei dieser Anordnung der Sekundärleitung ist auf eine Resonanz zwischen ihr und dem Erreger verzichtet. Man hätte zur Erreichung derselben die Länge der beiden Drahtstücke der Sekundärleitung annähernd gleich  $\frac{1}{2} \lambda$ , d. h. gleich 30 cm wählen müssen, vorausgesetzt, daß die dünnen, vom Ende der Sekundärleitung fortführenden Kupferdrähte mit Einschluß der Entladungskugel an der sekundären Funkenstrecke keine merkliche Kapazität besitzen. Uebrigens können sich die Resonanzwirkungen bei einer geradlinigen Sekundärleitung nicht so stark geltend machen wie bei einer nahezu metallisch geschlossenen.

<sup>1)</sup> In der Brennnlinie eines solchen Hohlspiegels ist die elektrische Energie der vom Erreger ausgesandten Wellen bedeutend stärker als außerhalb der Brennnlinie, wie Messungen von J. Klemencic (Wien. Ber. II, 99, S. 725, 1890; Wied. Ann. 42, S. 416, 1891) ergaben.



Denn die Dämpfung der Schwingungen in ersterer muß deshalb weit größer als in letzterer sein, da erstere Energie durch Strahlung verliert, letztere nicht (vgl. oben S. 561).

Mit Hilfe der beschriebenen Anordnung kann man nun leicht das Vorhandensein der vom Erreger ausgesandten elektrischen Kraft in großen Entfernungen (bis zu 20 m) nachweisen. Es läßt sich auch zeigen, daß dieses Bündel Parallelstrahlen elektrischer Kraft analoge Gesetze befolgt, wie ein Bündel optischer Parallelstrahlen.

Zunächst erkennt man das Gesetz der geradlinigen Ausbreitung daran, daß die Sekundärfunken nur erscheinen, wenn die Achsen beider Hohlspiegel ganz oder nahezu zusammenfallen, und daß die Wirkung durch Metallschirme nur aufgehalten wird, falls sie in den Weg des Strahles gestellt werden. Ist der Metallschirm nicht hinlänglich groß gegen die Wellenlänge der im Strahl enthaltenen Wellen, so ist die Schirmwirkung nur unvollständig, eine Erscheinung, die in der Optik unter dem Namen „Beugung der Lichtstrahlen“ bekannt ist.

Ferner kann man das Reflexionsgesetz, daß der Einfallswinkel gleich dem Reflexionswinkel ist, nachweisen, wenn man die Achsen beider Hohlspiegel in einen Winkel gegeneinander stellt und einen ebenen Metallspiegel am Orte des Schnittpunktes beider Hohlspiegelachsen geeignet dreht.

Auch die Brechung der Strahlen elektrischer Kraft nach einem dem optischen analogen Gesetze ist nachzuweisen mit Hilfe eines großen Prismas eines Isolators, z. B. von Pech, welches in den Weg der Strahlen geschoben wird. Hertz wählte ein solches von  $30^\circ$  brechendem Winkel, von 1,5 m Höhe und 1,2 m Seitenbreite. Aus dem Ablenkungswinkel der Strahlen ergibt sich nach bekannten Formeln der Brechungsexponent, d. h. das Verhältnis der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der Wellen in Luft und in dem Isolator. Er ergab sich für das Pechprisma zu 1,69. Sein Quadrat, d. h. die Zahl 2,85, muß nach S. 435 die Dielektrizitätskonstante des Pechs ergeben, was als nahezu richtig anzusehen ist.

Ein eigentümliches Verhalten besitzt ein Gitter paralleler dünner, etwa 2 m langer Kupferdrähte, welche einen gegenseitigen Abstand von etwa 3 cm besitzen. Liegen die Drähte parallel der elektrischen Kraft des Strahles, so reflektieren sie dieselbe nahezu vollständig<sup>1)</sup> und schirmen den Raum hinter sich vollkommen ab. Liegen die Drähte dagegen senkrecht gegen die einfallende elektrische Kraft, so reflektieren sie dieselbe nicht und lassen sie ungehindert hindurch.

<sup>1)</sup> Die Reflexion ist eine regelmäßige (nicht diffuse), wenn die Drähte des Gitters in einer Ebene angeordnet sind. Sein Reflexionsvermögen ist von H. Rubens und

Ohne auf die Theorie<sup>1)</sup> einzugehen, kann man doch leicht die Wirkung des Gitters verstehen, da die elektrische Kraft des Strahles nur dann Leitungsströme im Gitter hervorrufen kann, wenn seine Drähte parallel der Richtung der elektrischen Kraft liegen.

Ein solches Gitter ist sozusagen ein stark kristallinisches Medium, dessen Leitfähigkeit in Richtung der Drähte bei weitem größer ist, als senkrecht dagegen. Da Leitfähigkeit (abgesehen von Reflexion) schon wegen der entwickelten Jouleschen Wärme von Absorption begleitet sein muß, so verhält sich daher ein Gitter in elektrischer Hinsicht, wie ein Turmalin in optischer, welcher nur Lichtschwingungen von gewisser Polarisationsrichtung nahezu ungeschwächt hindurchläßt, während die dazu senkrecht polarisierten vollständig absorbiert werden. Der Vergleich mit dem Turmalin ist nur insofern nicht ganz passend, als beim Gitter die Schwächung der zu seinen Drähten parallelen Komponente der elektrischen Kraft weit mehr durch Reflexion als durch Absorption, d. h. Verwandlung in Joulesche Wärme, geschieht. Zutreffender ist daher der Vergleich mit einem dichroitischen Kristall, der einen polarisierten Metallschiller besitzt, wie es bei den Platinzyanüren für gewisse Spektralbereiche, bei Jod fast für alle Farben der Fall ist<sup>2)</sup>.

Wie schon gesagt, müssen Leiter der Elektrizität die Wirkung der elektrischen Kraft abschirmen. Nichtleiter dagegen müssen die elektrische Kraft ungeschwächt hindurchlassen, abgesehen von Verlusten durch Reflexion, welche allerdings stets sehr unbedeutend sind und sogar ganz verschwinden, wenn die Dicke des Nichtleiters klein gegen die Wellenlänge der elektrischen Kraft ist. Dies ist nun auch tatsächlich zu beobachten, indem der Strahl der elektrischen Kraft durch Glas oder Pech nicht aufgehalten wird. Er geht aber auch nahezu ungeschwächt durch trockenes Holz, Papier oder gar die Steinwände eines Gebäudes, falls sie nicht feucht sind, hindurch. Dies muß deshalb vielleicht wunderbar erscheinen, weil die Leitfähigkeit dieser Materialien doch so groß ist, daß sie auf die Dauer elektrostatische Ladungen nicht zu isolieren vermögen und andererseits, falls sie solche vollständig einschließen, den Außenraum gegen diese elektrostatische Kraft abschirmen. Jedoch ergibt sich dieses Verhalten ohne Widerspruch aus den Formeln der Theorie, daß nämlich die Schirmwirkung bei schnellen Schwingungen weit kleiner als bei elektrostatischen Ladungen ist. Es soll dieses aber erst weiter unten näher besprochen werden.

---

<sup>1)</sup> Die Theorie eines solchen Gitters ist von J. J. Thomson gegeben in „Recent researches in electricity and magnetism“, Oxford 1893, S. 425; ferner von H. Lamb, Proc. London Math. Soc. 29, S. 523, 1898.

<sup>2)</sup> W. König, Verhandl. der physik. Gesellsch. 8, S. 36. 1889.

### 13. Demonstrationsmittel für die Schwingungen im Sekundärleiter.

Bei den beschriebenen Versuchen sind die Sekundärfunken sehr winzig und nicht einem größeren Auditorium gut zu demonstrieren. Zur Erreichung dieses Zweckes kann man mehrere Mittel anwenden, von denen die wichtigsten hier genannt werden mögen. Man kann<sup>1)</sup> das eine Ende der Sekundärleitung zur Erde ableiten, während das andere mit dem Knopfe eines geladenen Elektroskops verbunden wird. Sowie ein Sekundärfunken im Funkenmikrometer überschlägt, zucken die Blätter des Elektroskops zusammen, da durch den Sekundärfunken eine leitende Verbindung des Elektroskops mit der Erde hergestellt wird. Um das Elektroskop nach Aufhören des Sekundärfunkens immer wieder selbständig zu laden, kann man es mit dem einen Pole einer Zambonischen Trockensäule verbinden, deren anderer Pol zur Erde abgeleitet ist. — Nach Zehnder<sup>2)</sup> läßt man die Sekundärfunken in einer Vakuumröhre überschlagen, in welcher sich noch zwei andere Elektroden befinden, durch welche eine die Vakuumröhre in helles Leuchten bringende Hauptentladung eines Hochspannungsakkumulators hindurchgesandt wird. Die Spannung an diesen Hauptelektroden ist (durch passende Widerstandsverzweigung) so abgeglichen, daß die Hauptentladung ohne die Sekundärfunken gerade nicht einsetzt. Schlagen letztere in der Nähe der Kathode der Hauptelektroden über, so wird der Widerstand für die Hauptentladung so vermindert, daß sie einsetzt und die Röhre in helles Leuchten bringt, welches auch im nicht verdunkelten Zimmer weit zu sehen ist. — Diese Anordnung ist dem Relais im Telegraphendienste zu vergleichen, bei welchem ein starker Strom mittels Auslösung durch einen sehr schwachen hervorgerufen wird.

Man kann auch bei der Boltzmannschen (Elektroskop-) Methode die Zehndersche Röhre anwenden, wodurch der Hochspannungsakkumulator entbehrlich wird<sup>3)</sup>.

Diese älteren Methoden der Demonstration werden an Empfindlichkeit und Bequemlichkeit weit übertroffen durch den von Branly<sup>4)</sup> entdeckten Kohärer, der darauf beruht, daß die sehr geringe Leitfähigkeit loser metallischer Kontakte (etwa zwischen den Teilchen eines lockeren

<sup>1)</sup> Dieses Verfahren ist die Umkehrung eines von L. Boltzmann (Wied. Ann. 40, S. 399, 1890; wiss. Abhandlung III, S. 384) vorgeschlagenen.

<sup>2)</sup> L. Zehnder, Wied. Ann. 47, S. 77, 1892.

<sup>3)</sup> Vgl. hierüber P. Drude, Wied. Ann. 52, S. 499, 1894.

<sup>4)</sup> Vgl. hierüber die Darstellung von Branly in Rapports présentés au Congrès International de Physique II, S. 325, 1900.

Metallpulvers) durch das Auftreffen elektrischer Schwingungen bedeutend erhöht wird. Enthält der Sekundärleiter statt der Hertzschen Funkenstrecke einen solchen Kohärer, der andererseits in einen Stromkreis mit galvanischem Element und Galvanometer oder elektrischer Klingel eingeschaltet ist, so schlägt das Galvanometer aus oder die Klingel ertönt, sobald auch nur schwache elektrische Wellen den Sekundärleiter treffen. Der letztere muß bei dieser Anordnung natürlich aus zwei voneinander isolierten Teilen bestehen, um nicht einen Nebenschluß zum Kohärer zu bilden. Man wendet daher den Kohärer bei den Hertzschen Versuchen meist in Verbindung mit dem geradlinigen Resonator an. Für die quantitative Messung der Wirkung elektrischer Wellen sind dagegen besonders geeignet Apparate, die auf der Wärmewirkung des Stromes beruhen, der in der Mitte des Sekundärleiters (im Knoten der Potentialschwingung oder im Bauch der Stromschwingung) fließt. Man kann dabei entweder die durch die Stromwärme erzeugte Widerstandsänderung eines sehr feinen Drahtes messen. Dieser Art ist das von Rubens und Paalzow angegebene Bolometer<sup>1)</sup>, sowie der für die drahtlose Telegraphie von Fessenden konstruierte Barretter<sup>2)</sup>. Oder man läßt den Strom durch die Lötstelle eines aus sehr feinen Drähten bestehenden Thermoelements gehen und mißt die durch die Erwärmung hervorgerufene Thermokraft. Diese Anwendung des Thermoelements und die besondere Form, die man ihm dabei zweckmäßig gibt, ist zuerst von Klemencic<sup>3)</sup> beschrieben worden. Um die Abgabe der in den dünnen Drähten erzeugten Wärme an die Umgebung möglichst herabzusetzen, empfiehlt es sich bei beiden Methoden, der Widerstands- und der thermoelektrischen Methode, die dünnen Drähte in ein Gefäß einzuschließen, das möglichst weit evakuiert wird<sup>4)</sup>. Die Empfindlichkeit wird dadurch bedeutend gesteigert<sup>5)</sup>.

#### 14. Weitere Ausgestaltung der Hertzschen Versuche.

Die Versuche mit den Strahlen elektrischer Kraft sind heutzutage mit weit handlicheren Apparaten zu wiederholen. Es gelang zuerst Righi<sup>6)</sup>, Wellen von noch viel geringerer Länge als 60 cm, nämlich

<sup>1)</sup> Ueber die nähere Einrichtung eines solchen Apparates vgl. A. Paalzow und H. Rubens, Wied. Ann. **37**, S. 769, 1890.

<sup>2)</sup> Vgl. darüber J. Zenneck, Leitfaden der drahtlosen Telegraphie. Stuttgart, F. Enke, 1909, S. 239.

<sup>3)</sup> J. Klemencic, Wied. Ann. **42**, S. 416, 1891; **45**, S. 78, 1892.

<sup>4)</sup> P. Lebedew, Ann. d. Phys. (4) **9**, S. 209, 1902.

<sup>5)</sup> Vgl. dazu H. Brandes, Phys. Zeitschr. **6**, S. 503, 1905; Voegelé, Elektrotechn. Zeitschr. 1906, S. 467 und O. Knopp, Phys. Zeitschr. **10**, S. 439, 1909.

<sup>6)</sup> A. Righi, Rend. de R. Acc. dei Lincei **11**, 1 Sem., S. 505, 1893.

solche von 20 cm und selbst 7,5 cm, herzustellen. Der Erreger (vgl. Fig. 71) von Righi besteht aus zwei Messingkugeln a, b, welche sich (nach der Entdeckung von Sarasin und de la Rive, vgl. oben S. 530) in einem Bad von Vaselineöl befinden. Gegenüber den Erregerkugeln befinden sich zwei gleich dimensionierte Messingkugeln c, d, welche mit Zuleitungsdrähten zu einer großen Holtzschen Influenzmaschine<sup>1)</sup> versehen sind. Bei Tätigkeit der letzteren schlagen Funken zwischen c und a, a und b, b und d über.

Als Erreger sind die beiden Kugeln a, b mit der sie verbindenden Funkenstrecke anzusehen. Ihr Abstand muß daher auf die Länge der ausgesandten Wellen von Einfluß sein; doch hat auch die Länge der Funken zwischen a und c, b und d Einfluß auf die gute Ausbildung der beabsichtigten schnellen Schwingungen. Righi stellte Wellen von 20 cm Länge her, falls die Kugeln a, b, c, d 4 cm Durchmesser besaßen, Wellen von 7,5 cm Länge mit Kugeln von 1,36 cm Durchmesser. Der Abstand zwischen a, c und b, d betrug 2 cm, zwischen a, b nur 0,2 cm.

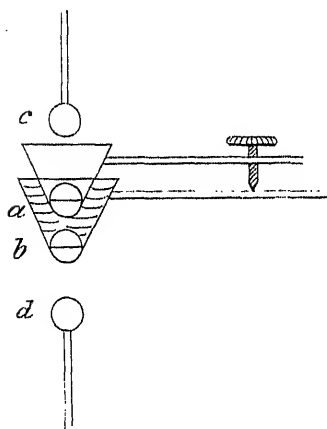


Fig. 71.

Der Resonator bestand aus schmalen Streifen belegten Spiegelglas von 11,5 bzw. 3,9 cm Länge, durch dessen Belegung mit einem Diamanten ein feiner Schnitt von etwa 0,001—0,002 mm Breite gezogen wurde. An diesem Schnitt bildet sich die sekundäre Funkenstrecke.

Zur Konzentration der Erregerwirkung dient bei den längeren (20 cm) Wellen ein zylindrischer, parabolischer Hohlspiegel von 5 cm Brennweite ( $\frac{1}{4} \lambda$ ), 50 cm Höhe und 40 cm Breite. Mit dessen Hilfe ist die Wirkung im Resonator noch in 25 m Entfernung wahrnehmbar. Für den Erreger der kürzeren Wellen (7,5 cm) hat der Hohlspiegel 5,7 cm Brennweite ( $\frac{3}{4} \lambda$ ), 40 cm Höhe und 32 cm Breite. Auch die Resonatoren können in die Brennnlinie eines Hohlspiegels gesetzt werden. Für den auf die kürzeren Wellen abgestimmten hat derselbe 1,9 cm Brennweite ( $\frac{1}{4} \lambda$ ), 23 cm Höhe und 17 cm Breite. Im Hohlspiegel ist ein

Loch angebracht, durch welches hindurch die Sekundärfunken mit Hilfe einer Lupe betrachtet werden.

Der Nachweis stehender Wellen vor einer Metallwand gelingt bei Anwendung des kleinen Erregers schon, wenn die Metallwand nur ein Quadratdezimeter groß ist. (Auch die Hand ist als Spiegel zu gebrauchen und gibt zu stehenden Wellen Anlaß.) Stellt man Metallwand und Resonator in ein Gefäß mit isolierender Flüssigkeit, so kann man direkt die Wellenlänge in ihr, d. h. auch den elektrischen Brechungsindex und die Dielektrizitätskonstante, finden. So ergab sich z. B. für Olivenöl das Verhältnis der Wellen-

länge zu der in Luft gleich  $\frac{3}{4}$ , der Brechungs-

index daher zu  $\frac{4}{3} = 1,33$ , die Dielektrizitäts-

konstante zu 1,78. Aus der Ablenkung des elektrischen Strahles durch ein Paraffinprisma von 17 cm Höhe, 7 cm Breite und  $30^\circ$  brechendem Winkel ergibt sich der Brechungsexponent des Paraffins zu 1,6, die Dielektrizitätskonstante  $\epsilon$  daher zu 2,55. Diese Zahl ist etwas größer als die aus statischen oder langsam veränderlichen elektrischen Zuständen abgeleiteten Werte von  $\epsilon$ , die zwischen 1,78 und 2,32 liegen.

Durch ein rechtwinkliges Paraffinprisma wird ein senkrecht zu einer Kathetenfläche einfallender elektrischer Strahl total reflektiert. Nähert man der Hypotenusenfläche des Prismas von rückwärts ein gleiches Prisma in inverser Lage (Hypotenusenfläche gegen Hypotenusenfläche), so kann man die Totalreflexion mindern oder ganz aufheben, wenn der Abstand beider Hypotenusenflächen kleiner als  $\frac{1}{4} \lambda = 2 \text{ cm}$  wird. Dieses

Experiment ist ein Analogon zu dem von Quincke<sup>1)</sup> angestellten optischen Experimente, nach welchem in einem rechtwinkligen Glasprisma die Totalreflexion aufgehoben wird, wenn man gegen seine Hypotenusenfläche ein anderes rechtwinkliges Glasprisma mit seiner Hypotenusenfläche drückt.

Righi konnte auch die Gültigkeit des in der Beugungstheorie so vielfach verwendeten Huygensschen Prinzipes für die elektrischen Wellen nachweisen. Indem ein metallisches Diaphragma zwischen Erreger E und Resonator R eingeschaltet wurde (vgl. Fig. 72), konnte die Wirkung im letzteren verstärkt werden, falls das Diaphragma nur diejenige Zone (FG, F'G') einer um den Erreger E beschriebenen Kreis-

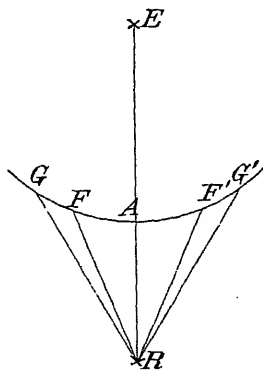


Fig. 72.

<sup>1)</sup> G. Quincke, Pogg. Ann. 127, S. 1 u. 199, 1866.

förmigen Zylinderfläche C abblendete, deren innere (F'R, F'R) bzw. äußere (G'R, G'R) Randstrahlen, vom Resonator aus gerechnet, um  $\frac{1}{2}\lambda$  bzw.  $\frac{2}{2}\lambda$  länger waren als der Zentralstrahl R.A. Dieses Experiment gibt daher einen Beweis für die Richtigkeit der Grundlagen der Theorie der Fresnelschen Beugungserscheinungen, wenn man wenigstens die an elektrischen Wellen gemachten Erfahrungen auch auf die optischen als übertragbar annehmen darf<sup>1)</sup>.

Endlich hat Righi auch zuerst nachgewiesen<sup>2)</sup>, daß es auch Medien gibt, an denen man die Erscheinungen der Doppelbrechung für diese Strahlen elektrischer Kraft wahrnehmen kann. Righi und unabhängig von ihm Mack<sup>3)</sup> haben diese Tatsache an Platten aus Holz entdeckt. Brachte Righi zwischen seine parallel gestellten Spiegel eine Platte von Tannenholz, die parallel zu den Fasern geschnitten war und 2,25 cm Dicke hatte, so konnte er zunächst nachweisen, daß die elektrischen Schwingungen stärker durchgelassen wurden, wenn die Faser senkrecht zur Schwingungsrichtung stand, als wenn sie ihr parallel lag. Wurde nun die Holzplatte so eingestellt, daß die Faser unter 45° gegen die Schwingungsrichtung des Erregers geneigt war, so erloschen die Sekundärfunken beim Drehen des Empfängerspiegels in keiner Stellung, sondern zeigten in zwei zueinander rechtwinkligen Orientierungen des Resonators ein Maximum und ein Minimum der Intensität. Daraus folgt, daß die aus dem Holz austretende Schwingung nicht mehr geradlinig polarisiert ist, wie es die einfallende Schwingung ist, sondern elliptisch. Mit einer 13,7 cm dicken Holzplatte konnte er kreisförmige Polarisation erreichen, wenn er die Verschiedenheit der Durchlässigkeit des Holzes für die Schwingungen parallel und senkrecht zur Faserrichtung dadurch ausglich, daß er den Winkel der Faserrichtung mit der Richtung des Erregers von 45° auf 22° verkleinerte. Bei dieser Anordnung trat alsdann keinerlei Veränderung des sekundären Funkenspiels bei dem Drehen des Resonators auf. Auch mit Kristallen (Kalkspat, Gips) hat Righi ähnliche Versuche angestellt. Er hat die Gesamtheit dieser Parallelversuche zwischen Eigenschaften der elektrischen Wellen und denen der Lichtwellen später in einem besonderen Buche zusammengestellt<sup>4)</sup>.

<sup>1)</sup> Man vgl. hinsichtlich des Huygens-Fresnelschen Prinzips P. Drude, Lehrbuch der Optik, 2. Aufl., Leipzig 1906, S. 151 ff.

<sup>2)</sup> A. Righi, Mem. R. Acc. di Bologna (5) 4, S. 487, 1894.

<sup>3)</sup> K. Mack, Wied. Ann. 54, S. 342, 1895.

<sup>4)</sup> A. Righi, Die Optik der elektrischen Schwingungen. Deutsch von B. Dessau, Leipzig 1898.

Mit Apparaten nach Art und von den Dimensionen dieser Righischen Apparate pflegt man heute die Hertz'schen Versuche zu demonstrieren. Es ist aber auch gelungen, noch bis auf wesentlich kleinere Wellenlängen herunterzugehen. Die geringsten Maße haben Lebedew und Lampa erreicht. Die Oszillatoren von Lebedew<sup>1)</sup> bestanden aus Platindrahtstückchen von 1,3 mm Länge und 0,5 mm Dicke. Die Resonatoren waren 3 mm lang und hatten ein feines Thermoelement zwischen sich. Die zugehörigen Spiegel hatten nur 20 mm Höhe und 12 mm Oeffnung. Die Wellenlänge, die mit diesen Apparaten erzielt wurde, konnte durch einen Interferenzversuch (siehe den nächsten Abschnitt) zu 6 mm festgestellt werden. Lampa<sup>2)</sup> verwandte Erreger von 2, 1,5 und 1 mm Länge und konnte mit Hilfe eines Beugungsgitters, das aus 10 mm breiten Metallstreifen mit Zwischenräumen von 20 mm bestand, die Wellenlänge dieser Erreger zu 8, 6 und 4 mm ermitteln. Auch mit diesen kurzen Wellen und kleinen Apparaten lassen sich sämtliche Hertz'schen Versuche ausführen. Lebedew hat damit im besonderen die Erscheinungen der Doppelbrechung, und zwar im Schwefel, studiert. Lampa hat seine Apparate benutzt, um nach der Methode der prismatischen Ablenkung die Brechungsexponenten fester und flüssiger Körper zu bestimmen (siehe darüber Abschnitt 27).

## 15. Interferenzen von elektrischen Wellen, welche dieselbe Fortpflanzungsrichtung besitzen.

Die Analogie zwischen den Gesetzen der elektrischen und der optischen Wellen ist so interessant, daß wir noch einen Augenblick bei ihr verweilen wollen.

Schon im Abschnitt 10 lernten wir Interferenzerscheinungen bei elektrischen Wellen kennen. Sie kamen zustande durch die Interferenz zweier in entgegengesetzter Richtung sich fortpflanzender Wellen. Ihr Analogon ist in der Optik wegen der dort vorkommenden viel kleineren Wellenlänge nicht so leicht herzustellen. Der Nachweis der Bildung stehender Lichtwellen ist erst in neuerer Zeit Wiener<sup>3)</sup> gelungen.

Dagegen sind in der Optik die Interferenzen zweier in gleicher Richtung fortgepflanzter Wellen leicht zu erhalten, wie die Experimente mit den Fresnel'schen Spiegeln und dem Newton'schen Farbenglase dartun. Man kann nun diese Experimente auch sehr bequem mit elek-

<sup>1)</sup> P. Lebedew, Wied. Ann. 56, S. 1, 1895.

<sup>2)</sup> A. Lampa, Sitzungsber. d. Wiener Ak. IIa, 105, S. 589, 1896; Wied. Ann. 61, S. 79, 1897.

<sup>3)</sup> O. Wiener, Wied. Ann. 40, S. 203, 1890.



trischen Wellen anstellen<sup>1)</sup> und hat dann wiederum ein neues Mittel, um ebenso wie in der Optik die Wellenlänge zu bestimmen. Der Fresnelsche Zweispiegelversuch wird nachgeahmt, indem man die Wellen des Erregers an zwei in einem stumpfen Winkel gegeneinander gestellten Metallspiegeln reflektieren läßt. Mit einem geradlinigen Resonator lassen sich dann in der Nähe der mittleren Reflexionsrichtung senkrecht zu ihr ausgebreitete Maxima und Minima der Wirkung, d. h. Interferenzfransen, nachweisen.

Das Analogon zum Newtonschen Farbenglase sind Versuche von Klemencic und Czermak<sup>2)</sup>, welche die Erregerwellen an zwei parallelen, gegenseitig verschiebbaren Metallspiegeln reflektieren ließen. Bei allmählicher Vergrößerung des Abstandes beider Spiegel zeigt ein in der Reflexionsrichtung befindlicher (mit Hohlspiegel armierter) Resonator abwechselnd Maxima und Minima der Wirkung, letztere offenbar, wenn der gegenseitige Abstand beider Spiegel das ungerade Vielfache von  $\frac{1}{4} \lambda$  ist. Man kann diese Erscheinung einem größeren Auditorium sehr schön mit Hilfe einer Zehnderschen Entladungsröhre (vgl. oben S. 570) zeigen. Klemencic und Czermak erhielten für die Wellenlänge je nach der Länge des Resonators verschiedene Werte, was nach dem auf S. 562 Erörterten verständlich ist. Sie stimmt annähernd mit der ganzen Länge des Resonators überein, was mit unseren obigen Betrachtungen im Einklang steht, nach denen wir die eine Hälfte des Resonators nahezu  $= \frac{1}{2} \lambda$  schätzten. Es findet wirkliche Resonanz mit dem von Hertz benutzten (oben auf S. 566 beschriebenen) Erreger statt, wenn die ganze Länge der Sekundärleitung (beide Hälften zusammengekommen) 54 cm beträgt. Die dementsprechende Wellenlänge ergab sich zu 51,2 cm<sup>3)</sup>. Wich die Länge der Sekundärleitung von 54 cm ab, so wurden die Maxima und Minima der Wirkung weniger stark ausgeprägt. Bei geradliniger Sekundärleitung müssen die Abweichungen von der Resonanz viel kleiner sein, um noch die Maxima von den Minimis deutlich unterscheiden zu können, als bei nahezu geschlossener, z. B. kreisförmiger Sekundärleitung, was leicht verständlich ist, da die Dämpfung der Schwingungen bei ersteren wegen des Verlustes der Energie durch Strahlung weit größer sein muß, als bei letzteren, welche keine Energie ausstrahlen (vgl. oben S. 561).

Strenger als diese Versuche entsprachen dem Newtonschen Farben-

<sup>1)</sup> Dieser Vorschlag rührt von L. Boltzmann her. Derselbe führte das Analogon zum Fresnelschen Spiegelversuch aus. Vgl. Wied. Ann. 40, S. 399, 1890.

<sup>2)</sup> J. Klemencic und P. Czermak, Wied. Ann. 50, S. 174, 1893.

<sup>3)</sup> Diese Zahl ist auffällig klein.

glase Versuche, welche Righi<sup>1)</sup> mit Platten von Paraffin und von Schwefel angestellt hat. Entsprach die Dicke der Platten einem Viertel derjenigen Wellenlänge, die der benutzten elektrischen Schwingung in der betreffenden Substanz zukommen würde, so reflektierten die Platten stark; betrug die Dicke der Platten doppelt so viel, so war die Reflexion sehr gering. Righi hat in seinem Buche auch noch andere Interferenzversuche beschrieben, so Interferenzen an einem einzigen Spiegel nach Art des Lloyd'schen Versuches und Interferenzen mit einem Doppelpisma.

Endlich hat Righi<sup>1)</sup> und nach ihm Wiedeburg<sup>2)</sup> ein Interferenzverfahren nach Art des Jaminschen Interferentialrefraktors benutzt, um die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrischen Welle, bzw. die Brechungsexponenten für dielektrische Medien zu bestimmen. Durch senkrechte Reflexion an zwei parallelen Metallspiegeln, wie sie Klemencic und Czermak verwandten, werden zwei parallele Strahlenbündel erzeugt, die nach Reflexion von einer unter  $45^\circ$  aufgestellten Glas- oder Paraffinplatte im Resonatorspiegel zur Interferenz kommen; wird in das eine Strahlenbündel eine dielektrische Platte von der Dicke  $d$  eingeschoben, so muß der Spiegel der anderen um eine bestimmte Strecke  $\delta$  verschoben werden, um die ursprüngliche Interferenz wiederherzustellen, d. h. die durch die dielektrische Platte bewirkte Phasenänderung wieder auszugleichen. Aus  $d$  und  $\delta$  läßt sich dann der Brechungsexponent berechnen.

Während in der Optik die erforderliche Kohärenz der interferierenden Strahlenbündel nur dadurch zu erreichen ist, daß man sie durch Spiegelung oder Brechung aus einem Lichtpunkte ableitet, kann man bei den elektrischen Schwingungen Interferenzen auch mit Hilfe zweier Erreger erhalten, wenn man dafür sorgt, daß beide in kohärenter Weise schwingen, d. h. daß sie beide stets mit konstanter Phasendifferenz, etwa in gleicher oder in entgegengesetzter Phase erregt werden. Die Wellen, die von zwei oder mehreren solchen kohärent schwingenden, und in passenden Entfernungen voneinander aufgestellten Erregern ausgesandt werden, verstärken sich in gewissen Richtungen und schwächen sich in anderen. Auf diesem Prinzip beruhen die von Braun<sup>3)</sup> gemachten Vorschläge, für die drahtlose Telegraphie eine Konzentrierung der Wirkungen in einer bestimmten Richtung zu erzielen. Ein Interferenzversuch dieser Art in kleinem Maßstabe ist von F. Kiebitz beschrieben worden<sup>4)</sup>.

<sup>1)</sup> A. Righi, Die Optik der elektrischen Schwingungen.

<sup>2)</sup> O. Wiedeburg, Wied. Ann. 59, S. 497, 1896. Siehe daselbst auch weitere Literaturangaben.

<sup>3)</sup> F. Braun, Jahrb. der drahtlosen Telegraphie 1, S. 1, 1907.

<sup>4)</sup> F. Kiebitz, Verhandl. d. D. physik. Gesellsch. S. S. 577, 1906.

Alle die beschriebenen Erscheinungen, welche in der Optik ihr vollständiges Analogon finden und nur durch die Endlichkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wirkung erklärt werden können, sprechen dafür, daß eine mit unendlicher Geschwindigkeit fortgepflanzte unmittelbare Fernwirkung, wenigstens in merklichem Betrage nicht bestehen kann, da sonst die Reinheit der beschriebenen Erscheinungen erheblich gestört sein müßte. Dies gilt wenigstens für alle die Experimente, bei welchen Verstärkungen der Wirkung durch Hohlspiegel nicht vorgenommen sind. Diese verstärken nämlich bei passender Anordnung nur denjenigen Teil der elektrischen Kraft, welcher sich mit endlicher Geschwindigkeit fortpflanzt, während sie die Wirkung des eventuell vorhandenen, zeitlos sich ausbreitenden Teiles der elektrischen Kraft stets sehr schwächen würden, da in den den Erreger umgebenden Metallmassen Ströme entgegengesetzter Richtung induziert werden (vgl. oben S. 565).

Der strenge Nachweis der Richtigkeit der Maxwellschen Theorie ist aber immer noch, wie schon oben S. 440 angeführt ist, durch die numerische Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit am besten zu führen. Wir wollen jetzt Versuche kennen lernen, durch welche dieser Wert mit einiger Zuverlässigkeit als ermittelt anzusehen ist.

## 16. Die Fortpflanzung der elektrischen Kraft längs gerader Drähte.

Es war oben im Kapitel VIII, Abschnitt 12 auf S. 499 von den Anschauungen einer angenäherten Theorie aus, d. h. ohne Rücksicht auf die in der Umgebung eines Drahtes stattfindenden Verschiebungsströme, abgeleitet, daß eine elektrische Welle längs eines Systemes zweier paralleler Drähte sich mit der Geschwindigkeit  $c$  fortpflanzt, falls die Drähte in der Luft liegen. Der galvanische Widerstand muß dabei gegen eine oben auf S. 510 näher bestimmte Größe zu vernachlässigen sein. Diesen Satz hatten wir auf S. 527 zur Theorie des Resonators benutzt, nach welcher die Länge desselben angenähert gleich einer halben Wellenlänge der Schwingung sein sollte.

Werden auf das eine Ende  $E_1$  des Drahtsystems erzwungene Schwingungen ausgeübt, welche ungedämpfte Sinusschwingungen der Zeit sind, während das andere Ende  $E_2$  des Systems entweder überbrückt ist oder einen Kondensator enthält oder ohne Kapazität frei endigt, so müssen sich stehende Wellen im Drahtsystem ausbilden, da bei  $E_2$  die von  $E_1$  nach  $E_2$  sich fortplanzenden Wellen (die einfallenden Wellen) reflektiert

tierten Welle gleich der der einfallenden ist. Nur ist die durch die Reflexion herbeigeführte Phasenänderung der einfallenden Welle je nach den besonderen Bedingungen des Endes  $E_2$  verschieden.

Der Nachweis dieser stehenden Wellen, d. h. der Nachweis einer Verschiedenheit der Intensität der elektrischen Schwingungen für verschiedene Abstände vom Ende  $E_2$ , kann natürlich nur gelingen, wenn die Länge des Drahtsystems mindestens von der Größenordnung der Wellenlänge der Schwingungen ist. Deshalb konnte dieser Nachweis des schon von Kirchhoff abgeleiteten Resultates erst gelingen, seitdem durch die Arbeiten von Hertz die Mittel gewonnen waren, elektrische Wellen von etwa 6 m Länge oder noch weit kürzere herzustellen.

Mit Hilfe dieser schnellen Schwingungen gelingt nun dieser Nachweis stehender Wellen in Drähten tatsächlich sehr gut. Hertz<sup>1)</sup> selbst

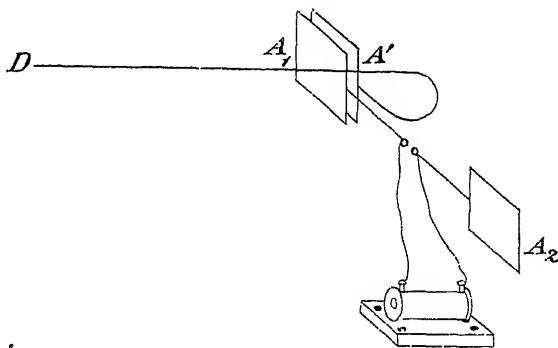


Fig. 73.

at ihn zuerst geführt, indem er als Konduktoren  $A_1$ ,  $A_2$  seines Erregers zwei quadratische Messingplatten von  $40 \text{ cm}^2$  Größe wählte. Der einen von ihnen stand in wenig Zentimetern Abstand eine gleich große Platte  $A'$  gegenüber, an welcher ein mehrere Meter langer gerader Draht  $D$  angebracht war (vgl. Fig. 73). Beim Ueberspringen der Primärschwingungen wurden auf  $A'$  durch die von  $A_1$  ausgesandten, bzw. einmündenden oszillierenden Verschiebungsströme (elektrischen Kraftlinien) oszillierende elektrische Ladungen erzeugt. Das bei  $A'$  mündende Ende des Drahtes  $D$  stand also unter dem Einfluß erzwungener elektrischer Schwingungen. Hertz konnte nun tatsächlich mit Hilfe eines auf die Primärschwingung abgestimmten Resonators, welcher am Draht  $D$  in geeigneten Stellungen entlang geführt wurde, abwechselnd Maxima und Minima der elektrischen bzw. magnetischen Kraft in der Umgebung des Drahtes wahrnehmen; indes erhielt Hertz nicht das Resultat, daß die Welle längs des Drahtes mit der Geschwindigkeit  $c$  vorwärts glitt.

<sup>1)</sup> H. Hertz, Wied. Ann. 34, S. 551, 1888.

Trotzdem glaubte Hertz aus den Versuchen, welche er als eine Interferenzwirkung der direkt vom Erreger ausgesandten Wellen und der im Drahte fortgepflanzten ansah, schließen zu müssen, daß die elektrische Kraft, welche vom Erreger in die Luft ausgesandt würde, sich mit der Geschwindigkeit  $c$  fortpflanze.

Gegen die Beweiskraft dieses Schlusses sind indes gewichtige Bedenken zu erheben, da dabei für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in Drähten das von Siemens an sehr langen Drahtstrecken erhaltene Resultat benutzt wurde; aus den oben auf S. 515 besprochenen Gründen kann man jene von Siemens erhaltene Zahl, welche durch den galvanischen Widerstand der Leitung beeinflußt sein muß, nicht auf diese Versuche mit sehr schnellen Schwingungen und verhältnismäßig kurzen Drahtleitungen anwenden.

Faßt man nun die beschriebene Erscheinung nicht als eine Interferenzwirkung der direkten, vom Erreger ausgesandten Kraft und der im Drahte fortgepflanzten auf, sondern sieht man von ersterer ab, wozu man berechtigt ist, falls man den Draht an Stellen untersucht, welche nicht nahe am Erreger liegen, so läßt sich leicht übersehen, daß bei der beschriebenen Hertz'schen Versuchsanordnung nicht notwendig die elektrische Welle mit der Geschwindigkeit  $c$  längs des Drahtes sich fortpflanzen muß. Denn eine längs des Drahtes sich verschiebende elektrische Ladung, d. h. eine gewisse Anzahl aus dem Drahte austretender elektrischer Stromlinien, muß in ihrer Umgebung eine entgegengesetzte gleich große Ladung hervorrufen, da die elektrischen Stromlinien der Verschiebungsströme nicht frei in der Luft endigen können, sondern irgendwo einmünden müssen. Ist dem Drahte parallel ein zweiter Draht ausgespannt, so münden in ihm die vom ersten ausgesandten Stromlinien der Verschiebungsströme (elektrischen Kraftlinien); fehlt dagegen der zweite Draht, so müssen sie in den umgebenden Leitern, den Zimmerwänden oder dem Körper des Experimentators einmünden. Für diesen Fall ist es aber deshalb gar nicht notwendig, daß die Wellen mit der Geschwindigkeit  $c$  am Drahte entlang gleiten, weil sich dieses Resultat nach der oben S. 499 auseinandergesetzten Theorie nur ergibt für ein bestimmtes Verhältnis der Selbstinduktion des Stromsystems zu seiner Kapazität, nämlich wenn beide auf die Längeneinheit bezogene Größen einander reziprok gleich sind. Diese Bedingung ist für zwei parallel ausgespannte gerade Drähte erfüllt, dagegen wird sie im allgemeinen nicht erfüllt sein, falls in der Nähe des Drahtes  $D$  sich kein Leiter von vorgeschriebener Form oder gar der Körper des Beobachters befindet.

Es mußte deshalb als ein Fortschritt in der Festlegung und Ueberschbarkeit der Verhältnisse bezeichnet werden, als Lecher<sup>1)</sup> anstatt

<sup>1)</sup> E. Lecher, Wied. Ann. 41, S. 850, 1890.

eines Drahtes  $D$  zwei parallele  $D_1$ ,  $D_2$  anwandte, deren jeder eine Metallplatte  $B_1$ ,  $B_2$  trug, welche in der aus der Fig. 74 ersichtlichen Weise den Erregerplatten  $A_1$ ,  $A_2$  gegenübergestellt wurden.

Der Abstand zwischen beiden Drähten  $D_1$ ,  $D_2$  ist so zu wählen, daß eine gegenseitige elektrische Influenz zwischen ihnen nicht merkbar eintritt, wenigstens wenn die einfachsten Verhältnisse, welche der Theorie

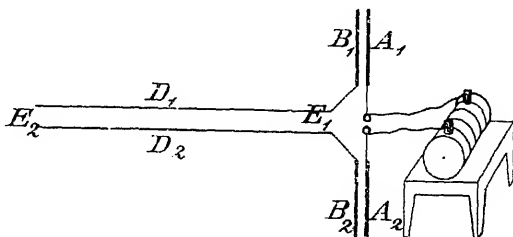


Fig. 74.

am besten zugänglich sind, getroffen werden sollen. Wenn der Durchmesser der Drähte wenige Millimeter nicht übersteigt, so genügt schon ein Abstand von einigen Zentimetern zwischen den Drähten.

Um den Schwingungszustand in den Drähten numerisch bestimmen zu können, bedient man sich zweckmäßig eines von H. Rubens<sup>1)</sup> angewandten Mittels, indem man über die beiden Drähte  $D_1$ ,  $D_2$  zwei etwa 5 cm lange Stücke eines dickwandigen Kapillarrohres aus Glas schiebt, um welche die Enden  $f_1$ ,  $f_2$  einer Kupferleitung einmal herumgeschlungen sind (vgl. Fig. 75,  $h$  ist ein Holzstück). Diese Leitung enthält einen feinen Eisen- oder Platindraht (das Bolometer), dessen Widerstandsänderung, welche durch die Joulesche Wärme etwaiger in ihm vorhandener Ströme verursacht wird, man mit Hilfe einer Art Wheatstonescher Brücke und eines hochempfindlichen Galvanometers nachweisen kann<sup>2)</sup>.

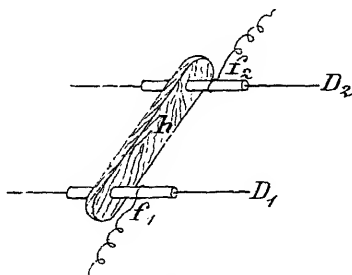


Fig. 75.

Liegen nun die Enden dieser zum Bolometer führenden Leitung, welche Rubens die „Flaschen“ nennt, an Stellen der Drähte  $D_1$ ,  $D_2$ , an welchen elektrische Kraftlinien durch die Drahtoberfläche oszillierend ein- und austreten, d. h. an Stellen, wo elektrische Ladungen auftreten, so müssen diese auch Ladungen der Enden der Bolometerleitung verursachen, d. h. es müssen in dieser Ströme fließen, und das auf Null ein-

<sup>1)</sup> H. Rubens, Wied. Ann. 42, S. 154, 1891.

<sup>2)</sup> Siehe die oben S. 571 zitierte Arbeit von A. Paalzow und H. Rubens.

gestellte Galvanometer muß einen Ausschlag ergeben. Mit dem Bolometer kann man also die Ladungswelle in den Drähten untersuchen. Sie erscheint bei der geringen Kapazität der „Flaschen“ in keiner merkbaren Weise durch deren Anlegen beeinflußt, wie Kontrollversuche ergaben, in denen ein Flaschenpaar verschoben wurde, während ein anderes, in fester Lage, zum Bolometer führte.

Bei den Versuchen, welche darin bestanden, daß das mit dem Bolometer verbundene Flaschenpaar längs der Drähte entlang geschoben wurde und zu jeder Stellung der Ausschlag des Galvanometers beobachtet wurde, war in der Nähe des Endes  $E_2$  des Drahtsystems ein Flaschenpaar in fester Lage belassen, welches man durch Umlegen einer Wippe jederzeit schnell mit dem Bolometer verbinden konnte. Dieses Flaschenpaar diente zur Kontrolle über die Konstanz der Wirksamkeit des Erregers während jeder Versuchsreihe, welche ja, wie wir oben S. 529 sahen, oft durch kleine Zufälligkeiten stark geändert wird. — Eine etwaige direkte Einwirkung des Erregers, welche auch bestehen würde, falls die Flaschen der Bolometerleitung frei in der Luft endeten, ohne daß überhaupt Drähte  $D_1$ ,  $D_2$  an die Platten  $B_1$ ,  $B_2$  angesetzt wären, kann bei den Versuchen kaum in merkbarer Weise vorhanden sein. Denn einmal müßte sie bei einiger Entfernung vom Erreger viel schwächer ausfallen, als die Wirkung der Ladung der Drähte, da erstere mit jener Entfernung abnimmt, letztere dagegen nicht (oder nur sehr wenig wegen Umsetzung der elektrischen Energie in Joulesche Wärme in den Drähten), und andererseits ist solche direkte Wirkung überhaupt bei der Lecherschen Anordnung des Drahtsystems kaum zu befürchten, wenn nämlich der Abstand der Platten  $A_1 B_1$  und  $A_2 B_2$  so klein im Vergleich zu ihrer Größe gewählt wird, daß alle von  $A_1$  bzw.  $A_2$  ausgehenden elektrischen Kraftlinien nach  $B_1$  bzw.  $B_2$  auf dem kürzesten Wege übergehen<sup>1)</sup>, so daß die von  $B_1$  bzw.  $B_2$  abgewendeten Seiten von  $A_1$  bzw.  $A_2$  keine elektrischen Kraftlinien in den Raum aussenden.

Wenn man in der beschriebenen Weise die Größe der elektrischen Ladung an verschiedenen Stellen des Drahtsystems durch die Galvanometerausschläge mißt, so ergibt sich eine wellenförmige Verteilung dieser Ladung, d. h. es bildet sich tatsächlich eine stehende Ladungswelle aus. Am freien Ende  $E_2$  der Drähte liegt ein Schwingungsbauch; ist dagegen dies Ende überbrückt, so liegt dort ein Schwingungsknoten. Dieses steht mit den in Kapitel VIII, Abschnitt 13 angestellten Ueberlegungen im Einklang.

Im allgemeinen hat jedoch die so ermittelte Ladungswelle nicht eine regelmäßige Form. Variiert man aber die Drahtlänge  $l$  des Er-

<sup>1)</sup> Aus diesem Grunde muß es vorteilhaft erscheinen, die Platten B nicht, wie Rubens getan hat, kleiner zu wählen als die Platten A.

regers, d. h. den gegenseitigen Abstand der Platten  $A_1 A_2$ . so nimmt für eine gewisse Drahtlänge  $l$  die Ladungswelle in den Drähten  $D$  eine besonders regelmäßige Form an und Maxima und Minima sind scharf ausgeprägt. Dies tritt offenbar dann ein, wenn die Dauer der erzwungenen Erregerschwingung gleich einer möglichen Eigenschwingungsdauer des ganzen Drahtsystems ist. Zur Berechnung der ersteren (der Primärschwingung) ist zu berücksichtigen, daß die Kapazität des Erregers in der der beiden Plattenkondensatoren  $A_1 B_1, A_2 B_2$  besteht, während die Eigenschwingungen des ganzen Drahtsystems nach den in den Abschnitten 12—14 des VIII. Kapitels auseinandergesetzten Prinzipien zu berechnen sind, wenn von der induktorischen Wirksamkeit der Verschiebungsströme in der die Drähte umgebenden Luft abgesehen wird.

Wir wollen uns nun zunächst auf Grund der in Abschnitt 7 angewandten strengen Maxwellschen Theorie eine Vorstellung davon verschaffen, ob wir zu der letzteren Annahme tatsächlich berechtigt sind, und in welcher Weise die Verschiebungsströme das Resultat beeinflussen können.

## 17. Verteilung der elektrischen und magnetischen Kraft um einen geradlinigen Draht nach der Maxwellschen Theorie.

Nehmen wir an, daß das Drahtsystem aus zwei parallelen Kreiszylindern vom Radius  $R$  und dem Abstand  $d$  bestehe, welche aber so weit voneinander entfernt sein sollen, daß in unmittelbarer Nähe jedes Drahtes die Verteilung der Kräfte nicht wesentlich durch das Vorhandensein des anderen Drahtes gestört ist, so können wir offenbar die im Luftraum bestehenden magnetischen und elektrischen Kräfte als eine Ueber-einanderlagerung zweier Kraftsysteme auffassen, von denen jedes symmetrisch um einen der Drähte verteilt ist. Für jedes von ihnen können wir daher die im Abschnitt 7 in den Formeln (30), (31) und (32), S. 537, enthaltene Lösung in Anwendung bringen, falls wir die  $z$ -Achse in die Achse des betreffenden Drahtes legen und  $\rho$  als senkrechte Entfernung von der Drahtachse ab rechnen.

Im Inneren des Drahtes sind nun andere Hauptgleichungen für die elektrischen und magnetischen Kräfte gültig, als in der den Draht umgebenden Luft. An der Drahtoberfläche, d. h. für  $\rho = R$ , müssen gewisse Grenzbedingungen für alle Werte der Zeit und der  $z$ -Koordinate für die elektrischen und magnetischen Kräfte bestehen, so z. B. muß die  $z$ -Komponente der elektrischen Kraft stetig aus dem Inneren des Drahtes in die Luft übergehen. Diese Bedingungen sind offenbar nicht anders zu erfüllen möglich, als daß die elektrischen bzw. magnetischen Kräfte die Form eines Produktes  $\psi \cdot \varphi$  zweier Funktionen  $\psi$  und  $\varphi$  besitzen, von



denen die eine  $\phi$  nur von  $z$  und  $t$  abhängt, während die andere  $\varphi$  nur von  $\rho$  abhängt. Für korrespondierende Komponenten der Kräfte inner- und außerhalb des Drahtes müssen die Funktionen  $\phi$  wegen der bestehenden Grenzbedingungen die gleichen sein.

Hieraus geht hervor, daß auch die die Lösung des Problems vermittelnde Funktion II die Form besitzen muß:

$$II = \phi(z, t) \cdot \varphi(\rho).$$

Wegen der Gleichung (30) muß nun sein, falls  $\varepsilon$  sich auf den den Draht umgebenden Isolator bezieht ( $\varepsilon = 1$  für Luft) und  $\mu = 1$  gesetzt wird, was bei allen Isolatoren der Fall ist:

$$\frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{\phi}{\varphi} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} \right). \quad (47)$$

Die Funktion  $\phi$  bestimmt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle längs des Drahtes (sowohl für den Luftraum als für das Innere des Drahtes, da  $\phi$  den Kräften in der Luft und im Metall gemeinsam ist).

Wie man sieht, weicht die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle von dem früher S. 500 ohne Rücksicht auf die Verschiebungsströme gefundenen Werte  $\frac{c}{\sqrt{\mu \varepsilon}}$  ab, falls das zweite Glied der rechten Seite

von (47) von Null verschiedene Werte besitzt. Dieses Glied hängt nun tatsächlich von der der Achse des Drahtes parallelen Komponente der elektrischen Kraft ab, welche bei zeitlicher Veränderung gleichgerichtete Verschiebungsströme hervorruft; denn nach (32), S. 537, ist:

$$\phi \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} \right) = \mathcal{E}_z, \quad (48)$$

so daß (47) wird zu:

$$\frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{\mathcal{E}_z}{\varphi}. \quad (49)$$

Aus dieser Gleichung kann man den Schluß ziehen, daß  $\mathcal{E}_z$  überhaupt verschwindet, wenn es an der Drahtoberfläche, d. h. für  $\rho = R$ , verschwindet. Denn an dieser muß dann die Beziehung  $\frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$  gelten; da aber  $\phi$  von  $\rho$  ganz unabhängig ist, so muß diese Beziehung für jeden Wert von  $\rho$  gelten, d. h. zufolge (49) muß  $\mathcal{E}_z$  für jeden Wert von  $\rho$  verschwinden.

Wir gewinnen daher das Resultat: Steht die elektrische Kraft in der Luft senkrecht auf der Drahtoberfläche, so verschwindet  $\mathcal{E}_z$  überall, d. h. es fehlen die der  $z$ -Achse parallelen Verschiebungsströme, und die Welle pflanzt sich mit der Geschwindigkeit  $\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}$  längs des Drahtes fort. Dagegen wird diese

Fortpflanzungsgeschwindigkeit geändert, falls die genannte Bedingung nicht erfüllt ist, d. h. wenn etwaige, dem Draht parallel laufende Verschiebungsströme existieren.

Das in dem ersten Satze ausgesprochene Resultat war von vornherein zu erwarten. Denn die senkrecht zur z-Achse stattfindenden Verschiebungsströme geben keine z-Komponente  $\mathfrak{A}_z$  des Vektorpotentials, sie ändern daher auch nicht die Selbstinduktion des Drahtes. und deshalb können sie in keiner Weise die früher S. 497 bis S. 508 abgeleiteten Resultate beeinflussen, welche ohne Rücksicht auf die induktorische Wirksamkeit etwaiger Verschiebungsströme gewonnen sind.

Streng genommen kann nun aber die z-Komponente der elektrischen Kraft in der Luft nie ganz verschwinden. Denn im Draht muß eine solche vorhanden sein, da sie nach dem Ohmschen Gesetz stets vorhanden ist, falls Strömung im Drahte stattfindet, und Strömung findet tatsächlich im Drahte (eventuell in einer dünnen Oberflächenschicht) statt, wenn sich die elektrische Ladung gewisser Drahtstellen, d. h. die dort einmündende Anzahl elektrischer Kraftlinien, mit der Zeit ändert.

Aber man übersieht leicht, daß  $\mathfrak{E}_z$  um so kleiner ist, je größer die spezifische Leitfähigkeit  $\sigma$  des Drahtes ist, und daß  $\mathfrak{E}_z$  zur Grenze Null geht, wenn  $\sigma$  ins Unendliche wächst.

Wenn es also wiederum gestattet ist, vom galvanischen Widerstande abzusehen, so gelten die früheren, ohne Rücksicht auf die Induktionswirkung der Verschiebungsströme gewonnenen Resultate.

Wir wollen nun näher sehen, wann diese Vereinfachung gestattet ist. Bezeichnet man die Stromstärke im Drahte, nach elektrostatischem Maße gemessen, durch  $i_e$ , den Widerstand eines Stückes der Länge  $l$  nach elektrostatischem Maße durch  $w_e$ , so ist nach dem Ohmschen Gesetz

$$i_e = \frac{l \mathfrak{E}_z}{w_e}. \quad (50)$$

Die Stromstärke  $i_e$  wird geliefert durch die in die Drahtoberfläche eintretenden Verschiebungsströme. Diese werden durch die an der Drahtoberfläche im umgebenden Isolator (in der Luft) herrschende Kraft  $\mathfrak{E}_\varrho$  getrieben, falls kein Kondensator angehängt ist, was wir zunächst annehmen wollen, und zwar ist nach der Formel (12) des VII. Kapitels auf S. 412 die durch die Verschiebungsströme in den Draht eintretende Stromstärke auf einem Stück der Länge  $l$ :

$$i_e = - \frac{de}{dt} = - \frac{\epsilon}{4\pi} \int \frac{\partial \mathfrak{E}_\varrho}{\partial t} dS = - \frac{\epsilon}{2} l R \frac{\partial \mathfrak{E}_\varrho}{\partial t}. \quad (51)$$

Die elektrische Kraft  $\mathfrak{E}_z$  ist positiv gerechnet in der Richtung  $\rho$  von dem Drahte fort.

Eine Vergleichung von (50) und (51) liefert:

$$\mathfrak{E}_z = - \frac{\varepsilon w}{2} R \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t} = - \frac{\varepsilon w}{2 c^2} R \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t}, \quad (52)$$

falls  $w$  den Widerstand des Stückes der Länge 1 nach elektromagnetischem Maße angibt.

Setzt man in (52) für  $\mathfrak{E}_z$  den nach (31) folgenden Wert ein:

$$\mathfrak{E}_z = - \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial \rho},$$

so wird (49) zu:

$$\frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial t} \cdot \frac{\varepsilon w}{2 c^2} R \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}}{\varphi}. \quad (53)$$

Bei geringem Widerstand  $w$  des Drahtes ist das zweite Glied der rechten Seite dieser Gleichung nur ein Korrektionsglied, in welchem die Näherungsgleichungen benutzt werden können:

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}, \text{ d. h. } \phi = f_1 \left( z - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} t \right) + f_2 \left( z + \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} t \right), \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} &= 0, \text{ d. h. } \varphi = A \lg \rho + B. \end{aligned}$$

Ist noch ein zweiter paralleler Draht zu dem bis jetzt allein betrachteten vorhanden, und ist  $\rho_2$  die senkrechte Entfernung vom zweiten,  $\rho_1$  die vom ersten Draht, so müßte sein

$$\varphi = A_1 \lg \rho_1 + B_1 + A_2 \lg \rho_2 + B_2.$$

Da nach (31) die magnetische Kraft  $\mathfrak{H}_t$  proportional zu  $\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}$  ist, so ist nach früheren Auseinandersetzungen (vgl. oben S. 245)  $A_1$  proportional der Stromstärke  $i_1$  im Drahte 1,  $A_2$  der Stromstärke  $i_2$  im Drahte 2. Ist  $i_1 = -i_2$ , so ist  $A_1 = -A_2$ ,  $B_1 + B_2 = 0$ , d. h.

$$\varphi = A_2 \lg \frac{\rho_2}{\rho_1}.$$

Folglich ist an der Oberfläche des Drahtes 1, d. h. für  $\rho_1 = R$ , näherungsweise zu setzen:

$$\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}}{\varphi} = \frac{-1}{R \lg \frac{d}{R}},$$

falls  $d$  die Entfernung zwischen beiden Drähten (genauer genommen die Entfernung zwischen ihren Achsen) ist.

Da nun nach dem obigen Näherungsausdruck für  $\psi$  die Beziehung besteht:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial t} = \pm \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2},$$

wobei das obere Vorzeichen für die nach  $+z$ -Richtung, das untere für die nach der  $-z$ -Richtung sich fortpflanzende Welle gilt, so kann man für (53) schreiben:

$$\frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \cdot \left( 1 \pm \frac{w \sqrt{\epsilon}}{2c \lg \frac{d}{R}} \right). \quad (54)$$

Hieraus erkennt man, daß der galvanische Widerstand  $w$  die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen nicht merklich beeinflußt, falls

$$w \sqrt{\epsilon} \text{ klein gegen } 2c \lg \frac{d}{R} \quad (55)$$

ist. Unter dieser Bedingung haben also auch die dem Drahte parallelen Verschiebungsströme im Isolator, welche streng nur fortfallen, falls der galvanische Widerstand des Leiters gleich Null ist, keinen Einfluß auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen.

$w$  war der galvanische Widerstand eines Stückes der Länge  $l$  von einem der beiden Drähte. Nennt man jetzt  $w$  den Widerstand des ganzen Drahtsystems, d. h. beider Drähte, so kann das frühere  $w$  höchstens gleich der Hälfte des Gesamt Widerstandes  $w$  beider Drähte sein. Die Bedingung (55) ist daher um so mehr als erfüllt anzusehen, falls ist:

$$w \sqrt{\epsilon} \text{ klein gegen } 4c \lg \frac{d}{R}, \quad (56)$$

wo nun  $w$  den Gesamt Widerstand der ganzen Leitung bedeutet. Für  $\epsilon = 1$ , d. h. falls die Drähte in Luft lagern, geht die Bedingung (56) nahezu über in die oben im Abschnitt 15 des VIII. Kapitels, S. 512 aus ganz anderen Ueberlegungen gewonnene Bedingung (126), nur daß die dortige Zahl  $\pi$  hier durch die Zahl 1 ersetzt ist. Wie nun im obigen Abschnitt 15 gezeigt wurde, ist die Bedingung (126) stets erfüllt, wenn man elektrische Schwingungen längs Metalldrähten (selbst Eisendrähten) entlang sendet. Daraus ist zu schließen, daß auch die Bedingung (56) in diesen Fällen stets erfüllt sein wird.

Hängen am Drahtsystem Kondensatoren, so wird die im Draht fließende Elektrizität nicht nur durch die Radialkräfte  $\mathcal{E}_r$  in die Drahtoberfläche geschoben. In Gleichung (51) ist daher  $i_e > \frac{de}{dt}$ , daher

auch  $\mathcal{E}_z$  größer, als es Gleichung (52) angibt. Die durch den Widerstand verursachte Störung fällt daher größer aus, als sie in der Formel (54) geschätzt ist. Bei Entladungen von Kondensatoren sehr bedeutender Kapazität könnte daher sich wohl ein Einfluß des galvanischen Widerstandes auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen und die Dauer der Grundschwingung bemerklich machen, obwohl die Bedingung (56) erfüllt ist. Für diesen Fall gelten aber die früher auf S. 508 ff. angestellten Ueberlegungen, aus denen hervorgeht, daß selbst bei der Entladung sehr großer Leidener Flaschen durch Metalldrähte der Widerstand derselben die Schwingungsdauer nicht beeinflusst. Daher ist das gleiche zu schließen bei den geringen Kapazitäten, welche an das Drahtsystem bei den Hertzschen und Lecherschen Versuchen angehängt werden.

Aus allem geht also hervor, daß wir bei den hier zu betrachtenden Versuchen den galvanischen Widerstand des Drahtsystems gleich Null setzen können, wenn wir die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen, die Dauer der Eigenschwingungen und die Lage der Maxima und Minima (Bäuche und Knoten) der durch Reflexion hervorgerufenen stehenden Wellen untersuchen wollen, nicht dagegen die beim Fortschreiten der Wellen sich ergebende Abnahme ihrer Amplitude (Dämpfung).

Wir können daher auch zur Untersuchung der genannten Punkte annehmen, daß die elektrische Kraft senkrecht aus der Drahtoberfläche austrete, d. h. wir können in dem die Drähte umgebenden Isolator (Luft)  $\mathcal{E}_z$  gegen  $\mathcal{E}_\rho$  vernachlässigen. Da infolgedessen die im Isolator vorhandenen Verschiebungsströme nur senkrecht gegen die Z-Achse verlaufen, mithin keine elektromotorische Induktionskraft auf die im Drahte verlaufenden Ströme äußern (vgl. oben S. 585), so gelten alle in Abschnitt 12—14 des VIII. Kapitels mit Vernachlässigung dieser Induktionskraft gewonnenen Resultate.

Die hier gestellte Aufgabe ist also durch die dortigen Untersuchungen schon als völlig gelöst zu betrachten. Es mag nur noch darauf hingewiesen werden, daß nach dem in diesem Abschnitt gewählten Ausgangspunkte der Theorie, welcher wesentlich an die im umgebenden Isolator stattfindenden Werte der elektrischen und magnetischen Kraft anknüpft, nicht, wie in Abschnitt 10—15 des VIII. Kapitels, an die Vorgänge im Draht selbst, zwei Punkte als notwendige Folgerungen gezogen werden, während dort einer von ihnen in gewisser Weise als willkürlich angenommen erscheint. Nämlich:

1. Es folgt nach dem hier gewählten Ausgangspunkt der Theorie mit Notwendigkeit, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen nur von der Natur des die Drähte umgebenden Isolators abhängt, wenn der galvanische Widerstand der Drähte nach Maßgabe der Gleichung (56)

zu vernachlässigen ist. Unter dieser Bedingung pflanzt sich daher eine elektrische Strömung auch längs eines in Luft lagernden Eisendrahtes mit der Geschwindigkeit  $c$  fort. Nach der früheren Theorie (Abschnitt 10) mußte man zur Erreichung dieses Resultates annehmen, daß der ganze im Drahte fließende Strom nur in der äußersten Oberflächenschicht des Drahtes vorhanden sei. Dies ist zwar keine willkürliche Annahme, es ist aber besser, wenn man, wie hier, dieselbe nicht direkt nötig hat.

2. Da für  $\mathfrak{E}_z = 0$  nach S. 586

$$\varphi(\rho) = A \lg \rho + B$$

ist, so folgt nach den Gleichungen (31), S. 537:

$$\mathfrak{E}_t = + \frac{\varepsilon}{c} A \frac{\partial \psi}{\partial t} \cdot \frac{1}{\rho}, \quad \mathfrak{E}_z = - A \frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot \frac{1}{\rho}.$$

Die magnetische bzw. elektrische Kraft ist also wirklich dieselbe, wie sie nach S. 246 und S. 495 entstehen würde, falls im ganzen Draht dieselbe Stromstärke (nach elektromagnetischem Maße)

$$i = + \frac{A}{2} \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t},$$

herrschte und der Draht überall dieselbe Ladung (nach elektrostatischem Maß) auf der Längeneinheit

$$e = - \frac{A}{2} \varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

besäße. Dieses Resultat gilt also auch für kurze Wellen, bei denen in Wirklichkeit schon in kurzen Drahtstrecken die Stromstärke  $i$  bzw. die Ladungsdichte  $e$  merklich variiert.

Im Kapitel VIII, Abschnitt 12 war dieses Resultat als Hypothese angenommen. Die dort benutzte Gleichung (95), nämlich:

$$\frac{\partial i}{\partial z} = - \frac{1}{c} \frac{\partial e}{\partial t},$$

welche als Inkompressibilitätsbedingung der Elektrizität gedeutet werden kann, wird natürlich auch hier bestätigt, wie ein Blick auf die beiden soeben für  $i$  und  $e$  hingeschriebenen Gleichungen lehrt.

Aus den schon im VI. Kapitel auf S. 391 angestellten Ueberlegungen folgt, daß die Hertz'schen Schwingungen schon dicht unter der Oberfläche der Metalldrähte verschwinden müssen, da die Wechselzahl eine sehr hohe ist. Dies konnte nun auch Hertz<sup>1)</sup> experimentell nachweisen, indem er an einer Stelle des Leitungsdrahtes einen mit Goldpapier von  $\frac{1}{20}$  mm Metaldicke überklebten Kasten einfügte. Dieser übernahm die Fortleitung der Wellen vollständig, indem er jegliche Funkenbildung in seinem Innern verhütete, welche zwei Drahtstücke,

<sup>1)</sup> H. Hertz, Wied. Ann. **37**, S. 395, 1889.

die auf der Innenseite des Kastens mit den Leitungsdrähten verbunden waren, sonst gezeigt haben würden, wenn ihre Enden einander genügend genähert wurden. Die Schwingungen dringen also weniger als  $\frac{1}{20}$  mm tief in das Metall ein. Wir werden weiter unten noch Versuche von Bjerknes kennen lernen, durch die quantitativ die Tiefe des Eindringens der Schwingungen in Metalle gemessen ist.

Eine strenge Berechnung des Problems der Wellen an zwei parallelen Drähten, deren gegenüberliegende Elemente jeweils entgegengesetzt geladen sind, ist von G. Mie gegeben worden<sup>1)</sup>. Doch müssen wir uns hier mit dem Hinweis auf diese Arbeit begnügen. Die Theorie der Wellen an einem Drahte, der von einem coaxialen leitenden Zylinder umschlossen ist, hat J. J. Thomson entwickelt<sup>2)</sup>, während A. Sommerfeld die Theorie der Drahtwellen an einem einzelnen frei im Isolator liegenden Drahte behandelt hat<sup>3)</sup>.

## 18. Resonanzerscheinungen bei Drahtwellen.

Als Lecher an das Ende  $E_2$  seines Drahtsystems in der oben auf S. 581 beschriebenen Versuchsanordnung einen Kondensator anhängte und eine Glasröhre über seine Platten legte, welche stark verdünnten Stickstoff enthielt (in welchem sich zweckmäßig eine Spur Terpentindampf befindet), leuchtete diese lebhaft auf, wenn elektrische Schwingungen durch das Drahtsystem geschickt wurden. Dieses Leuchten der Röhre verschwand im allgemeinen, wenn die Drähte durch einen Metallbügel leitend überbrückt wurden. Nur für ganz bestimmte Stellungen der Brücke leuchtete die Röhre wieder lebhaft auf. Lecher deutete diese Erscheinung in der Weise, daß bei diesen bestimmten Stellungen Resonanz zwischen den beiden Teilen des Drahtsystems besteht, in welche es durch die aufgelegte Brücke geteilt ist. Diese der Natur des ganzen Vorgangs offenbar entsprechende Auffassung bedarf nur insofern einer genaueren Prüfung, als die Frage zu beantworten ist, wie die miteinander resonierenden Teile abgegrenzt zu denken sind. Lecher selbst und nach ihm Cohn und Heerwagen<sup>4)</sup>, die die Vorgänge auf einem solchen Drahtsystem sorgfältig untersuchten, waren der Ansicht, daß die Platten  $A_1$ ,  $A_2$  (Fig. 74) nebst der Funkenstrecke als primäres, erregendes System aufzufassen wären; das Drahtsystem mit den Platten  $B_1$ ,  $B_2$  einerseits und dem Endkondensator andererseits soll durch diese

<sup>1)</sup> G. Mie, Ann. d. Physik (4) 2, S. 201, 1900.

<sup>2)</sup> J. J. Thomson, Recent researches in electricity and magnetism. Oxford 1893, S. 262.

<sup>3)</sup> A. Sommerfeld, Wied. Ann. 67, S. 233, 1899.

<sup>4)</sup> E. Cohn und F. Heerwagen, Wied. Ann. 43, S. 343, 1891.

Schwingungen angeregt werden und in zwei durch die Brücke getrennten Abteilungen schwingen. Dieser Auffassung hat Drude <sup>1)</sup> die folgende einfachere gegenübergestellt. Das aus der Funkenstrecke, den beiden Plattenpaaren  $A_1B_1$  und  $A_2B_2$  und den Paralleldrähten bis zur Brücke bestehende System schwingt als Ganzes; es stellt einen Thomsonschen Schwingungskreis dar, der nur statt einer, zwei hintereinander geschaltete Kapazitäten enthält. Die Schwingungsdauer dieses Kreises ist in weiten Grenzen veränderlich mit der Brückenlage; denn je näher die Brücke den Platten  $B_1B_2$  liegt, um so kleiner ist die Selbstinduktion des Systems und um so kürzer wird die Schwingungsdauer. Bei einer Brückenlage, für die die Röhre leuchtet, steht dieses System in Resonanz mit dem zweiten durch die Brücke einerseits und dem Endkondensator andererseits begrenzten Teil der Paralleldrähte. Diese Resonanz aber ist, wie Lecher fand, nicht bloß für eine, sondern für eine ganze Reihe verschiedener Brückenlagen möglich. Das erklärt sich aus den verschiedenen Schwingungsmöglichkeiten, die ein System von der Art des zweiten Systems nach den Ergebnissen unserer Untersuchung in Kapitel VIII, Abschnitt 14, S. 503 ff. besitzt. Es gibt eine mittlere Brückenlage, bei der das zweite System seine Grundschwingung ausführt. Verschiebt man von dieser Lage aus die Brücke nach den Platten  $BB'$  hin, so findet man in größerer Nähe dieser Platten eine zweite Resonanzlage. Für diese schwingt das jetzt vorhandene zweite System in der ersten Oberschwingung, wie man sofort dadurch nachweisen kann, daß es zwischen der ersten Brücke und dem Endkondensator noch eine Stelle gibt, die sich überbrücken läßt, ohne das Leuchten zu stören, also einen Knoten der Schwingung innerhalb des zweiten Systems. Legt man eine Geißlersche Röhre über die Drähte und verschiebt sie zwischen den beiden Brücken, so leuchtet sie an den Brücken garnicht, mit wachsender Entfernung von ihnen immer stärker und am stärksten in der Mitte zwischen den Brücken. Man kann also auch sagen, das zweite System besteht jetzt aus zwei Teilen, die miteinander und mit dem ersten System in Resonanz stehen: dem Teil, der zwischen dem Endkondensator und der zweiten Brücke liegt, und demjenigen, der aus dem zwischen den beiden Brücken liegenden Stück der Paralleldrähte besteht. Hier bilden die beiden Brücken die Knoten der Potentialschwingung, die zwischen ihnen ihren Bauch hat, und der Abstand der Brücken entspricht einer halben Wellenlänge der gegebenen Schwingung.

Verschiebt man die erste Brücke noch weiter nach  $BB'$  hin, so findet man eine dritte Resonanzlage und kann durch Auflegen von zwei weiteren Brücken nachweisen, daß das zweite System jetzt in der Form

<sup>1)</sup> P. Drude, Wied. Ann. 61, S. 631, 1897.



der zweiten Oberschwingung schwingt mit Unterteilung durch zwei Knoten usw. Cohn und Heerwagen konnten in der genannten Arbeit an einem Drahtsystem von 11 m Länge die Unterabteilungen bis zu sechs Knoten verfolgen.

Die ausgepumpte Glasröhre reagiert auf die Ladungswelle. Sie tut dies noch empfindlicher, ohne merkbare Störung auf sie auszuüben, wenn sie mit eingeschmolzenen Elektroden versehen wird, welche direkt mit den Drähten in leitende Verbindung gesetzt werden. An Stelle solcher Röhren kann man sich nach Rubens auch zweckmäßig der oben S. 581 beschriebenen „Flaschen“ bedienen, welche zu einem Bolometer führen. Auch die von Rubens beobachteten Stellungen der Brücke, bei welchen die Flaschen am Ende  $E_2$  eine maximale Erwärmung des Bolometerwiderstandes herbeiführen, stimmen überein mit der genannten Theorie.

## 19. Messung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Drahtwellen.

Die zuletzt beschriebene Erscheinung gibt ein Mittel an die Hand, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Drahtwellen zu messen. Zu dem Zwecke braucht man nur ziemlich nahe an das Ende  $E_2$  der Drähte, welche einen Kondensator der Kapazität  $C$  enthalten, eine Brücke  $b_0$  so aufzulegen, daß eine am Ende  $E_2$  angehängte Vakuumröhre lebhaft leuchtet, und diejenigen Stellungen anderer Brücken  $b_1, b_2 \dots$  jenseit  $b_0$  aufzusuchen, welche das Leuchten der Vakuumröhre nicht verlöschen. Die Entfernung dieser Brücken voneinander oder von  $b_0$  ergibt die halbe Wellenlänge  $\frac{1}{2} \lambda$  der Schwingung, während die Schwingungsdauer  $T$  aus der Gleichung (112) der S. 505 zu berechnen ist, nämlich aus:

$$\frac{2\pi l}{Tc} \operatorname{tg} \frac{2\pi l}{Tc} = \frac{1}{4c^2 C \lg \frac{d}{R}} = \frac{1}{4C_0 \lg \frac{d}{R}}, \quad (57)$$

wobei  $l$  den Abstand der Brücke  $b_0$  vom Ende  $E_2$  bedeutet,  $C$  die Kapazität des dort befindlichen Kondensators nach elektromagnetischem Maße,  $C_0$  dieselbe nach elektrostatischem Maße<sup>1)</sup>.

Kennt man nun die Wellenlänge  $\lambda$  der Schwingung und ihre Periode  $T$ , so ergibt der Quotient  $\lambda : T$  die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen. — Dieser Weg zu ihrer Berechnung, auf den schon oben auf S. 560 bei Besprechung der stehenden elektrischen Wellen

<sup>1)</sup> In welcher Weise die Schwingungsdauer aus der Kapazität der am Ende  $E_2$  der Drähte beim Erreger liegenden Kondensatoren zu berechnen sei, hat E. Salvioni untersucht in Rend. R. Acc. dei Lincei (5), 1. Sem., 1, S. 206, 1892.

in Luft hingewiesen wurde, führt hier deshalb sicherer zum Ziel als dort, weil die Schwingungsdauer eines Systems sich mit weit größerer Sicherheit berechnen läßt, wenn die Enden des Leiters eine größere Kapazität besitzen, als wenn sie, wie bei den dort angewandten Resonatoren, in eine kleine Kugel bzw. Spitze auslaufen.

Auf diese Weise ist zuerst Lecher zu einem Werte der Fortpflanzungsgeschwindigkeit gelangt. Die von ihm angewandte Berechnung von  $T$  ist allerdings nicht einwandfrei, wie Cohn und Heerwagen bemerkten; wir können jedoch die Lecherschen Beobachtungsdaten verwenden, wenn wir die richtige Formel (57) zur Berechnung von  $T$  anwenden.

Der Kondensator bestand aus zwei kreisförmigen Platten vom Radius  $R' = 8,96$  cm, welche einen Abstand  $d'$  von 0,99 cm voneinander besaßen. Nach S. 53 ist daher die Kapazität

$$C_e = \frac{\pi R'^2}{4\pi d'} = \frac{R'^2}{4d'} = 20,4.$$

Ferner war  $l = 130$  cm,  $R = 0,05$  cm,  $d = 31$  cm. Daraus berechnet sich die rechte Seite der Gleichung (57) zu 0,248. Durch numerische Interpolation findet man daraus

$$\frac{2\pi l}{Tc} = 0,478,$$

d. h.

$$T = 570 \cdot 10^{-10} \text{ sek.}$$

Den Abstand einer Brücke  $b_1$  von der Brücke  $b_0$  fand Lecher zu 940 cm. Daraus folgt

$$\lambda = 1880 \text{ cm}$$

und

$$\lambda : T = 3,3 \cdot 10^{10} \text{ cm sek}^{-1}.$$

Diese Zahl für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen stimmt ziemlich nahe überein mit der Zahl  $c = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm sek}^{-1}$ , welche nach der Theorie die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen darstellen sollte. Diese Uebereinstimmung wird nun noch weit besser bei Benutzung der oben zitierten Versuche von Cohn und Heerwagen, welche die Kapazität ihres Kondensators nicht nur berechneten, sondern auch nach der Stimmgabelmethode (vgl. oben S. 354) experimentell bestimmt haben. Sie haben allerdings aus ihren Beobachtungen nicht die Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $c$  berechnet, sondern sie haben die Richtigkeit der Theorie auf Grund der Annahme, daß  $c$  gleich der Lichtgeschwindigkeit wäre, dadurch geprüft, daß sie für jedes von ihnen beobachtete System von Knoten die Größe  $l$ , d. h. den Abstand der letzten Brücke vom Endkondensator nach der Formel (57) berechneten; dabei wurde für  $Tc$

die Wellenlänge  $\lambda$  als das Doppelte des gemessenen Abstandes zweier benachbarter Knoten in die Formel eingeführt. Die Uebereinstimmung der Berechnung mit den Beobachtungen spricht für die Richtigkeit der Annahme.

Wie oben bei dem Problem der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrischen Wellen in freier Luft, so würde auch hier die genaue empirische Ermittlung des Wertes der Fortpflanzungsgeschwindigkeit an Drähten verlangen, daß nicht bloß die Wellenlänge, sondern auch die Schwingungsdauer experimentell bestimmt würde. Auch hier scheitert dies an der Kleinheit der Größe  $T$ . Macht man aber die Drahtleitungen genügend lang, so lassen sich Wellen erzeugen, deren Schwingungsdauer durch Photographie der Funken mit Hilfe eines sehr schnell rotierenden Spiegels direkt gemessen werden kann. Solche Untersuchungen haben Trowbridge und Duane<sup>1)</sup> an einer 58,6 m langen Leitung von Paralleldrähten angestellt, auf der sie Wellenlängen von 56,77 m abgrenzen konnten, während die Funkenphotographien eine Schwingungsdauer von  $1,8907 \times 10^{-7}$  sek. ergaben. Sie erhielten im Mittel daraus für  $c$  den Wert  $3,003 \times 10^{10}$  cm sek<sup>-1</sup>.

Auf einem ganz anderen Wege hat kürzlich Gutton<sup>2)</sup> die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Drahtwellen direkt mit derjenigen des Lichtes verglichen. Die von einem Blondlotschen Erreger (über diesen siehe weiter unten) erzeugten Wellen verzweigen sich auf zwei lange Paralleldrähteleitungen. Die eine von ihnen endet in einer kleinen zwischen den beiden Drähten befindlichen Funkenstrecke, in der die Wellen einen periodisch leuchtenden Funken erzeugen. Die andere endet in einem Kondensator, dessen Platten in einem mit Schwefelkohlenstoff gefüllten Gefäß stehen. Hier erzeugen die periodisch wechselnden Ladungen der Platten in dem Schwefelkohlenstoff zwischen ihnen eine in dem gleichen Zeitmaß periodisch auftretende Doppelbrechung, die man wahrnimmt, wenn man durch die zwischen gekreuzten Nicols befindliche Kondensatorschicht nach einer Lichtquelle blickt. Gutton benutzt als Lichtquelle den im gleichen Zeitmaß oszillierenden Funken der ersten Leitung. Beobachtet man diesen Funken durch den Kondensator hindurch, während man die Länge der zweiten, zum Kondensator führenden Leitung mit Hilfe eines Posaunenauszeuges verändert, so erscheinen für ganz bestimmte Längen der Leitung Maxima und für andere dazwischen liegende Längen Minima der Helligkeit des Funkens. Die Maxima treten dann auf, wenn das vom Funken im Augenblick seiner größten Stärke ausgesandte Licht in dem Augenblicke durch den Kondensator geht, in dem der Schwefel-

<sup>1)</sup> J. Trowbridge und W. Duane, Phil. Mag (5) 40, S. 211, 1895.

<sup>2)</sup> C. Gutton, Journ. d. Phys. (5) 2, S. 41, 1912.

kohlenstoff das Maximum seiner Doppelbrechung besitzt, während dies Licht nicht wahrgenommen wird, wenn bei seinem Durchgange durch den Kondensator die Doppelbrechung gerade Null ist. Gutton stellte nun auf ein solches Minimum ein, während die Funkenstrecke von dem Kondensator weit entfernt war. Dann wurde die Funkenstrecke in die Nähe des Kondensators gerückt, was einer Annäherung um 36 m entsprach, und die erste Drahtleitung um die gleiche Strecke bis zur neuen Lage der Funkenstrecke verlängert. Bei der ersten Beobachtung durchlief das Licht des Funkens, bei der zweiten die elektromagnetische Welle die 36 m. Stimmt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit beider überein, so muß die Einstellung auf das Minimum der Funkenhelligkeit nach der Verschiebung unverändert sein. Das war sehr nahe der Fall. Doch ergab die genauere Beobachtung, daß die zweite Leitung nach der Annäherung der Funkenstrecke etwas verlängert werden mußte. Danach würde also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Drahtwelle ein wenig kleiner sein als die Lichtgeschwindigkeit. Die Differenz fand Gutton um so größer, je dünner der Draht ist und je langsamer die Schwingungen verlaufen, und sie hängt außerdem vom Material des Drahtes ab. Die von Gutton beobachteten Differenzen betragen etwa ein halbes Prozent der Lichtgeschwindigkeit.

Auf Grund aller dieser Versuche kann man jedenfalls in erster Annäherung sagen, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen, welche sich längs der in Luft lagernden Drähte fortpflanzen, den Wert der Lichtgeschwindigkeit  $c = 3 \cdot 10^{10}$  cm sek<sup>-1</sup> besitzt.

## 20. Die Kapazität eines Plattenkondensators für elektrische Schwingungen.

Ein gewisses Bedenken gegen die Beweiskraft der im vorigen Abschnitt genannten älteren Versuche bleibt noch übrig: zur Berechnung oder experimentellen Bestimmung des Kondensators sind statische oder langsam (mit der Periode der Stimmgabel) veränderliche elektrische Zustände angenommen. Die so gefundene Kapazität kann von der für sehr schnelle Schwingungen gültigen abweichen. Wegen der Selbstinduktion müssen sich nämlich offenbar, gerade wie oszillierende Ströme in einem Metalldrahte, die im Isolator des Kondensators vorhandenen Verschiebungsströme dichter nach seinem Rande drängen, so daß die Kapazität für schnelle Stromwechsel kleiner sein muß, als für sehr langsame.

Es handelt sich nun darum, zu untersuchen, ob in den genannten Versuchen diese Aenderung der Kapazität merklich ist, so daß die mit Benutzung der statischen Kapazität berechnete Schwingungsdauer einen

merklichen Fehler enthält, oder nicht. Die Größe dieser Korrektur haben Cohn und Heerwagen geschätzt.

Setzen wir voraus (wie es den Versuchen entspricht), der Kondensator bestünde aus zwei kreisförmigen Platten vom Radius  $R'$  und dem konstanten Abstand  $d'$ , der klein im Vergleich zu  $R'$  sein soll, und legen wir die Z-Achse in die Zentralachse des Kondensators, so ist in der Bezeichnung des Abschnittes 7 die elektrische Kraft  $\mathfrak{E}_z = 0$  zu setzen, da bei guter Leitfähigkeit der Kondensatorplatten die elektrische Kraft senkrecht auf ihrer Oberfläche steht (vgl. oben S. 588) und die Kondensatorplatten so nahe beisammen sein sollen, daß in ihrem Zwischenraum ein merklicher Richtungsunterschied der elektrischen Kraftlinien gegen ihre Richtung an den Kondensatorplatten selbst nicht auftreten kann. — Es ist also nach (31) (S. 537) II als unabhängig von  $z$  anzunehmen, da es von  $\rho$  abhängen muß, weil sonst nach (32)  $\mathfrak{E}_z$  verschwände.

Die Differentialgleichung (30) für II wird daher (für  $\mu = 1$ )

$$\frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Pi}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \rho^2}.$$

Für ungedämpfte Schwingungen von nur einerlei Periode  $T$  ist nun zu setzen:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} = - \frac{4\pi^2}{T^2} \Pi,$$

daher muß sein, falls man für  $Tc$  die Wellenlänge  $\lambda$  der Schwingungen schreibt:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Pi}{\partial \rho} + \frac{4\pi^2 \varepsilon}{\lambda^2} \Pi = 0.$$

Dieses ist die Differentialgleichung der sogenannten Besselschen Funktionen. Man kann, wie in der Theorie derselben gelehrt wird, für die bei  $\rho = 0$  endlich bleibenden Funktionen eine Reihenentwicklung nach steigenden Potenzen von  $\rho^2$  vornehmen. Die Koeffizienten dieser Entwicklung haben die Werte (es ist im folgenden  $\varepsilon = 1$  gesetzt, da es sich bei den Versuchen um Luftkondensatoren handelt)

$$\Pi = f(t) \left[ 1 - \left( \frac{2\pi\rho}{\lambda} \right)^2 \cdot \frac{1}{2^2} + \left( \frac{2\pi\rho}{\lambda} \right)^4 \cdot \frac{1}{(2 \cdot 4)^2} - \dots \right],$$

wie man sich sofort überzeugen kann durch Einsetzen dieses Wertes von  $\Pi$  in seine Differentialgleichung. Nach (32) ergibt sich daher  $\mathfrak{E}_z$  zu

$$\mathfrak{E}_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Pi}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \rho^2} = - \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \Pi = - \frac{4\pi^2}{\lambda^2} f(t) \left\{ 1 - \left( \frac{2\pi\rho}{\lambda} \right)^2 \cdot \frac{1}{2^2} + \dots \right\}.$$

Die Flächendichte  $\eta$  der elektrischen Ladung einer Kondensatorplatte an einer bestimmten Stelle  $\rho$  ist

$$\eta = \frac{\mathcal{E}_z}{4\pi}.$$

Daher ist die auf einem von den Radien  $\rho$  und  $\rho + d\rho$  begrenzten Kreisring lagernde Elektrizitätsmenge

$$de = \eta \cdot 2\pi\rho d\rho = -\frac{\mathcal{E}_z\rho d\rho}{2}.$$

Die ganze auf einer Kondensatorplatte lagernde Elektrizitätsmenge ist folglich:

$$e = \int_{\rho=0}^{\rho=R'} de = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2} f(t) \left\{ \frac{R'^2}{2^2} - \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \frac{R'^4}{2^4} + \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^4 \frac{R'^6}{2^6 \cdot 3} - \dots \right\}.$$

Aus den beiden Formeln für  $e$  und  $\mathcal{E}_z$  erkennt man, daß man die Formeln der Statik erhält, nämlich:

$$e = \frac{R'^2}{4} \mathcal{E}_z = \frac{R'^2}{4d'} (V_1 - V_2),$$

d. h. für die Kapazität:

$$C_0 = \frac{R'^2}{4d'},$$

sowie  $\left( \frac{2\pi\rho}{\lambda} \right)^2 \cdot \frac{1}{2^2}$  gegen 1 zu vernachlässigen ist, d. h. sowie das Quadrat des halben Umfanges der Kondensatorplatten gegen das Quadrat der Wellenlänge der Schwingungen zu vernachlässigen ist.

Dies war nun aber bei den Versuchen stets der Fall. Denn bei dem oben berechneten Versuch von Lecher ist  $R' = 8,96$ ,  $\lambda = 1880$ , daher

$$\left( \frac{\pi R'}{\lambda} \right)^2 = 0,00022,$$

während dieses Verhältnis bei den Versuchen von Cohn und Heerwagen im ungünstigsten Falle  $\frac{1}{144}$  betrug. — Diese Werte kann man aber gegen 1 vernachlässigen, so daß für die schnellen Schwingungen die Kapazität der Kondensatoren dieselbe ist, wie für statische Zustände oder langsame Schwingungen.

## 21. Der Einfluß der Brücke.

Für die genaue Ermittlung der Wellenlänge auf einem Lecherschen Drahtsystem bedarf noch die Frage einer Erörterung, wieweit die Erscheinungen auf den Drähten durch das Vorhandensein der Brücke beeinflusst werden. Die Theorie der stehenden Drahtwellen ist nach dem

Erscheinen der ersten Auflage dieses Buches von Drude in einer größeren Arbeit behandelt worden<sup>1)</sup>. Wir entnehmen dieser Arbeit die nachfolgende Beantwortung der gestellten Frage in vereinfachter Form.

Die in Abschnitt 18 beschriebenen Resonanzerscheinungen können aufgefaßt werden als stehende Wellen auf dem Drahtsystem, die geradeso wie die in Abschnitt 10 behandelten stehenden Wellen in Luft durch Reflexion eines an den Drähten fortschreitenden Wellenzuges entstehen. Denken wir uns ein unendlich langes System von Paralleldrähten und einen Wellenzug an ihm fortschreitend in einer Richtung, die wir als positive  $z$ -Richtung nehmen wollen. Werden die Drähte an einer beliebigen Stelle  $z = b$  überbrückt, so findet an dieser Stelle eine Reflexion des Wellenzuges statt. Formuliert man die Bedingung, die an der Brücke erfüllt sein muß, so wie es in Formel (98) des VIII. Kapitels geschehen ist, so würde die Reflexion eine vollständige sein. Die Erfahrung lehrt, daß dies nicht ganz zutrifft. Die früher benutzte Brückenbedingung wird also nicht streng erfüllt sein. An ihre Stelle treten bei genauerer Diskussion die folgenden Bedingungen.

An der Brücke tritt eine Stromverzweigung ein, indem der zufließende Strom  $i$  zum Teil als Brückenstrom  $i'$ , zum Teil als Strom  $i''$  an den Paralleldrähten über die Brücke hinausfließt. Für die Brücke, deren Länge  $l$  und deren Widerstand  $w'$  sein soll, ist dann nach dem Ohmschen Gesetz:

$$i'w' = E_1' + E_2', \quad (58)$$

wobei  $E_1'$  die (längs  $l$  summierte) Induktionskraft, welche durch Änderungen des Stromes  $i'$  entsteht,  $E_2'$  die elektrische Kraft bedeutet, die infolge der Ladungen  $e$  der Paralleldrähte an den Stellen  $z = b$  in der Brücke wirksam ist. Diese Ladungen sollen also nicht mehr, wie früher angenommen, gleich Null sein. Es soll aber abgesehen werden davon, daß auch auf der Brücke selbst Ladungen auftreten, d. h. es soll  $i'$  in der ganzen Länge der Brücke als gleich angenommen werden, was gestattet ist, wenn  $l$  nicht sehr groß ist.

Für die Induktionskraft  $E_1'$  besteht die Gleichung:

$$E_1' = -L \cdot l \frac{\partial i'}{\partial t}, \quad (59)$$

wenn  $L$  den Koeffizienten der Selbstinduktion für die Längeneinheit längs der Brücke bedeutet, eine Größe, für die sich ein strenger Wert allerdings nicht angeben läßt. Für den geraden Draht  $w$  der Länge  $l$  beim Hertzschen Erreger würde sich aus Formel (17) dieses Kapitels als Wert der Selbstinduktion für die Längeneinheit ergeben:

<sup>1)</sup> P. Drude, Abhandl. der math.-phys. Klasse der kgl. sächs. Gesellsch. der Wiss. 23, S. 63, 1896. — Wied. Ann. 60, S. 1. 1897.

$$L = 2 \log \frac{l}{R}.$$

Bildet die Brücke eine gerade Verbindung zwischen zwei einander gegenüberliegenden Punkten der Drähte, so würde  $l$  gleich dem Abstand  $d$  der Paralleldrähte sein, also, wenn obige Formel auf diesen Fall übertragen werden dürfte,

$$L = 2 \log \frac{d}{R}.$$

Aber die Uebertragung ist nicht ohne weiteres einleuchtend. Im allgemeinen wird man erwarten, daß  $L$  größer ist als jener Wert. Aber wegen der geringen Aenderung des  $\log$  mit seinem Argument wird  $L$  jedenfalls von gleicher Größenordnung wie  $2 \log \frac{d}{R}$  sein.

Die elektrische Kraft  $E_2'$  folgt aus Formel (90) und der folgenden Formel des VIII. Kapitels, wenn man berücksichtigt, daß  $E_2' = V_1 - V_2$ , d. h. gleich der Potentialdifferenz der gegenüberliegenden Punkte der Paralleldrähte ist:

$$E_2' = 4e \log \frac{d}{R}$$

in elektrostatischem Maße, oder

$$E_2' = 4ec \cdot \log \frac{d}{R} \quad (60)$$

in elektromagnetischem Maße. Vernachlässigt man nun den Widerstand der Brücke, so ergibt (58) die Gleichung:

$$Ll \frac{\partial i'}{\partial t} = 4ec \log \frac{d}{R} \text{ für } z = b \quad (61)$$

als erste Brückenbedingung. Als weitere kommen dazu die Gleichungen:

$$i = i' + i'' \text{ für } z = b \quad (62)$$

und

$$e = e'' \text{ für } z = b. \quad (63)$$

Dabei bedeutet  $e''$  die elektrische Ladung der Längeneinheit der Drähte hinter der Brücke.

Es möge der Einfachheit halber eine zeitlich und räumlich ungedämpfte Welle angenommen werden, die an den Drähten in Richtung der  $+Z$ -Achse entlang läuft. Sie trifft die Brücke bei  $z = b$  und spaltet sich hier in eine zurücklaufende und eine darüber hinauslaufende Welle. Die ursprüngliche Welle werde durch  $e_i$ ,  $i_i$ , die reflektierte durch  $e_r$ ,  $i_r$ , die weiterlaufende durch  $e''$ ,  $i''$  bezeichnet. Der allgemeine Typus einer in der  $+Z$ -Achse fortschreitenden Welle ist  $A \cdot \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} \right)$ . Um die Strecken von der Brücke an zu zählen, setzen wir



$$z = b + z'$$

und schreiben entsprechend für die drei Wellen:

$$\left. \begin{aligned} e_i &= A \cdot \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{b}{\lambda} - \frac{z'}{\lambda} \right) \\ e_r &= A_r \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{b}{\lambda} + \frac{z'}{\lambda} + \Delta \right) \\ e'' &= A'' \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{b}{\lambda} - \frac{z'}{\lambda} + \Delta'' \right) \end{aligned} \right\} (64)$$

wobei  $\Delta$  und  $\Delta''$  die an der Brücke eintretenden Phasenänderungen bedeuten. Unter Berücksichtigung der Gleichung (95) des VIII. Kapitels, die hier lauten würde:

$$\frac{\partial i}{\partial z} = - \frac{1}{c} \frac{\partial e}{\partial t},$$

folgt aus (64) das weitere Gleichungssystem:

$$\left. \begin{aligned} i_i &= A \cdot \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{b}{\lambda} - \frac{z'}{\lambda} \right) \\ i_r &= -A_r \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{b}{\lambda} + \frac{z'}{\lambda} + \Delta \right) \\ i'' &= A'' \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{b}{\lambda} - \frac{z'}{\lambda} + \Delta'' \right) \end{aligned} \right\} (65)$$

Der vollständige Zustand vor der Brücke ist dann durch die Summen  $e = e_i + e_r$  und  $i = i_i + i_r$  gegeben:

$$\begin{aligned} e &= \left\{ A \cos 2\pi \frac{z'}{\lambda} + A_r \cos 2\pi \left( \frac{z'}{\lambda} + \Delta \right) \right\} \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{b}{\lambda} \right) \\ &\quad + \left\{ A \sin 2\pi \frac{z'}{\lambda} - A_r \sin 2\pi \left( \frac{z'}{\lambda} + \Delta \right) \right\} \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{b}{\lambda} \right), \\ i &= \left\{ A \cos 2\pi \frac{z'}{\lambda} - A_r \cos 2\pi \left( \frac{z'}{\lambda} + \Delta \right) \right\} \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{b}{\lambda} \right) \\ &\quad + \left\{ A \sin 2\pi \frac{z'}{\lambda} + A_r \sin 2\pi \left( \frac{z'}{\lambda} + \Delta \right) \right\} \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{b}{\lambda} \right). \end{aligned}$$

Aus (63) folgt dann zunächst:

$$\left. \begin{aligned} A'' \cos 2\pi \Delta'' &= A + A_r \cos 2\pi \Delta \\ A'' \sin 2\pi \Delta'' &= A_r \sin 2\pi \Delta \end{aligned} \right\} (66)$$

Auf Grund von (62) läßt sich mit Hilfe der Ausdrücke (65) der Wert für  $i' = i - i''$  berechnen. Er nimmt, wenn man noch (66) berücksichtigt, die Form an:

$$i' = -2A_r \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{b}{\lambda} + \Delta \right).$$

Dieser Wert und der Wert für  $e$  nach (63) und (64) in die Gleichung (61) eingesetzt, führen zu einer Gleichung, die, weil sie für jeden Wert von  $t$  gelten soll, in die zwei Gleichungen zerfällt:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\pi L l}{\lambda \lg \frac{d}{R}} A_r \cos 2\pi \Delta &= -A_r \sin 2\pi \Delta \\ \frac{\pi L l}{\lambda \lg \frac{d}{R}} A_r \sin 2\pi \Delta &= A + A_r \cos 2\pi \Delta \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

Daraus folgt:

$$\operatorname{tg} 2\pi \Delta = -\frac{\pi L l}{\lambda \lg \frac{d}{R}}, \quad (68)$$

$$A_r = -A \cos 2\pi \Delta = \frac{-A}{\sqrt{1 + \frac{\pi^2 L^2 l^2}{\lambda^2 \left(\lg \frac{d}{R}\right)^2}}} \quad (69)$$

und in Verbindung mit (66)

$$\operatorname{tg} 2\pi \Delta'' = -\operatorname{ctg} 2\pi \Delta, \quad (70)$$

$$A'' = A \sin 2\pi \Delta. \quad (71)$$

Aus (68) ist ersichtlich, daß  $\operatorname{tg} 2\pi \Delta$  nur dann gleich Null sein würde, wenn  $l$ , die Länge der Brücke, gleich Null wäre. Dann würde  $\Delta = \frac{1}{2}$ ,  $A_r = A$  und  $A''$  gleich Null sein. An einer unendlich kurzen Brücke würde also vollständige Reflexion und kein Fortschreiten der Welle über die Brücke hinaus stattfinden. Die Brücke hat aber immer wenigstens die Länge des Abstandes  $d$  der beiden Paralleldrähte. Ist dieser sehr klein, so wirkt die Brücke stark reflektierend. Um die Wirkung dann in stärkerem Maße über die Brücke hinausgelangen zu lassen, empfiehlt es sich, die Brücke zu verlängern, indem man ihr die Gestalt eines längeren, auf den Drähten hängenden Bügels  $l$  gibt. Auf jeden Fall ist die Phasenänderung  $\Delta$  bei endlicher Brücke kleiner als  $\frac{1}{2}$ . Setzen wir  $2\pi \Delta = \pi - \varphi$ , oder  $\Delta = \frac{1}{2} - \frac{\varphi}{2\pi}$ , so ist.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\pi L l}{\lambda \lg \frac{d}{R}} \quad (72)$$

und  $\varphi$  ist ein Maß für die durch die endliche Länge der Brücke bedingte Phasenverschiebung. Unter Berücksichtigung dieser Definition

und der Gleichung (69) läßt sich der Ausdruck für  $e$  auf die Form bringen:

$$e = 2A \sin 2\pi \left( \frac{z'}{\lambda} - \frac{\varphi}{4\pi} \right) \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{b}{\lambda} - \frac{\varphi}{4\pi} \right) \\ + 2A \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{b}{\lambda} + \frac{z'}{\lambda} - \frac{\varphi}{2\pi} \right).$$

Hier stellt das erste Glied die vor der Brücke sich entwickelnde stehende Schwingung dar, das zweite Glied eine sich darüber lagernde fortschreitende Welle, deren Amplitude um so kleiner ist, je kleiner  $\varphi$  ist. Die Amplitude der stehenden Welle ist Null nicht für  $z = b$ , sondern für

$$z = b + \frac{\lambda \varphi}{4\pi} = b'.$$

Der Knotenpunkt der Welle würde also immer hinter der Brücke liegen. Drude nennt die Differenz  $b' - b$  die Brückenverkürzung. Für kurze Brücken, bei denen es gestattet ist,  $\operatorname{tg} \varphi = \varphi$  zu setzen, wird nach (72)

$$b' - b = \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{2 \lg \frac{d}{R}}. \quad (73)$$

Da  $L$  angenähert von der Größenordnung  $2 \lg \frac{d}{R}$  ist (siehe oben S. 599), so wird roh geschätzt die Brückenverkürzung die halbe Bügellänge betragen. Das gilt für Wellen in Luft, für die  $l$  gegen  $\lambda$  in der Regel klein und daher  $\operatorname{tg} \varphi = \varphi$  zu setzen ist. Für Wellen, für die  $l$  nicht mehr klein gegen  $\lambda$  ist (z. B. bei Wellen im Wasser), ist die Bügelverkürzung klein, weil  $\varphi$  in geringerem Maße wächst als  $\operatorname{tg} \varphi$ . Das Resultat dieser Rechnungen wird durch die Versuche bestätigt.

Wird auf einem System von Paralleldrähten durch zwei gleich lange Brücken eine bestimmte Strecke abgegrenzt, so ist nach dem vorhergehenden die halbe Wellenlänge der längsten auf der abgegrenzten Strecke möglichen Schwingung nicht gleich dem Abstand der beiden Brücken, sondern gleich diesem Abstand vermehrt um die Länge einer Brücke, oder die ganze Wellenlänge ist gleich der Summe der beiden Drahtlängen vermehrt um die Summe der beiden Brückenlängen. Dividiert man die ganze Summe durch  $c$ , so erhält man die Schwingungsdauer der betreffenden Schwingung. Drude hat darauf eine Resonanzmethode zur Bestimmung der Periode der oszillatorischen Kondensatorentladung<sup>1)</sup> begründet. Man läßt den primären Kondensatorkreis, dessen Periode man bestimmen will, in schwacher Koppelung auf das Paralleldrahtsystem wirken, das an einem Ende metallisch festgeschlossen ist, wäh-

<sup>1)</sup> P. Drude, Annalen der Physik (4), 9, S. 611, 1902.

rend man nach dem anderen Ende zu einen geraden Metallbügel so lange verschiebt, bis das Drahtsystem in Resonanz steht mit der Primärleitung. Die aus den Dimensionen des Drahtsystems zu berechnende Schwingungsdauer ist dann gleich der des Primärsystems. Allerdings ist bei der Berechnung noch eine weitere Korrektur anzubringen. Die Resonanz wird nämlich an dem maximalen Leuchten einer Vakuumröhre erkannt, die über die Paralleldrähte möglichst in der Mitte zwischen den beiden Enden aufgelegt wird. Diese an den Stellen der maximalen Ladungen angelegte Röhre bedingt eine Kapazitätsvermehrung der Drähte an diesen Stellen. Diese Kapazitätsänderung ist nach Drudes Messungen für die leuchtende Röhre äquivalent einer Vermehrung der Drahtlänge um 1,5 cm für jeden Draht. Die Wellenlänge ist also gleich der doppelten Länge der Paralleldrähte, vermehrt um die doppelte Bügellänge und um 3 cm.

Unabhängig von der Brückenkorrektur mißt man die halben Wellenlängen an einem Lecherschen Drahtsystem, wenn die Paralleldrähte genügend lang sind, um mehrere halbe Wellenlängen darauf abzugreifen. Man bringt dann zunächst auf der dem Erreger zugewandten Seite der Paralleldrähte eine feste Brücke an, durch die eine bestimmte Dauer der erregenden Schwingung gegeben ist. Schiebt man hinter dieser festen Brücke eine zweite Brücke auf den Drähten entlang, so findet man mit wachsender Entfernung der beiden Brücken eine bestimmte Lage der zweiten Brücke, bei der das Drahtsystem zwischen den Brücken mit der erregenden Schwingung in Resonanz steht, was man wieder durch das maximale Leuchten einer Röhre in der Mitte zwischen den beiden Brücken erkennt. Entfernt man nun die zweite Brücke weiter von der ersten, so findet man eine zweite, dritte, vierte Lage, in der die Vakuumröhre an ihrer ursprünglichen Stelle maximal leuchtet, ohne daß andere Brücken zwischen der ersten und der zweiten aufgelegt wurden. Die Strecken, um die man die zweite Brücke verschieben muß aus der ersten in die zweite, aus der zweiten in die dritte Resonanzlage usw., sind genau gleich den halben Wellenlängen.

## 22. Untersuchung der Drahtwellen mit Hilfe von Resonatoren.

Bringt man einen kreisförmigen Resonator in den Raum zwischen die Drähte eines Lecherschen Systems, so kann man, falls die Ebene des Resonators in die der Drähte fällt, die magnetische Kraft in dem Zwischenraum der Drähte durch die Sekundärfunken des Resonators nachweisen; steht die Ebene des Resonators senkrecht zu den Drähten, so reagiert seine Funkenstrecke allein auf die elektrische Kraft  $P$ .

Verschiebt man einen solchen Resonator oder, besser gesagt, Sekundärleiter — denn die Wahl bestimmter Dimensionen desselben ist gar nicht notwendig — den Drähten entlang, so erhält man in äquidistanten Lagen Bäuche und Knoten der magnetischen bzw. elektrischen Kraft, welche die früher S. 507 besprochene Lage zueinander haben. Der Abstand zweier aufeinanderfolgender Bäuche oder Knoten hängt nur von der Wahl der Dimensionen des Resonators ab; er entspricht der halben Wellenlänge einer an den Drähten entlang fortgepflanzten Schwingung von der Periode der Grundschiwingung des Resonators; daß eine Abstimmung desselben auf die Erregerschwingung oder eine der möglichen Eigenschwingungen des Drahtsystems nicht notwendig ist, folgt, analog, wie es oben S. 562 geschlossen wurde, aus der geringen Dämpfung der Schwingungen im Resonator, der starken Dämpfung der Erregerschwingungen und aus Berücksichtigung des Umstandes, daß das Drahtsystem, falls es nicht auf den Erreger abgestimmt ist (vgl. oben S. 583) oder durch Auflegen von Brücken in zueinander abgestimmte Teile zerlegt wird, keine deutlich abgegrenzten Maxima und Minima der elektrischen bzw. magnetischen Kraft besitzt.

Die Erscheinungen der multiplen Resonanz treten also bei diesen Untersuchungen an Drahtwellen ebenso auf wie bei den Wellen in freier Luft. Die Richtigkeit der hier und in Abschnitt II gegebenen Deutung dieser Erscheinung ist durch besondere Versuche von Strindberg<sup>1)</sup> und von Décombe<sup>2)</sup> nachgewiesen worden. Ersterer zeigte, daß die multiple Resonanz verschwindet, wenn man auch dem Resonator durch Verwendung von Eisendraht statt des Kupferdrahtes eine große Dämpfung erteilt. Letzterer verfuhr umgekehrt; er verwandte einen Erreger ohne Funkenstrecke, also von geringer Dämpfung, und wies nach, daß vier Resonatoren von verschiedener Größe alsdann die gleiche Wellenlänge anzeigten. In beiden Fällen sind die Versuche mit Wellen an Parallel-drähten ausgeführt worden.

Die Frage, ob die Drahtwellen und die Wellen in freier Luft die gleiche Geschwindigkeit haben, ist zuerst von Sarasin und de la Rive<sup>3)</sup> geprüft worden. Sie haben durch sorgfältige Versuche nachgewiesen, daß die Wellenlänge der auf einen bestimmten Resonator resonierenden Schwingungen stets dieselbe ist, einerlei, ob sie sich längs des Lecherschen Drahtsystems in der Luft fortpflanzen, oder ob sie als freie ebene Wellen in der Luft ohne Anheftung an einen Metall-draht existieren. Dies zeigt folgende Tabelle, in der die erste Zeile

<sup>1)</sup> N. Strindberg, *Compt. rend.* **122**, S. 1408, 1896.

<sup>2)</sup> Décombe, *Arch. de Genève* (4), **4**, S. 30; *Compt. rend.* **124**, S. 1016, 1897.

<sup>3)</sup> E. Sarasin et L. de la Rive, *Arch. de Genève* (3), **22**, S. 282, 1889; **23**, S. 118, 1890.

den Durchmesser der kreisförmigen Resonatoren in Metern angibt, die zweite die Wellenlänge der mit ihnen resonierenden Drahtwellen, die dritte die Wellenlänge der mit ihnen resonierenden Luftwellen. Letztere Zahlen sind die schon oben auf S. 563 angegebenen.

d	1 m	0,75	0,50	0,35	0,25
$\frac{1}{2} \lambda$ Draht . . .	3,84	2,96	1,96	1,46	1,12
$\frac{1}{2} \lambda$ Luft . . .	4,00	3,00	2,00	1,50	1,10

Sieht man die untereinander stehenden Werte von  $\frac{1}{2} \lambda$  als gleich an, so folgt, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Draht- und Luftwellen die gleiche ist. Da nun aber die der ersteren nach Abschnitt 19 sich zu  $c = 3 \cdot 10^{10}$  cm sek<sup>-1</sup> ergibt, so folgt, daß auch die Luftwellen die Geschwindigkeit  $c$  besitzen. Allerdings ist dieser Schluß noch nicht streng bewiesen, weil in obiger Tabelle noch eine gewisse Differenz zwischen der Länge der Drahtwellen und der der Luftwellen besteht. Die letzteren erscheinen in der Mehrzahl der Fälle größer (um 2—4%). Die Versuche sind in jüngster Zeit von M. Hammer<sup>1)</sup> mit acht verschiedenen Resonatoren sorgfältig wiederholt worden. Die folgende Tabelle gibt seine Messungen für vier Resonatoren wieder.

$\frac{1}{2} \lambda$ Draht . . . . .	95,9	86,1	74,7	65,2
$\frac{1}{2} \lambda$ Luft				
bei Reflexion { $3 \times 2,5$ m	98,5	87,0	76,2	65,5
an Schirm von { $2 \times 2$ m	100,0	88,0	77,5	66,5

Auch hier sind die Luftwellen noch etwas größer als die Drahtwellen (1—1,5%). Aber zugleich zeigen diese Versuche, daß die Erhöhung der Wellenlänge der Luftwellen zunimmt, wenn der Reflexionsschirm kleiner wird. Es liegt nahe, aus diesen Versuchen den Schluß zu ziehen, daß bei noch größeren Reflexionsschirmen die Differenzen zwischen Draht- und Luftwellen noch kleiner werden und vielleicht ganz verschwinden würden. Da außerdem die Ausbildung der stehenden Wellen in freier Luft durch Reflexion an den Wänden des Beobachtungsraumes gestört wird, so lassen sich die geringen Differenzen zwischen Luft- und Drahtwellen als Versuchsfehler ansehen, die keinenfalls gegen die Gültigkeit der Maxwellschen Theorie sprechen.

<sup>1)</sup> M. Hammer, Diss., Halle a. d. S. 1910; Ber. d. D. Phys. Ges. 1911, S. 27.

Es mag aber hervorgehoben werden, daß diese experimentelle Bestätigung erst aus der Kombination der beobachteten Längen der Luftwellen mit denen der Drahtwellen folgt. Daß letztere sich mit der Geschwindigkeit  $c$  fortpflanzen, ist noch keine ausreichende Bestätigung der Maxwell'schen Theorie, denn dies Resultat wurde ohne dieselbe von Kirchhoff gezogen, wie oben S. 500 angeführt wurde.

Mit Hilfe von Resonatoren hat auch Blondlot<sup>1)</sup> die Geschwindigkeit der Drahtwellen mit großer Genauigkeit messen können, indem er einen Resonator von experimentell zu ermittelnder Kapazität (kleiner Plattenkondensator) und leicht zu berechnender Selbstinduktion (kurzes, den Kondensator schließendes Drahtrechteck) wählte, dessen Schwingungsdauer  $T$  also auf sicherer Grundlage<sup>2)</sup> nach der Formel  $T = 2\pi\sqrt{CL}$  zu berechnen ist. Die zugehörige Wellenlänge  $\lambda$  wurde dadurch bestimmt, daß der Resonator in einer auf die magnetischen Kräfte allein reagierenden Lage fest blieb, während durch Verschiebung einer

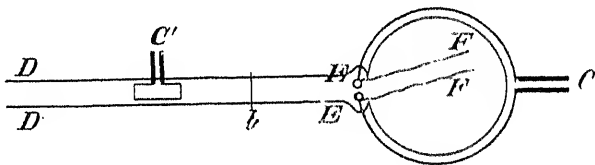


Fig. 76.

Brücke  $b$  auf dem Drahtsystem diejenigen Stellungen der Brücke aufgesucht wurden, in welchen in einem am Kondensator des Resonators angebrachten Mikrometer maximale, bzw. minimale Funkenlängen zu erhalten waren. Das Drahtsystem war insofern von der Lecherschen Anordnung abweichend, als die Schwingungen nicht durch die elektrischen Kräfte des Erregers, sondern durch die magnetischen auf die Drähte übertragen wurden. Aus der beigezeichneten Fig. 76 ist wohl die Anordnung leicht zu verstehen.  $C$  ist der Kondensator des Erregers, dessen Entladungsdraht in diesem Falle kreisförmig gebogen ist,  $C'$  der des Resonators,  $b$  ist eine Metallbrücke,  $EE$  sind die Entladungskugeln des Erregers,  $FF$  die von ihnen zum Ruhmkorff'schen Induktionsapparat führenden Drähte. Bei großem Durchmesser der vom Erregerdraht umgrenzten Fläche (2 m) sind die im Drahtsystem  $DD$  erzeugten Schwingungen sehr kräftig.

Als Mittelwert erhielt Blondlot für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Drahtwellen in Luft:

$$\lambda : T = 2,976 \cdot 10^{10},$$

<sup>1)</sup> Blondlot, Compt. rend. **113**, S. 628, 1891.

<sup>2)</sup> Diese Grundlage ist allerdings nur sicher, wenn die Selbstinduktion des Resonators durch die benachbarten Drähte  $D$  des Drahtsystems nicht geändert ist.

welche Zahl in sehr guter Uebereinstimmung mit dem Verhältnisse  $c$  der elektrostatischen zur elektromagnetischen Einheit der Elektrizitätsmenge steht.

## 23. Untersuchung von Drahtwellen mit Hilfe ponderomotorischer Wirkungen.

Bisher hatten wir folgende Methoden zur Untersuchung der in einem Drahte stattfindenden elektrischen Wellen kennen gelernt:

1. Die Funkenwirkung (Sekundärfunken des Resonators) bzw. Leuchtwirkung einer angelegten Vakuumröhre.
2. Die Kohärerwirkung (S. 570).
3. Die Wärmewirkung:
  - a) direkte; Untersuchung mit Thermoelementen nach Klemencic (vgl. S. 571);
  - b) indirekte: bolometrische Untersuchung von Paalzow und Rubens (vgl. S. 571 und S. 581).

Hertz<sup>1)</sup> hat nun auch gezeigt, daß man die ponderomotorischen Wirkungen benutzen kann. Zu dem Zweck braucht man nur einen leichten, langgestreckten Metallkörper  $N$  (mit Goldpapier beklebte Pappe, Aluminium) drehbar so aufzuhängen, daß sich seine Enden in einer aus der Fig. 77 ersichtlichen Anordnung zwei kleinen Metallscheiben  $S_1, S_2$  gegenüber befinden, welche mit gegenüberliegenden Punkten des Lecherschen Drahtsystems  $DD$  verbunden werden. Aus bekannten Gesetzen der elektrischen Influenz muß sich die Nadel  $N$  in die Verbindungslinie der Scheiben  $S_1, S_2$  einzustellen suchen, wenn diese nicht mit einem Knoten der Ladungswelle des Lecherschen Systems verbunden sind. Nach Franke<sup>2)</sup> kann man auch ein Thomsonsches Quadrantelektrometer zur Untersuchung der Ladungswelle verwenden, wenn man die Quadranten und die Nadel leitend mit zwei auf die Drähte geschobenen Rubensschen „Flaschen“ verbindet. Bjerknes hat in den unten noch näher zu besprechenden Versuchen ebenfalls kleine, besonders konstruierte Quadrantelektrometer benutzt.

Um zur Kontrolle der Wirksamkeit der Erregerfunken ein besonders einzuschaltendes Standard-Instrument (vgl. oben S. 582) zu vermeiden, hat v. Geitler<sup>3)</sup> ein nach dem beschriebenen Hertzschen Prinzip konstruiertes Differentialinstrument benutzt, dessen Anwendung aus der Fig. 78 ohne weiteres ersichtlich ist. Die unteren Scheiben  $S_1, S_2$  werden

<sup>1)</sup> H. Hertz, Wied. Ann. **42**, S. 407, 1891.

<sup>2)</sup> A. Franke, Wied. Ann. **44**, S. 713, 1891.

<sup>3)</sup> J. v. Geitler, Wied. Ann. **49**, S. 184, 1893.



mit zwei festen Punkten des Drahtsystems verbunden, die oberen  $S_1' S_2'$  mit den zu untersuchenden Punkten desselben. Mit diesem Instrument hat v. Geitler die mit Phasenänderung verbundene partielle Reflexion der Wellen nachgewiesen an Stellen, wo sich die Drahtdicke  $2R$  oder ihr Abstand  $d$  ändert, oder wo eine besondere Kapazität<sup>1)</sup> angehängt ist. Eine numerische Berechnung der zu erwartenden Verhältnisse gelingt mit Benutzung der Gleichungen (102) und (104) der S. 501, 502 ohne Schwierigkeit.

Ein gestreckter Metallkörper reagiert nur auf die elektrischen Kräfte, d. h. die Ladungswelle. Wendet man aber, wie es Hertz l. c. tat, einen kreisförmig ge-

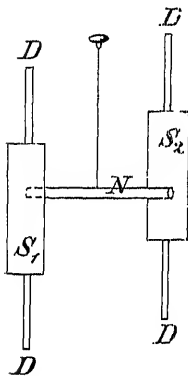


Fig. 77.

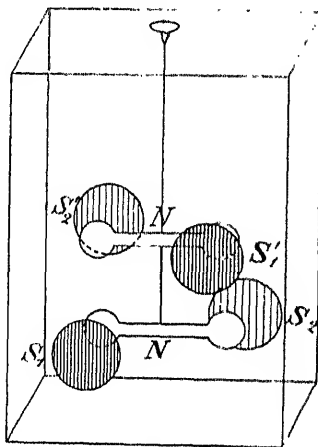


Fig. 78.

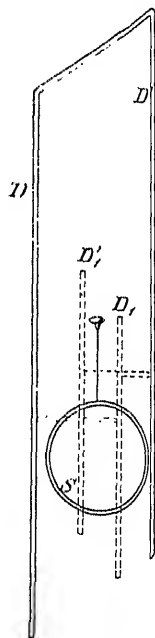


Fig. 79.

schlossenen Draht  $S$  an (vgl. Fig. 79), der drehbar zwischen dem Drahtsystem aufgehängt ist, so reagiert ein solcher auch auf die magnetischen Kräfte, da diese in ihm Ströme induzieren, welche nach der Lenzschen Regel (vgl. oben S. 320) beständig vom Drahtsystem  $DD'$  abgestoßen werden. Durch seitlich angebrachte Drahtstücke  $D_1, D_1'$ , welche mit  $DD'$  leitend verbunden sind, hat Hertz die auf  $S$  ebenfalls wirkende elektrische Kraft eliminiert.  $S$  sucht sich dann unter dem Einfluß der magnetischen Kraft, d. h. der „Stromwelle“ der Drähte  $DD'$ , senkrecht der durch  $DD'$  gehenden Ebene einzustellen<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Der Einfluß einer solchen ist auch von E. Salvioni in Rend. dei Lincei (5), Vol. 1, 1. Sem., S. 250, 1892, studiert.

<sup>2)</sup> C. V. Boys, A. E. Briscoe und W. Watson (Phil. Mag. [5] 1891) wollten durch geeignet gebogene Metallbügel eine Addition der ponderomotorischen Wirkungen der elektrischen und magnetischen Kraft herbeiführen, so die Energie der elektromagnetischen Luftwellen messen. Die Wirkung war sehr schwach. Dies ist nach theoretischen Berechnungen von J. J. Thomson (researches in electricity etc., S. 301) auch zu erwarten.

In allen diesen Fällen kann man dem Metallkörper N oder S. auf den die ponderomotorische Wirkung durch die elektromagnetischen Wellen ausgeübt wird, durch die Torsionskraft eines Fadens, bifilare Aufhängung oder einen angeklebten kleinen Magneten eine bestimmte Ruhelage geben. Die ponderomotorischen Wirkungen der elektromagnetischen Wellen kann man dann durch Ablenkungsbeobachtungen mit Spiegel, Fernrohr und Skala messen.

## 24. Messung der Dämpfung der elektrischen Wellen.

Eine Messung der Dämpfung der elektrischen Wellen hat aus zwei Gründen Interesse: einmal kann man dann abschätzen, ob wirklich die Erklärung der multiplen Resonanz (vgl. oben S. 561 u. 604) aus der großen Dämpfung der Erregerschwingungen und der kleinen Dämpfung der Resonatorschwingungen zulässig ist, andererseits — und dies ist ein Punkt von noch größerem Interesse — kann man aus der Messung der Dämpfung im sekundären Leiter Schlüsse auf die für sehr schnelle Schwingungen gültigen spezifischen Konstanten des Leiters ziehen, während, wie wir ja oben S. 588 sahen, für die Periode der Eigenschwingungen die spezifischen Konstanten des Leiters (Leitfähigkeit und Magnetisierungskonstante) in gewissen Grenzen ganz gleichgültig sind.

Um die Dämpfung der Erregerschwingungen zu messen, ging Bjerknes<sup>1)</sup> von den in den Abschnitten 5 und 6 des VIII. Kapitels entwickelten Gedanken aus. Mißt man bei allmählicher Veränderung der Länge der Sekundärleitung die Stärke der in ihr vom Erreger hervorgerufenen elektrischen Schwingungen, so erhält man eine Resonanzkurve, die um so steiler verläuft, je kleiner die Dämpfung der Schwingungen ist. Vernachlässigt man die Dämpfung der Sekundärschwingungen gegen die des Erregers, wozu man aus den oben S. 561 angeführten Gründen berechtigt ist, und nimmt man an, daß die Erregerschwingungen gedämpfte Sinusschwingungen der Form

$$A \cdot e^{-\frac{\gamma t}{T}} \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

sind, so kann man die Dämpfungskonstante  $\gamma$  numerisch bestimmen aus der Änderung, welche die Intensität der Sekundärschwingungen bei bestimmter Abänderung der Länge, d. h. der Eigenschwingungsdauer, der Sekundärleitung erfährt<sup>2)</sup>. Um die Intensität der Schwingungen numerisch zu messen, ließ Bjerknes die Enden der rechteckigen Sekundärleitung in zwei gegenüberstehenden kleinen Metallquadranten

<sup>1)</sup> V. Bjerknes, Wied. Ann. **44**, S. 74, 1891.

<sup>2)</sup> Betreffe Herleitung der dazu nötigen Formeln vgl. Bjerknes l. c.

mit zwei festen Punkten des Drahtsystems verbunden, die oberen  $S_1'S_2'$  mit den zu untersuchenden Punkten desselben. Mit diesem Instrument hat v. Geitler die mit Phasenänderung verbundene partielle Reflexion der Wellen nachgewiesen an Stellen, wo sich die Drahtdicke  $2R$  oder ihr Abstand  $d$  ändert, oder wo eine besondere Kapazität<sup>1)</sup> angehängt ist. Eine numerische Berechnung der zu erwartenden Verhältnisse gelingt mit Benutzung der Gleichungen (102) und (104) der S. 501, 502 ohne Schwierigkeit.

Ein gestreckter Metallkörper reagiert nur auf die elektrischen Kräfte, d. h. die Ladungswelle. Wendet man aber, wie es Hertz l. c. tat, einen kreisförmig ge-

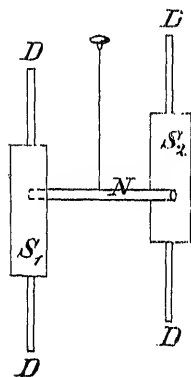


Fig. 77.

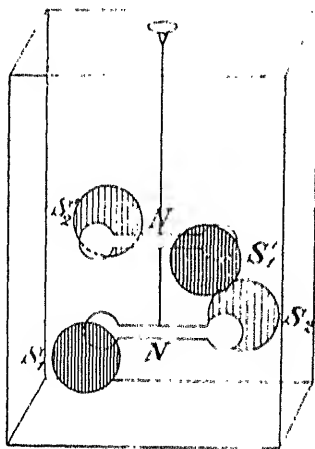


Fig. 78.

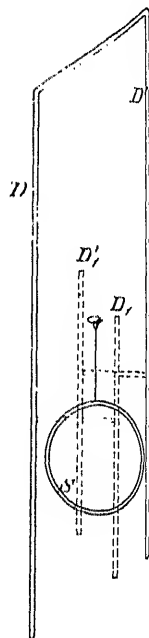


Fig. 79.

schlossenen Draht  $S$  an (vgl. Fig. 79), der drehbar zwischen dem Drahtsystem aufgehängt ist, so reagiert ein solcher auch auf die magnetischen Kräfte, da diese in ihm Ströme induzieren, welche nach der Lenzschen Regel (vgl. oben S. 320) beständig vom Drahtsystem  $DD'$  abgestoßen werden. Durch seitlich angebrachte Drahtstücke  $D_1D_1'$ , welche mit  $DD'$  leitend verbunden sind, hat Hertz die auf  $S$  ebenfalls wirkende elektrische Kraft eliminiert.  $S$  sucht sich dann unter dem Einfluß der magnetischen Kraft, d. h. der „Stromwelle“ der Drähte  $DD'$ , senkrecht zu der durch  $DD'$  gehenden Ebene einzustellen<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Der Einfluß einer solchen ist auch von E. Salvioni in Rend. d. R. Acc. dei Lincei (5), Vol. 1, 1. Sem., S. 250, 1892, studiert.

<sup>2)</sup> C. V. Boys, A. E. Briscoe und W. Watson (Phil. Mag. [5] 31, S. 44, 1891) wollten durch geeignet gebogene Metallbügel eine Addition der ponderomotorischen Wirkungen der elektrischen und magnetischen Kraft herbeiführen und so die Energie der elektromagnetischen Luftwellen messen. Die Wirkung war aber sehr schwach. Dies ist nach theoretischen Berechnungen von J. J. Thomson (Recent researches in electricity etc., S. 301) auch zu erwarten.

In allen diesen Fällen kann man dem Metallkörper N oder S, auf den die ponderomotorische Wirkung durch die elektromagnetischen Wellen ausgeübt wird, durch die Torsionskraft eines Fadens, bifilare Anhängung oder einen angeklebten kleinen Magneten eine bestimmte Ruhelage geben. Die ponderomotorischen Wirkungen der elektromagnetischen Wellen kann man dann durch Ablenkungsbeobachtungen mit Spiegel, Fernrohr und Skala messen.

## 24. Messung der Dämpfung der elektrischen Wellen.

Eine Messung der Dämpfung der elektrischen Wellen hat aus zwei Gründen Interesse: einmal kann man dann abschätzen, ob wirklich die Erklärung der multiplen Resonanz (vgl. oben S. 561 u. 604) aus der großen Dämpfung der Erregerschwingungen und der kleinen Dämpfung der Resonatorschwingungen zulässig ist, andererseits — und dies ist ein Punkt von noch größerem Interesse — kann man aus der Messung der Dämpfung im sekundären Leiter Schlüsse auf die für sehr schnelle Schwingungen gültigen spezifischen Konstanten des Leiters ziehen, während, wie wir ja oben S. 588 sahen, für die Periode der Eigenschwingungen die spezifischen Konstanten des Leiters (Leitfähigkeit und Magnetisierungskonstante) in gewissen Grenzen ganz gleichgültig sind.

Um die Dämpfung der Erregerschwingungen zu messen, ging Bjerknes<sup>1)</sup> von den in den Abschnitten 5 und 6 des VIII. Kapitels entwickelten Gedanken aus. Mißt man bei allmählicher Veränderung der Länge der Sekundärleitung die Stärke der in ihr vom Erreger hervorgerufenen elektrischen Schwingungen, so erhält man eine Resonanzkurve, die um so steiler verläuft, je kleiner die Dämpfung der Schwingungen ist. Vernachlässigt man die Dämpfung der Sekundärschwingungen gegen die des Erregers, wozu man aus den oben S. 561 angeführten Gründen berechtigt ist, und nimmt man an, daß die Erregerschwingungen gedämpfte Sinusschwingungen der Form

$$A \cdot e^{-\frac{\gamma t}{T}} \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

sind, so kann man die Dämpfungskonstante  $\gamma$  numerisch bestimmen aus der Aenderung, welche die Intensität der Sekundärschwingungen bei bestimmter Abänderung der Länge, d. h. der Eigenschwingungsdauer, der Sekundärleitung erfährt<sup>2)</sup>. Um die Intensität der Schwingungen numerisch zu messen, ließ Bjerknes die Enden der rechteckigen Sekundärleitung in zwei gegenüberstehenden kleinen Metallquadranten

<sup>1)</sup> V. Bjerknes, Wied. Ann. 44, S. 74, 1891.

<sup>2)</sup> Betreffs Herleitung der dazu nötigen Formeln vgl. Bjerknes l. c.

$S_1 S_2$  endigen, welche ponderomotorisch auf eine dicht unter ihnen aufgehängte Metallnadel  $N$  wirken (vgl. Fig. 80). Auf diese Weise ergab sich, daß bei der gewöhnlichen Anordnung eines Hertzschen Erregers für Luftwellen ( $\lambda = 8,86$  m) der Dämpfungskoeffizient  $\gamma$  von 0,27 bis 0,39 wuchs, wenn die Länge der Primärfunken von 1 mm bis auf 5 mm stieg. Es bedeutet dies eine sehr starke Dämpfung, denn z. B. für  $\gamma = 0,3$  ist nach einer Schwingung, d. h. für  $t = T$ , die Amplitude im Verhältnis  $e^{-0,3} : 1 = 0,74 : 1$  kleiner als die Anfangsamplitude.

Die Dämpfung der Sekundärschwingungen konnte Bjerknes näherungsweise aus dem Vergleiche des Ausschlages der Nadel  $N$  bestimmen, welchen diese durch die Schwingungen erhielt, mit dem Ausschlag durch eine statische Potentialdifferenz der Quadranten, welche dem bei den Schwingungen vorkommenden Maximalwerte der Potentialdifferenz entspricht. Letzterer kann aus der Länge der Funken eines zwischen die Quadranten eingeschalteten Funkenmikrometers erschlossen werden. Es ergab sich so für

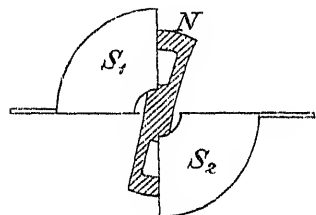


Fig. 80.

eine Sekundärleitung aus 2 mm starkem Kupferdraht und 320 cm Länge  $\gamma = 0,002$ . Hiernach erscheint in der Tat die Dämpfung der Sekundärschwingungen bedeutend geringer als die der Erregerschwingungen.

Die Dämpfung im Sekundärleiter kann man auch nach der Theorie vorhersagen. Nach der Formel (22) des Abschnittes 3 des VIII. Kapitels, S. 454 ist nämlich

$$\gamma = \frac{wT}{2L},$$

wo  $w$  der Widerstand,  $L$  die Selbstinduktion der Leitung ist. Bezogen auf die Längeneinheit ist nun für sehr schnelle Schwingungen nach der Formel (125'), S. 511 des Abschnittes 15 des VIII. Kapitels:

$$w' = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{\mu}{\sigma T}},$$

falls  $2R$  den Durchmesser der Leitung bedeutet,  $\sigma$  seine spezifische Leitfähigkeit,  $\mu$  seine Magnetisierungskonstante. Ferner ist die Selbstinduktion für die Längeneinheit (vgl. S. 489):

$$L' = 2 \lg \frac{d}{R},$$

falls  $d$  die gegenseitige Entfernung zweier gegenüberliegender Drähte der Sekundärleitung bezeichnet. Daraus folgt

$$\gamma = \frac{1}{4 R \lg \frac{d}{R}} \sqrt{\frac{\mu T}{\sigma}}. \quad (74)$$

Nun ist hier  $R = 0,1$ ;  $d = 60$ ;  $T = 3 \cdot 10^{-8}$ ;  $\mu = 1$ ; die Leitfähigkeit des Kupfers ist etwa 60mal größer als die des Quecksilbers. Folglich [vgl. S. 362 Formel (20)] ist  $\sigma = 1,063 \cdot 60 \cdot 10^{-5}$ . Es ergibt sich so:

$$\gamma = 0,0027,$$

welcher Wert sehr gut mit dem experimentell gefundenen übereinstimmt.

Die Dämpfung der Erregerwellen kann man auch noch nach einem anderen Prinzip bestimmen, welches nicht auf der Resonanzwirkung beruht. Bilden sich nämlich durch Totalreflexion der Wellen an irgendeiner Grenze (z. B. einer Metallwand oder bei Drahtwellen dem Ende der Drähte) stehende Wellen aus, so folgt direkt aus der Anschauung, daß Knoten der Wellen im strengen Sinne sich nur bilden können, wenn die einfallenden Wellen keine Dämpfung besitzen. Ist solche vorhanden, so entstehen nur Minima der Wellenbewegung, und zwar unterscheiden sich diese Minima um so mehr von Null, je größer die Dämpfung ist und je weiter sie sich von der Reflexionsstelle befinden. Durch numerische Vergleichung der aufeinanderfolgenden Minima kann man daher die Dämpfung berechnen. Nach dieser Methode ist Bjerknes<sup>1)</sup> vorgefahren, indem er die Erregerwellen (mit Hilfe der Lecherschen Anordnung) in zwei Paralleldrähte leitete und die Schwingung in ihnen in der Nähe ihres Endes elektrometrisch maß. Die Drähte waren so lang (130 m), daß sich die Wellen nach zweimaliger Durchlaufung der Drähte totliefen und daher eine Komplikation der Erscheinungen durch Reflexion am Anfang der Drähte und durch ihre Eigenschwingungen nicht zu befürchten war. Dagegen benutzten Klemencic und Czermak ihre oben S. 576 beschriebene Methode der Reflexion von Luftwellen an zwei gegenseitig verschiebbaren Metallwänden, um auf Grund desselben Prinzips, nämlich der allmählichen Verschlechterung der Interferenzen, die Dämpfung der Erregerwellen zu bestimmen. In allen Fällen ergaben sich Werte für  $\gamma$ , welche der Größenordnung nach mit den zuerst von Bjerknes erhaltenen Zahlen übereinstimmten.

Eine Vergleichung der Dämpfung der Wellen in mehreren, völlig gleichgestalteten Resonatoren aus verschiedenem Material konnte Bjerknes<sup>2)</sup> sehr einfach dadurch vornehmen, daß die Ausschläge der

<sup>1)</sup> V. Bjerknes, Wied. Ann. **44**, S. 513, 1891. — Kr. Birkeland (Wied. Ann. **47**, S. 583, 1892) konnte durch Benutzung des Telephons die Abnahme zweier aufeinanderfolgender Wellenmaxima bestimmen. — A. Perot (Compt. rend. **114**, S. 165, 1892) gab für denselben Zweck noch ein anderes Verfahren an.

<sup>2)</sup> V. Bjerknes, Wied. Ann. **47**, S. 69, 1892.

Elektrometernadel N (vgl. S. 610, Fig. 80) gemessen wurden, indem die Resonatoren immer demselben Erreger in einer bestimmten Lage gegenübergestellt wurden. Da das Elektrometer die Summenwirkung aller aufeinanderfolgenden Schwingungen anzeigt, so muß der Ausschlag um so größer sein, je kleiner die Dämpfung der Schwingungen ist. Er kann ferner nur von letzterer abhängen, da die Energie der erzwungenen Schwingung, d. h. auch die Anfangsamplitude der Eigenschwingung, für alle Resonatoren die gleiche ist. Es ergab sich nun, daß der Elektrometeraussschlag für einen Kupferresonator bei weitem der größte war, und daß die verschiedenen Resonatoren hinsichtlich dieses Anschlages die Reihenfolge bildeten:

Kupfer	Messing	Neusilber	Platin	Nickel	Eisen
$\sigma = 1$	0,227	0,085	0,030	0,145	0,141.

Die zweite Zeile enthält die spezifischen Leitfähigkeiten bezogen auf Kupfer, nach der Bjerknesschen Beobachtung. Die Reihenfolge der Metalle muß nach der Formel (74) mit der Reihenfolge der Werte  $\mu : \sigma$  übereinstimmen, und das ist in der Tat der Fall, wenn man dem  $\mu$  für Nickel und Eisen erheblich von 1 verschiedene Werte beilegt. So muß z. B. für Nickel sein:

$$\frac{\mu}{0,145} > \frac{1}{0,030}, \text{ d. h. } \mu > 4,83,$$

ein Wert, der den direkt gemessenen Werten von  $\mu$  ziemlich nahe liegt.

Hierdurch ist also gezeigt, daß die Magnetisierung von Eisen und Nickel tatsächlich den schnellen Hertz'schen Schwingungen noch zu folgen vermag.

Mit Hilfe der zuletzt beschriebenen Anordnung konnte Bjerknes<sup>1)</sup> auch gut zeigen, daß die elektrischen Schwingungen bei den verschiedenen Metallen in verschiedene Tiefe eindringen. Zu dem Zweck wurde ein Kupferresonator mit den verschiedenen Metallen galvanoplastisch überzogen und die Dicke dieses Ueberzuges allmählich gesteigert, bis der Elektrometeraussschlag derselbe geworden war, wie er einem Resonator entspricht, der massiv aus dem Metall des Ueberzuges besteht. Diese Dicke des Ueberzuges entspricht offenbar derjenigen Tiefe, jenseits welcher die Energie der elektrischen Schwingungen nicht mehr merkbar ist. Diese Tiefe hat ungefähr den Wert 0,01 mm. Die Metalle bilden hinsichtlich dieses Wertes der „Grenztiefe“, d. h. auch hinsichtlich des Absorptionsvermögens, folgende absteigende Reihenfolge:

Kobalt und Eisen, Kupfer, Nickel, Zink.

Wir können diese Grenztiefe auch annähernd theoretisch bestimmen. Nehmen wir an, daß die elektrische Strömung stattdede innerhalb eines

<sup>1)</sup> V. Bjerknes, Wied. Ann. 48, S. 592, 1893.

Kreisrings von den Radien  $R$  und  $R'$ , so daß  $R - R'$  die Grenztiefe  $f$  ist, so ist der galvanische Widerstand der Längeneinheit

$$w' = \frac{1}{\pi (R^2 - R'^2) \cdot \sigma} = \frac{1}{2\pi R f \sigma},$$

wenn man für  $R - R'$  einfach  $2R$  schreibt, was gestattet ist, da  $f$  klein ist gegen  $R$ . Identifiziert man diesen Wert von  $w'$  mit dem auf S. 610 angegebenen, so erhält man die Beziehung:

$$\frac{1}{f} = 2\pi \sqrt{\frac{\mu \cdot \sigma}{T}}. \quad (75)$$

Für Kupfer ergibt sich daraus bei  $T = 1,4 \cdot 10^{-8}$ , wie es den Versuchen entsprach,  $f = 0,0074$  mm, was in sehr guter Uebereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen steht.

Nach (75) folgt, daß die Metalle hinsichtlich ihres Absorptionsvermögens dieselbe Reihenfolge bilden müssen, wie die Werte von  $\mu \cdot \sigma$ . Bei dem großen Werte von  $\mu$ , welchen Eisen besitzt und der nach Klemencic<sup>1)</sup> aus der Wärmeentwicklung Hertzscher Schwingungen zu  $\mu = 73$  bis  $\mu = 111$  zu schätzen ist, folgt in der Tat für Eisen der größte Wert von  $\mu \cdot \sigma$ . Nimmt man für Nickel nach S. 612 die Leitfähigkeit  $\sigma = 0,145$ , bezogen auf Kupfer, an, so folgt, daß für Nickel, welches nach obiger Tabelle hinter Kupfer folgt, in Beziehung auf das Absorptionsvermögen sein muß

$$\mu \cdot 0,145 < 1, \text{ d. h. } \mu < 6,9.$$

Es wäre also die Magnetisierungskonstante  $\mu$  des Nickels für Hertzsche Schwingungen in die Grenzen 4,83 (vgl. oben S. 612) und 6,90 eingeschlossen. Für Zink hat  $\mu \cdot \sigma$  den kleinsten Wert von den angegebenen Metallen, daher ist auch die Absorption bei Zink am geringsten. Wir werden weiter unten diese Untersuchungen über die Absorption in Metallen vervollständigen, nämlich bei Besprechung der Fortpflanzung ebener Wellen in Metallen.

## 25. Messung der Dielektrizitätskonstante in Flüssigkeiten und festen Körpern mit Hilfe von Drahtwellen.

Das Studium der Erscheinungen schneller Schwingungen, welche sich längs Metalldrähten fortpflanzen, bietet nach zwei verschiedenen Prinzipien bequeme Methoden dar, um die Dielektrizitätskonstante von Isolatoren zu messen. Diese Methoden müssen deshalb besonders wertvoll erscheinen, weil die sogenannten Nachwirkungserscheinungen (elek-

<sup>1)</sup> J. Klemencic, Wied. Ann. 50, S. 456, 1893.



trischer Rückstand), welche in einigen Isolatoren bei Messung der Dielektrizitätskonstante durch langsam veränderliche oder statische elektrische Zustände als störend auftreten, sich um so weniger geltend machen können, je schneller die elektrischen Kräfte wechseln. Auch gelingt es mit Hilfe Hertzscher Schwingungen die Dielektrizitätskonstante selbst von solchen Isolatoren zu messen, die, wie z. B. Wasser oder sehr verdünnte Salzlösungen, ein so gutes Leitungsvermögen besitzen, daß die Untersuchung mit statischen oder langsam veränderlichen Ladungen versagt (vgl. oben Kapitel I, Abschnitt 46, S. 120 ff.). Wie nämlich weiter unten gezeigt werden soll, ist, falls das Leitungsvermögen

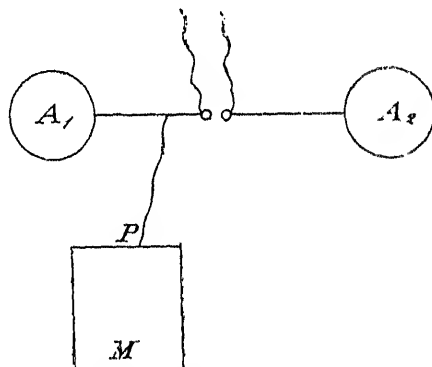


Fig. 81.

eine gewisse Größe nicht überschreitet, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ebener elektrischer Wellen in solchen Körpern von der Leitfähigkeit ganz unabhängig.

Wie nun oben auf S. 584 berechnet wurde, ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Drahtwellen umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der Dielektrizitätskonstante des die Drähte umgebenden Isolators. Auf diesen Satz ist das eine der beiden zu besprechenden Untersuchungsprinzipien gegründet.

1. Die Anordnung, welche Arons und Rubens<sup>1)</sup> angewandt haben, schließt sich an einen von Hertz<sup>2)</sup> angestellten Versuch an, welcher ein Funkenmikrometer  $M$  enthaltendes Drahtrechteck von einer Stelle  $P$  aus leitend mit dem Drahte seines Erregers verband (vgl. Fig. 81). Im allgemeinen schlagen bei Tätigkeit des letzteren bei  $M$  Funken über, diese setzen jedoch aus bei einer gewissen Lage der Zuleitungsstelle  $P$ . Die Lage dieses sogenannten „Indifferenzpunktes“ bestimmt sich offenbar dadurch, daß er das Drahtrechteck in zwei Teile teilt, an denen entlang die elektrischen Wellen, welche vom Erreger durch Leitung

<sup>1)</sup> L. Arons und H. Rubens, Wied. Ann. **42**, S. 581, 1891.

<sup>2)</sup> H. Hertz, Wied. Ann. **31**, S. 421, 1887.

übertragen werden, das Mikrometer  $M$  zu der gleichen Zeit erreichen, so daß sich zu keiner Zeit eine Ladungs- oder Potentialdifferenz an beiden Seiten von  $M$  herstellen kann. In der Tat teilt der Indifferenzpunkt das Drahtrechteck in zwei Teile gleicher Länge, wenn der Draht überall in Luft lagert. Umgibt jedoch ein anderer Isolator, z. B. Petroleum, ein gewisses Stück des Drahtes, so verschiebt sich der Indifferenzpunkt nach der betreffenden Seite des Drahtrechtecks hin, was als Beweis dafür angesehen werden kann, daß die elektrischen Wellen sich in dem von Petroleum umgebenen Draht langsamer fortpflanzen als in dem

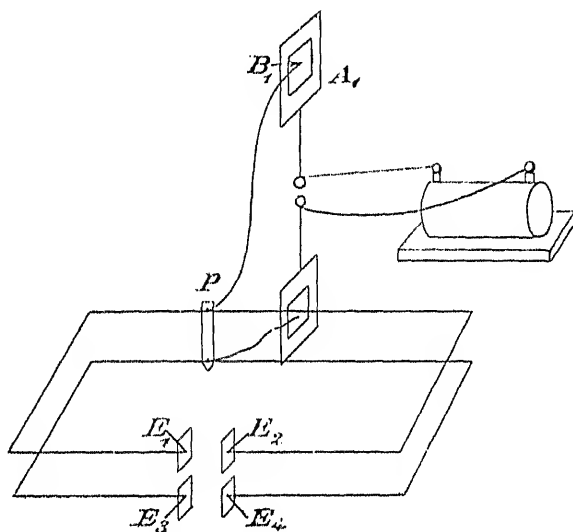


Fig. 82.

von Luft umgebenen. Das Verhältnis dieser Geschwindigkeiten kann man in einfacher Weise aus den Drahtlängen berechnen, welche zwischen dem Indifferenzpunkt  $P$  und dem Mikrometer  $M$  liegen. Arons und Rubens führten nun dem Punkt  $P$  die Wellen nicht direkt durch Leitung zu, sondern durch die vom Erreger ausgesandten Verschiebungsströme, indem sie der einen Platte  $A_1$  des Erregers eine kleinere Platte  $B_1$  parallel gegenüberstellten, welche mit  $P$  leitend verbunden wurde. Außerdem wandten sie anstatt eines Drahtrechtecks deren zwei, einander parallele und gleiche, an, bei denen durch die aus der Fig. 82 ersichtliche Anordnung gegenüberliegende Stellen zu entgegengesetztem Potential geladen wurden. Durch diese Anordnung wird der Vorteil erreicht, daß die elektrischen Wellen wesentlich nur in dem zwischen beiden Drähten befindlichen Raume ablaufen, und daß die Erscheinungen nicht durch die Nähe anderer Leiter oder Isolatoren gestört werden (aus dem oben S. 580 angeführten Grunde). Anstatt durch ein Funkenmikro-

meter M wurde die Stärke der elektrischen Schwingungen bolometrisch gemessen, indem über die Enden  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$ ,  $E_4$  der Drähte, welche außerdem noch kleine Metallplatten trugen, vier der oben S. 581 beschriebenen „Flaschen“ geschoben wurden, welche zum Bolometerwiderstand führten. Die eine Seite des Doppelvierecks der Drähte durchsetzte durch isolierende Gummistopfen die Wände eines größeren Blechkastens, in welchen die zu untersuchenden Flüssigkeiten eingegossen wurden. Feste Körper<sup>1)</sup>, z. B. Glas, wurden dadurch untersucht, daß sie, in Platten aufgeschichtet, die eine Seite des Doppelvierecks der Drähte möglichst umhüllten. Die Versuche, welche sich auf Paraffin, Glas, Rizinusöl, Olivenöl, Petroleum, Xylol erstreckten, ergaben ausnahmslos eine gute Bestätigung der Beziehung, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen proportional zu  $1/\sqrt{\epsilon}$  sei.  $\epsilon$  wurde direkt mit Hilfe der Schillerschen Methode gemessen.

Diese soeben beschriebene Methode hat aber noch nach Waitz<sup>2)</sup> den Uebelstand, daß die Lage des Indifferenzpunktes nicht nur abhängt von der Länge des von dem zu untersuchenden Isolator umgebenen Drahtstückes, sondern auch von der Lage dieses Drahtstückes zu dem Zuleitungspunkte P. Es macht also einen Unterschied, ob der Draht auf eine Länge l, z. B. vom Petroleum, umgeben ist, und dieses Stück nahe an P liegt, oder ob es etwa in der Mitte zwischen P und dem Ende der Drähte liegt. Waitz führt nur die experimentellen Tatsachen an. Es läßt sich aber auch leicht ihre theoretische Begründung finden in der an der Begrenzungsfläche des Isolators stattfindenden partiellen Reflexion der elektrischen Wellen. Eine solche muß nämlich immer nach Maßgabe der oben auf S. 502 entwickelten Formel (104) stattfinden, falls die Dielektrizitätskonstante  $\epsilon$  der Umgebung der Drähte sich sprungweise ändert. Man kann diese Störungen vermeiden, wenn man die eine der beiden durch P geschiedenen Hälften des Drahtsystems ganz mit dem zu untersuchenden Isolator umgibt.

Anstatt den Indifferenzpunkt zu verschieben, kann man ihn fest lassen und die Wirkung der auf der einen Hälfte des Drahtvierecks vorgenommenen Veränderung des umgebenden Mittels durch eine Verlängerung des anderen Teiles des Drahtvierecks kompensieren. In dieser Weise verfuhr Kießling<sup>3)</sup>, der das Doppeldrahtviereck, um seine Länge bequem ändern zu können, aus ineinander verschiebbaren dünnen Röhren nach Art eines Posaunenauszugs herstellte. Er vereinfachte außerdem das Verfahren, indem er das Drahtviereck auch gegenüber dem Indifferenzpunkte schloß und die beiden Zweige hier in ein einfaches Parallel-

<sup>1)</sup> Vgl. L. Arons und H. Rubens, Wied. Ann. 44, S. 206, 1891.

<sup>2)</sup> K. Waitz, Wied. Ann. 44, S. 527, 1891.

<sup>3)</sup> K. Kießling, Diss. Greifswald 1902.

drahtsystem übergehen ließ, das sich, um ein Totlaufen der Wellen zu vermeiden, in 40 m langen dünnen Eisendrähten fortsetzte. Auch die Führung der Wellen zu dem Viereck geschah durch Paralleldrähte von einem Blondlotschen Erreger her (siehe oben S. 606). Beobachtet wurde das Leuchten einer Vakuumröhre, die hinter dem Viereck auf den Paralleldrähten lag. Bei dieser Anordnung bildete das Viereck eine Verzweigung des Lecherschen Drahtsystems, nach Art der Quinckeschen Interferenzröhre in der Akustik.

In vollständiger Nachahmung dieser letzteren hat v. Lang<sup>1)</sup> elektrische Schwingungen durch eine Metallröhre geleitet, die sich in zwei Wege von veränderlicher Länge verzweigte. Drude<sup>2)</sup> hat die Wirklichkeit dieser Interferenzröhre genauer untersucht und gefunden, daß die Länge der aus dem Rohr austretenden Welle vom Durchmesser des Rohres abhängt, und zwar nahezu doppelt so groß wie dieser war. Weitere Messungen mit diesem Apparat hat A. Becker<sup>3)</sup> angestellt, während R. H. Weber<sup>4)</sup> die Theorie dieser Versuche auf Grund der Maxwell'schen Gleichungen entwickelt hat.

Nach allen diesen Verfahren lassen sich Dielektrizitätskonstanten bestimmen. Aber wesentlich bequemer und sicherer als diese Methoden ist ein Verfahren, bei dem ein Lechersches Paralleldrachtsystem zuerst durch Luft und weiterhin durch die zu untersuchende Flüssigkeit getaucht wird und die halben Wellenlängen stehender Schwingungen direkt in der Luft und in der Flüssigkeit durch Brückenverschiebung ermittelt werden. Der erste, der die Wellenlänge in verschiedenen dielektrischen Mitteln empirisch bestimmte, war K. Waitz<sup>5)</sup>. Er zweigte von einem kreisförmigen Resonator zwei Paralleldrähte ab, welche von dem zu untersuchenden Dielektrikum umgeben waren. Die Drähte wurden in der Weise überbrückt, daß die Sekundärfunken des Resonators maximale Auslenkungen annehmen. Aus diesen Brückenstellungen ergibt sich direkt die halbe Wellenlänge im Dielektrikum. Diese Versuche sind deshalb sehr zu schätzen, weil sie, wie gesagt, die ersten quantitativen Versuche waren. Bequemer und genauer war die Methode von Cohn<sup>6)</sup> (Fig. 83), bei welcher der hintere Teil eines unverzweigten Lecherschen Drahtsystems von dem zu untersuchenden Isolator (Wasser) umgeben ist.

<sup>1)</sup> V. v. Lang, Sitzungsber. d. Wien. Akad., math.-naturw. Kl. IIa, **104**, S. 980, 1895; **105**, S. 253, 1896.

<sup>2)</sup> P. Drude, Wied. Ann. **65**, S. 481, 1898.

<sup>3)</sup> A. Becker, Diss., Heidelberg 1901; Ann. d. Physik **8**, S. 22, 1902.

<sup>4)</sup> R. H. Weber, Ann. d. Phys. (4) **6**, S. 721, 1902. — Die Theorie ist noch nicht veröffentlicht worden von A. Kälähne, Ann. d. Physik (4) **18**, S. 92, 1905 und **19**, S. 80, 1906.

<sup>5)</sup> K. Waitz, Wied. Ann. **41**, S. 435, 1890.

<sup>6)</sup> E. Cohn, Berl. Ber. 1891, S. 1037. — Wied. Ann. **45**, S. 370, 1892.

nächst zwischen Erreger und  $b_0$  eine Brücke  $b_1$  so aufgelegt, daß kräftige stehende Schwingungen in dem zwischen  $b_0$  und  $b_1$  liegenden Teile des Drahtsystems bestehen, was mit Hilfe Rubensscher „Flaschen“  $ff$ , welche über die Drähte gezogen sind, und die zu einem Bolometerwiderstand führen, erkannt wird. Die Entfernung zwischen  $b_0$  und  $b_1$  ergibt dann die halbe Wellenlänge  $\frac{1}{2} \lambda$  der Schwingung in Luft (abgesehen von der Brückenkorrektur, siehe oben Abschnitt 21). Sodann

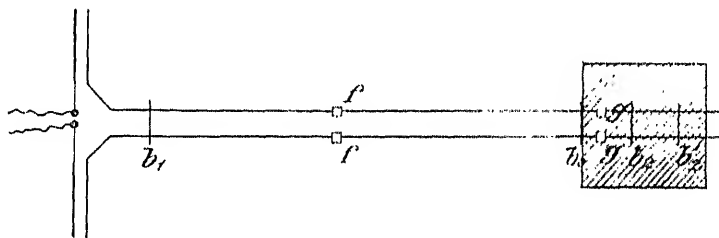


Fig. 83.

wird im Wasser eine zweite Brücke  $b_2$  so aufgelegt, daß auch zwischen  $b_0$   $b_2$  möglichst kräftige stehende Schwingungen entstehen, was mit Hilfe der Flaschen  $gg$  erkannt wird. Die Drahtlängen zwischen  $b_1$  und  $b_0$  und zwischen  $b_0$  und  $b_2$  stehen dann in Resonanz, und zwar in der des

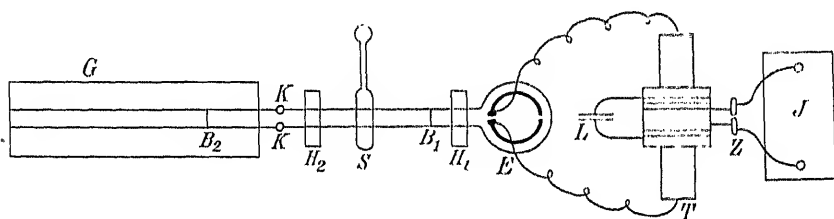


Fig. 84.

Einklangs, wenn die Flaschen  $gg$  bei Verschiebung zwischen  $b_0$  und  $b_2$  kein Minimum aufweisen. Es würde daher der Abstand von  $b_0$  und  $b_2$  einer halben Wellenlänge  $\frac{1}{2} \lambda'$  der Schwingung im Wasser entsprechen, ebenfalls abgesehen von der Brückenkorrektur. Von dieser Korrektur kann man sich aber frei machen, wenn man die Brücke  $b_2$  weiter verschiebt bis  $b_2'$ , so daß die Flaschen  $gg$  wiederum eine maximale Intensität der Schwingungen anzeigen. Dann ist die Entfernung  $b_0$   $b_2'$  gleich  $\frac{1}{2} \lambda'$ .

Das Verfahren ist später von Drude<sup>1)</sup> einer sehr sorgfältigen Durcharbeitung unterzogen worden und hat sich in Gestalt eines einfachen handlichen Apparates als eine außerordentlich bequeme und vielseitig anwendbare Methode zur Bestimmung von elektrischen Brechungsexponenten eingebürgert. Der Drude-Apparat (Fig. 84) besteht aus den Lecherschen Paralleldrähten, die in 1,8 cm Abstand nebeneinander herlaufen, und auf denen die Wellen durch den Blondlotschen Erreger E hervorgerufen werden. Es hat sich als zweckmäßig erwiesen<sup>2)</sup>, diese nicht direkt durch das Induktorium J zu erregen, sondern durch die Sekundärspule eines Tesla-Transformators T, in dessen Primärspule die oszillatorischen Entladungen der Leidener Flasche L verlaufen; diese wird durch das Induktorium geladen und entladet sich durch die Funkenstrecke Z. Die Paralleldrähte werden bei  $H_1$  und  $H_2$  von Ebonitstützen getragen und sind bei  $B_1$  so überbrückt, daß der abgegrenzte Teil mit dem Erreger in Resonanz steht. Sie enden hinter  $H_2$  in zwei kleinen Klammern K, mit deren Hilfe entweder ein langes System von Paralleldrähten in Luft angesetzt werden kann oder ein kürzeres, das einen zur Aufnahme von Flüssigkeiten bestimmten länglichen Ton- oder Glastrog durchsetzt<sup>3)</sup>. In beiden Fällen kann auf diesen Paralleldrähten eine zweite Brücke  $B_2$  verschoben werden. Ihre Resonanzlagen lassen sich durch das Aufleuchten der Geißlerschen Röhre S mit großer Schärfe bestimmen; die Abstände der Resonanzlagen ergeben nach dem in Abschnitt 21, S. 603 auseinandergesetzten Prinzip die Wellenlängen einerseits in Luft, andererseits in der Flüssigkeit. Ihr Verhältnis gibt den Brechungsexponenten und das Quadrat des Brechungsexponenten gibt die Dielektrizitätskonstante.

Beim Uebergang der Wellen aus Luft in das Dielektrikum, das den Trog erfüllt, findet Reflexion statt, die den gleichen Gesetzen folgt, wie bei senkrechtem Uebergang freier elektrischer oder Lichtwellen aus Luft in ein anderes Dielektrikum. Die Stärke dieser Reflexion ist um

<sup>1)</sup> P. Drude, Ber. der Kgl. Sächs. Gesellsch. d. Wiss., math.-physik. Klasse, 6. Mai 1895, 1. Juni 1896. — Abhandl. der Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss., math.-physik. Klasse 23, S. 1, 1897. — Wied. Ann. 55, S. 633, 1895; 58, S. 1, 1896; 59, S. 17, 1896.

<sup>2)</sup> P. Drude, Ann. d. Physik 8, S. 336, 1902.

<sup>3)</sup> Streng genommen müßte die Flüssigkeit sich bei diesen Versuchen von den Drähten aus beiderseits bis in die Unendlichkeit ausdehnen. Aber das Feld ist dadurch, daß gegenüberliegende Punkte der Drähte sich immer in entgegengesetzten Zuständen befinden, in solchem Maße auf den Raum zwischen den Drähten konzentriert, daß nur die nähere Umgebung der Drähte von der Flüssigkeit ausgefüllt zu sein braucht. Nach Drude (Abhandl. der Sächs. Gesellsch. d. Wiss., math.-physik. Klasse 23, S. 23, 1897) genügt es, damit die seitliche Begrenzung der Flüssigkeit ohne Einfluß auf die Knotenlage ist, wenn die Querdimensionen der Flüssigkeit dreimal größer sind als der Drahtabstand.

so größer, je höher der Brechungssexponent ist<sup>1)</sup>. Um zu verhüten, daß diese Reflexionen die Ausbildung der durch die Brücke erzeugten stehenden Wellen stören, wird die vordere Fläche der Flüssigkeit, also die innere Seite der Vorderwand des Troges, genau an die Stelle des ersten Knotens der elektrischen Kraft gebracht, der hinter der Brücke  $B_1$  liegt. An dieser Stelle ist dann die Grenzbedingung (104) des VIII. Kapitels auf alle Fälle erfüllt.

Da sich bei diesem Apparate der Sekundärkreis nur in 1 mm Abstand von dem Primärkreis befindet, so ist die Koppelung zwischen beiden eine außerordentlich enge. Man beobachtet dann die in Abschnitt 8 des VIII. Kapitels beschriebenen Erscheinungen. Stellt man die Brücke  $B_1$  so ein, daß man bei schwacher Koppelung, d. h. größerer Entfernung der beiden Kreise, scharfe Resonanz erhält, so findet man nach enger Koppelung nicht mehr eine, sondern zwei verschiedene Wellenlängen, für die sich maximales Leuchten bei Verschiebung der Brücke  $B_2$  ergibt. Drude<sup>2)</sup> fand z. B. bei schwacher Koppelung  $\frac{\lambda}{2} = 30$  cm, bei starker dagegen die beiden Schwingungen  $\frac{\lambda'}{2} = 37$  cm und  $\frac{\lambda''}{2} = 21$  cm. Sie genügen der aus Formel (66) des VIII. Kapitels (S. 475) sich ergebenden Beziehung:

$$\lambda'^2 + \lambda''^2 = 2\lambda^2.$$

Um bei den Messungen eine der beiden Wellen auszuschalten, empfiehlt es sich, die Koppelung so stark zu machen, daß  $\lambda' = 2\lambda''$ , also  $k = 0,6$  ist. Wenn man dann mit der längeren Welle beobachtet und die Vakuumröhre in den Bauch dieser Welle legt, so liegt sie zugleich im Knoten der kürzeren und spricht auf diese nicht an.

Nach dieser Methode hat Cohn und später Drude die Dielektrizitätskonstante nicht bloß an Isolatoren und ganz schlechten Leitern, sondern auch an leidlich gut leitenden Salzlösungen gemessen.

2. Das zweite der zu besprechenden Untersuchungsprinzipien beruht auf dem Satze, daß die Wellenlänge im Lecherschen Drahtsystem von der Kapazität der an seinem Ende befindlichen Kondensatoren, und diese wiederum von der Dielektrizitätskonstante des zwischen den Kondensatorplatten befindlichen Isolators abhängt.

Lecher<sup>3)</sup> brachte den zu untersuchenden Isolator in Plattenform zwischen die Platten des Kondensators am Ende  $E_2$  (vgl. oben S. 581)

<sup>1)</sup> Siehe die Formeln in Abschnitt 30.

<sup>2)</sup> P. Drude, Ann. d. Phys. 8, S. 342, 1902. Die ältere Deutung dieser Doppelschwingung als Grund- und Oberschwingung (siehe die von Drude erwähnte Literatur) ist an dieser Stelle als irrtümlich nachgewiesen.

<sup>3)</sup> E. Lecher, Wien. Ber. 99, S. 480, 1890. — Wied. Ann. 42, S. 142, 1891.

der Drähte und suchte mit und ohne zwischengeschobenen Isolator diejenigen beiden Entfernungen  $d_1$  und  $d_2$  der Kondensatorplatten auf, für welche die Wellenlänge in den Drähten die gleiche war. Aus  $d_1 - d_2$  berechnet sich mit Benutzung der oben auf S. 83 abgeleiteten Formel (84) die Dielektrizitätskonstante des Isolators. Indes ergab sich, daß  $d_1 - d_2$  nicht unter allen Umständen genau denselben Wert besaß. Es ist dieses vielleicht durch zufällige Deformationen der Zuleitungsdrähte zum Endkondensator veranlaßt. Drude hat sich wenigstens direkt durch Versuche davon überzeugt, daß man falsche Werte erhält, falls der Abstand  $d$  der Zuleitungsdrähte bei Verschiebung des Kondensators geändert wird.

Pérot<sup>1)</sup> verfuhr in ähnlicher Weise wie Lecher, jedoch mit dem Unterschiede, daß er den ganzen Raum zwischen den Kondensatorplatten mit dem zu untersuchenden Dielektrikum ausfüllte.

Verwandt mit diesen Methoden sind die von J. J. Thomson<sup>2)</sup> und R. Blondlot<sup>3)</sup> angewandten. Sie unterscheiden sich von der Lecher'schen Anordnung dadurch, daß die Kapazität des am Ende  $E_1$  der Drähte, beim Erreger liegenden Kondensators durch den zu untersuchenden Isolator geändert wurde.

Auch diese Methode ist von Drude sorgfältig geprüft und zu einer bequemen und sicheren Meßmethode ausgestaltet worden<sup>4)</sup>. Der Erreger und das Lecher'sche Sekundärsystem sind die gleichen wie bei dem oben beschriebenen Apparat. Aber an die kürzeren, aus dünnen Messingröhrchen bestehenden Teile der Sekundärdrähte setzt sich bei der Klammer K statt der langen Doppeldrähte oder des Trogcs ein leicht verschiebbarer Auszug von 26 cm langen Kupferdrähten an, die an ihrem hinteren Ende durch einen Kondensator überbrückt sind. Der Kondensator darf nur kleine Kapazität haben, wenn er bei der Kürze der benutzten Wellenlänge ( $\lambda = 73$  cm) nicht nahezu wie eine metallische Ueberbrückung wirken soll. Er besteht aus einem kleinen Glaskölbchen, in das zwei Platindrähte eingeschmolzen sind; diese stehen sich entweder in 4 mm Abstand ohne Endkapazitäten gegenüber, oder tragen in 3 mm Abstand voneinander zwei 4 mm im Durchmesser haltende angeschweißte Platinplatten. Wird dieses Kölbchen mit einer dielektrischen Flüssigkeit gefüllt, so müssen die Paralleldrähte in dem Kölbchen auf eine bestimmte Länge ausgezogen werden, damit eine auf den Drähten liegende Vakuumröhre stärkstes Louchten zeigt. Die Einstellung des ausziehbaren Teiles, die an einer Skala abgelesen wird, hängt von der Dielek-

<sup>1)</sup> Pérot, Compt. rend. **115**, S. 38, 1892.

<sup>2)</sup> J. J. Thomson, Proc. Lond. Roy. Soc. **46**, S. 292, 1889.

<sup>3)</sup> R. Blondlot, Compt. rend. **112**, S. 1058, 1891.

<sup>4)</sup> P. Drude, Wied. Ann. **54**, S. 352, 1895; **61**, S. 466, 1897.



trizitätskonstante der Substanz im Kölbchen ab. Dieser Einfluß läßt sich aber für diese Art von kleinen Kondensatoren nicht theoretisch feststellen, sondern der Apparat wird empirisch mit Hilfe von Flüssigkeiten geeicht, deren Dielektrizitätskonstanten etwa mittels des anderen, früher beschriebenen Apparates bestimmt sind. An der Hand der so gewonnenen Eichkurve läßt sich dann aus der Einstellung des Apparates für eine beliebige Substanz im Kölbchen deren Dielektrizitätskonstante sofort entnehmen.

Gegenüber dem anderen Drudeschen Apparat hat diese Methode den Vorzug, nur sehr geringer Substanzmengen zu bedürfen. Auch können feste Substanzen nach diesem Verfahren untersucht werden, sei es, daß die Substanz in gepulvertem Zustande in das Kölbchen gebracht und darin geschmolzen wird, oder daß man Platten der Substanz zwischen die kleinen Kondensatorplatten bringt und mit der Wirkung entsprechender Flüssigkeitsplatten vergleicht<sup>1)</sup>. Die Schwierigkeit, die der letzteren Methode anhaftet, läßt sich vermeiden, wenn man sich durch Mischen von geeigneten Flüssigkeiten Substanzen von beliebigen Werten der Dielektrizitätskonstante herstellen kann, wie es z. B. durch Mischungen von Benzol und Azeton oder von Azeton und Wasser möglich ist; man kann auf diese Weise Flüssigkeiten erhalten, deren  $\epsilon$  jeden beliebigen Wert von 2,26—80,9 annehmen kann. Füllt man das Kondensatorkölbchen mit einer derartigen Mischung von gegebener Zusammensetzung, bestimmt die zugehörige Einstellung und bringt dann den festen Körper als Pulver oder als Stück von beliebiger Gestalt zwischen die Kondensatorplatten, so wird dadurch die Einstellung im allgemeinen verändert; sie bleibt aber ungeändert, wenn die Dielektrizitätskonstante der Flüssigkeit mit derjenigen des festen Körpers übereinstimmt. Indem man den Versuch mehrfach wiederholt unter stufenweiser Abänderung des Mischungsverhältnisses der Eichflüssigkeit, kann man direkt oder durch Interpolation diejenige Flüssigkeit herausfinden, bei der das Eintauchen des festen Körpers keinen Einfluß auf die Einstellung mehr ausübt. In deren Dielektrizitätskonstante hat man dann zugleich die des festen Körpers. Nach dieser Methode hat z. B. H. W. Schmidt die Dielektrizitätskonstante zahlreicher Kristalle bestimmt<sup>2)</sup>.

Auf die Ergebnisse der umfangreichen Messungen, die Drude und nach ihm andere nach dieser Methode ausgeführt haben, soll hier nicht weiter eingegangen werden. Den Einfluß, den die Leitfähigkeit der zu untersuchenden Substanzen bei diesen Messungen ausübt, behandeln wir in einem späteren Abschnitte.

<sup>1)</sup> P. Drude, Wied. Ann. **61**, S. 474, 1897.

<sup>2)</sup> H. W. Schmidt, Ann. d. Physik (4) **9**, S. 919, 1902; **11**, S. 114, 1903.

### 3. Reflexion und Brechung elektrischer Wellen an der Grenze eines isotropen Dielektrikums.

Die Tatsache der Reflexion und Brechung der elektrischen Wellen im Uebergang in andere Medien ist schon von Hertz nachgewiesen und vielfach benutzt worden (s. Abschnitt 10, 12, 14). Wir wollen nun auch die Theorie dieses Vorganges entwickeln, um den Einfluß, den die Eigenschaften des Mediums (Dielektrizitätskonstante, Leitfähigkeit) auf den Vorgang ausüben, genauer zu erörtern. Wir behandeln den Vorgang zunächst unter der Voraussetzung, daß ebene Wellen in einem homogenen Dielektrikum auf die ebene Grenzfläche eines anderen homogenen isotropen Dielektrikums fallen.

Wir wählen die Grenzebene zur  $xy$ -Ebene. Die Konstanten der beiden Medien seien  $\epsilon_1, \mu_1$  und  $\epsilon_2, \mu_2$ . Nach den Gleichungen (26) des II. Kapitels (S. 423) sind dann für die magnetische und die elektrische Kraft die Grenzbedingungen zu erfüllen:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{H}_{x1} &= \mathfrak{H}_{x2}, & \mathfrak{H}_{y1} &= \mathfrak{H}_{y2}, & \mu_1 \mathfrak{H}_{z1} &= \mu_2 \mathfrak{H}_{z2} \\ \mathfrak{E}_{x1} &= \mathfrak{E}_{x2}, & \mathfrak{E}_{y1} &= \mathfrak{E}_{y2}, & \epsilon_1 \mathfrak{E}_{z1} &= \epsilon_2 \mathfrak{E}_{z2} \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

Während im Inneren der Körper nach (34) (S. 434) die Hauptgleichungen bestehen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\epsilon_1 \mu_1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_{x1}}{\partial t^2} &= \Delta \mathfrak{H}_{x1}, & \frac{\epsilon_1 \mu_1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_{x1}}{\partial t^2} &= \Delta \mathfrak{E}_{x1}, \text{ usw.} \\ \frac{\epsilon_2 \mu_2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_{x2}}{\partial t^2} &= \Delta \mathfrak{H}_{x2}, & \frac{\epsilon_2 \mu_2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_{x2}}{\partial t^2} &= \Delta \mathfrak{E}_{x2}, \text{ usw.} \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

Die Grenzbedingungen (76) sind nur vier unabhängigen Gleichungen äquivalent (vgl. oben S. 422).

Haben wir es mit ebenen Wellen zu tun, d. h. sind die Störungen überall dieselben für diejenigen Werte der Koordinaten  $x, y, z$ , welche der Gleichung

$$m x + n y + p z = \text{Konst.} \quad (78)$$

genügen, so müssen die elektrischen und magnetischen Kräfte Funktionen eines linearen Ausdruckes in  $x, y, z$  sein. Dabei bedeuten die  $m, n, p$  Größen, die den Richtungskosinussen der Normalen der Wellenebene mit den Koordinatenachsen proportional sind. Als Integrale der Differentialgleichungen (77) können nun Exponentialfunktionen oder trigonometrische Funktionen verwandt werden.

Ob wir die eine oder die andere Form anwenden, macht durchaus keinen Unterschied, da  $e^{2\pi i \frac{t}{T}} + e^{-2\pi i \frac{t}{T}} = 2 \cos 2\pi \frac{t}{T}$  ist, d. h. da

die trigonometrische Form durch Addition zweier konjugierter Exponentialintegrale erhalten wird. Eine Addition mehrerer Integrale ist aber stets hier gestattet, da Hauptgleichungen und Grenzbedingungen linear sind.

Zum Zwecke der Rechnung ist es stets bequemer, von der Exponentialform auszugehen. Es soll also gesetzt werden

$$\xi_{x1} = A_1 e^{i(\omega t - m x + n y + p z)}, \text{ usw.},$$

wobei  $\tau$  eine Abkürzung für  $T : 2\pi$  ist und  $T$  die Schwingungsdauer bedeutet. Wegen der Hauptgleichungen (77) muß sein:

$$m^2 + n^2 + p^2 = \frac{\varepsilon_1 \mu_1}{c^2}, \quad (79)$$

Nun ist zu berücksichtigen, daß in demjenigen Körper (1), in welchem die Wellen einfallen, die Störungen die Uebereinanderlagerung zweier ebener Wellenbewegungen sind, nämlich der einfallenden ( $m_0$ ,  $n_0$ ,  $p_0$ ) und der reflektierten ( $m_r$ ,  $n_r$ ,  $p_r$ ), während im Körper (2) nur eine gebrochene Wellenbewegung ( $m_d$ ,  $n_d$ ,  $p_d$ ) vorhanden ist.

Da für  $z = 0$  nach den Grenzbedingungen (76) Beziehungen für alle Werte der Zeit  $t$  und der Koordinaten  $x$  und  $y$  zwischen den einfallenden, reflektierten und gebrochenen Wellenbewegungen bestehen sollen, so ist dies nur dadurch möglich, daß sie für  $z = 0$  Funktionen ein und derselben Funktion von  $x$ ,  $y$ ,  $t$  sind. Es müssen also  $T$  und die Koeffizienten  $m$  und  $n$  für alle drei Wellen denselben Wert besitzen. Dies gilt ganz unabhängig von der besonderen Form der Grenzbedingungen. Legen wir die  $y$ -Achse parallel zu dem Schnitt der durch (78) definierten Wellenebene mit der Grenzfläche  $z = 0$ , d. h. legen wir die  $xz$ -Ebene in die sogenannte Einfallsebene des Lichtes, so wird  $n = 0$  für alle drei Wellen. Bezeichnen wir ferner den allen Wellen gemeinsamen Wert von  $m$  mit  $m$ , so müssen nach Analogie der Gleichung (79) die Koeffizienten  $p_0$ ,  $p_r$ ,  $p_d$  den Relationen genügen:

$$m^2 + p_0^2 = m^2 + p_r^2 = \frac{\varepsilon_1 \mu_1}{c^2}, \quad m^2 + p_d^2 = \frac{\varepsilon_2 \mu_2}{c^2}. \quad (80)$$

Nun sind nach (78)  $m$ ,  $n$ ,  $p$  proportional den Richtungskosinus der Normalen zur Wellenebene, d. h. der Fortpflanzungsrichtung der Wellen. Bezeichnet daher  $\varphi$  den Einfallswinkel der Wellen, d. h. denjenigen Winkel, welchen die Fortpflanzungsrichtung der einfallenden Wellen mit der Grenznormale ( $z$ -Achse) bildet, so ist zu setzen

$$m = \frac{\sin \varphi}{\omega_1}, \quad p_0 = \frac{\cos \varphi}{\omega_1}, \quad \omega_1 = \frac{c}{\varepsilon_1 \mu_1}, \quad (81)$$

$\omega_1$  bedeutet die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen im Körper (1).

Aus (80) folgt nun für die reflektierte Welle:

$$p_r = - \frac{\cos \varphi}{\omega_1} = - p_o, \quad (82)$$

welche Beziehung die Gleichheit des Einfallswinkels und Reflexionswinkels ausspricht.

Bezeichnet man den Brechungswinkel (Winkel der Normale der gebrochenen Welle mit der Z-Achse) mit  $\chi$ , so ist analog wie in (81) nach (80) zu setzen:

$$m = \frac{\sin \chi}{\omega_2}, \quad p_d = \frac{\cos \chi}{\omega_2}, \quad \omega_2 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}}. \quad (83)$$

Aus den beiden ersten Gleichungen von (81) und (83) folgt das Snelliussche Brechungsgesetz:

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \chi} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1}} = n, \quad (84)$$

falls man mit  $n$  jetzt den Brechungsexponenten des Körpers (2) gegen den Körper (1) bezeichnet.

Setzt man nun für irgendeine der drei Wellen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_x &= M e^{\frac{i}{\tau}(t - mx - pz)}, & \mathfrak{G}_y &= N e^{\frac{i}{\tau}(t - mx - pz)}, \\ \mathfrak{G}_z &= P e^{\frac{i}{\tau}(t - mx - pz)}, \end{aligned}$$

so ist wegen der Gleichung (23) des VII. Kapitels (S. 420), nämlich:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{G}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{G}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{G}_z}{\partial z} &= 0, \\ mM + pP &= 0, \end{aligned} \quad (85)$$

welche Gleichung die Transversalität der Wellen ausspricht. Bezeichnen wir daher die in der Einfallsebene schwingenden Amplituden der Wellen mit dem unteren Index  $p$ , die senkrecht zur Einfallsebene schwingenden Amplituden mit dem Index  $s$ , so erhalten wir für die magnetischen Kräfte der einfallenden Wellen folgenden mit (85) verträglichen Ansatz (es ist  $p_1$  für  $p_o$  geschrieben):

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_{x0} &= - p_1 \omega_1 E_p e^{\frac{i}{\tau}(t - mx - p_1 z)}, \\ \mathfrak{G}_{y0} &= E_s e^{\frac{i}{\tau}(t - mx - p_1 z)}, \\ \mathfrak{G}_{z0} &= + m \omega_1 E_p e^{\frac{i}{\tau}(t - mx - p_1 z)}. \end{aligned} \quad (86)$$

Wegen der Gleichungen (82) und (85) müssen die magnetischen Kräfte der reflektierten Welle die Form besitzen (es ist  $p_r = - p_1$  zu setzen):

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{E}_{xr} &= -p_1 \omega_1 R_p e^{\frac{i}{c}(t - mx + p_1 z)}, \\
 \mathfrak{E}_{yr} &= R_p e^{\frac{i}{c}(t - mx + p_1 z)}, \\
 \mathfrak{E}_{zr} &= -m \omega_1 R_p e^{\frac{i}{c}(t - mx + p_1 z)},
 \end{aligned} \quad (87)$$

während für die gebrochene Welle die Gleichungen gelten (es ist  $p_2$  für  $p_d$  geschrieben):

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{E}_{xd} &= -p_2 \omega_2 D_p e^{\frac{i}{c}(t - mx + p_2 z)}, \\
 \mathfrak{E}_{yd} &= D_p e^{\frac{i}{c}(t - mx + p_2 z)}, \\
 \mathfrak{E}_{zd} &= +m \omega_2 D_p e^{\frac{i}{c}(t - mx + p_2 z)}.
 \end{aligned} \quad (88)$$

In welchem Sinne die  $p$ -Amplituden als positiv zu rechnen sind, ergibt sich am einfachsten aus einer den Gleichungen (86), (87) und (88) entsprechenden Zeichnung, welche in der Fig. 85 dargestellt ist. Man sieht, daß für jede der drei Wellen die Fortpflanzungsrichtung zur positiven Richtung der Amplitude liegt wie die positive  $X$ -Achse zur positiven  $Z$ -Achse, falls letztere in das Innere des Körpers (2) gerichtet ist.

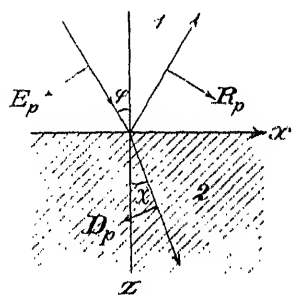


Fig. 85.

(Ganz analoge Gleichungen, wie (86), (87) und (88), gelten für die elektrischen Kräfte in den Wellen. Wir wollen die entsprechenden Amplituden durch deutsche Buchstaben kennzeichnen und daher setzen:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{E}_{x0} &= -p_1 \omega_1 \mathfrak{E}_p e^{\frac{i}{c}(t - mx + p_1 z)}, & \mathfrak{E}_{y0} &= \mathfrak{E}_p \dots, & \mathfrak{E}_{z0} &= m \omega_1 \mathfrak{E}_p \dots, \\
 \mathfrak{E}_{xr} &= +p_1 \omega_1 \mathfrak{R}_p e^{\frac{i}{c}(t - mx + p_1 z)}, & \mathfrak{E}_{yr} &= \mathfrak{R}_p \dots, & \mathfrak{E}_{zr} &= m \omega_1 \mathfrak{R}_p \dots, \\
 \mathfrak{E}_{xd} &= -p_2 \omega_2 \mathfrak{D}_p e^{\frac{i}{c}(t - mx + p_2 z)}, & \mathfrak{E}_{yd} &= \mathfrak{D}_p \dots, & \mathfrak{E}_{zd} &= m \omega_2 \mathfrak{D}_p \dots.
 \end{aligned} \quad (89)$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{E}_{x1} &= \mathfrak{E}_{x0} + \mathfrak{E}_{xr}, & \mathfrak{E}_{x2} &= \mathfrak{E}_{xd}, & \text{usw.} \\
 \mathfrak{E}_{y1} &= \mathfrak{E}_{y0} + \mathfrak{E}_{yr}, & \mathfrak{E}_{y2} &= \mathfrak{E}_{yd}, & \text{usw.}
 \end{aligned}$$

Nach der ersten, zweiten, vierten und fünften der Grenzbedingungen (76) (es muß genügen, diese vier derselben herauszugreifen, da die beiden anderen identisch aus ihnen folgen) müssen daher die Beziehungen bestehen:

$$\begin{aligned}
 p_1 \omega_1 (\mathfrak{E}_p - \mathfrak{R}_p) &= p_2 \omega_2 \mathfrak{D}_p, & \mathfrak{E}_p + \mathfrak{R}_p &= \mathfrak{D}_p, \\
 p_1 \omega_1 (\mathfrak{E}_p - \mathfrak{R}_p) &= p_2 \omega_2 \mathfrak{D}_p, & \mathfrak{E}_p + \mathfrak{R}_p &= \mathfrak{D}_p.
 \end{aligned} \quad (90)$$

Die elektrischen Amplituden sind nun durch die magnetischen bestimmbar und umgekehrt. Denn nach den Hauptgleichungen (20) und (21) des VII. Kapitels, welche für jede der drei Wellen gelten, nämlich:

$$\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z}, \text{ usw. } \frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial y}, \text{ usw.}$$

folgt mit Berücksichtigung der Werte von  $\omega_1$  und  $\omega_2$  nach (81) und (83):

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cdot \mathfrak{E}_p &= -\mathfrak{H}_n, & \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cdot \mathfrak{H}_p &= -\mathfrak{R}_n, & \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cdot \mathfrak{D}_p &= -\mathfrak{D}_n, \\ \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \cdot \mathfrak{E}_p &= \mathfrak{E}_n, & \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \cdot \mathfrak{R}_p &= \mathfrak{H}_n, & \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \cdot \mathfrak{D}_p &= \mathfrak{D}_n. \end{aligned} \quad (91)$$

Diese Gleichungen kann man auch ohne nähere Rechnung aus den auf S. 436 des VII. Kapitels abgeleiteten allgemeinen Sätzen über die Beziehungen zwischen der elektrischen und der magnetischen Kraft einer Welle folgern.

Eliminiert man nun aus (90) die magnetische Kraft mit Hilfe von (91) und setzt für  $\omega_1$  und  $\omega_2$  ihre Werte  $c : \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}$  und  $c : \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}$  ein, so entsteht:

$$\begin{aligned} \frac{\mu_1}{\mu_1} (\mathfrak{E}_n - \mathfrak{H}_n) &= \frac{\mu_2}{\mu_2} \mathfrak{D}_n, & \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} (\mathfrak{E}_p + \mathfrak{H}_p) &= \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cdot \mathfrak{D}_p, \\ \mathfrak{E}_n + \mathfrak{H}_n &= \mathfrak{D}_n, & \frac{\mu_1}{\varepsilon_1 \mu_1} (\mathfrak{E}_p - \mathfrak{H}_p) &= \frac{\mu_2}{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}} \cdot \mathfrak{D}_p, \end{aligned}$$

woraus man ohne Schwierigkeit die reflektierten und gebrochenen Amplituden der elektrischen Kraft durch die einfallenden berechnen kann. Es ergibt sich so für die elektrische Kraft:

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_n &= \mathfrak{E}_n \frac{\mu_1 \mu_2 - \mu_2 \mu_1}{\mu_1 \mu_2 + \mu_2 \mu_1}, & \mathfrak{D}_n &= \mathfrak{E}_n \frac{2 \mu_1 \mu_2}{\mu_1 \mu_2 + \mu_2 \mu_1}, \\ \mathfrak{H}_p &= \mathfrak{E}_p \frac{\mu_1 \varepsilon_2 - \mu_2 \varepsilon_1}{\mu_1 \varepsilon_2 + \mu_2 \varepsilon_1}, & \mathfrak{D}_p &= \mathfrak{E}_p \frac{2 \mu_1 \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}}{\mu_1 \varepsilon_2 + \mu_2 \varepsilon_1} \cdot \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}. \end{aligned} \quad (92)$$

Hieraus folgen mit Hilfe der Gleichungen (91) sofort folgende Beziehungen für die magnetische Kraft:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_p &= \mathfrak{E}_p \frac{\mu_1 \mu_2 - \mu_2 \mu_1}{\mu_1 \mu_2 + \mu_2 \mu_1}, & \mathfrak{D}_p &= \mathfrak{E}_p \frac{2 \mu_1 \sqrt{\mu_1 \mu_2}}{\mu_1 \mu_2 + \mu_2 \mu_1} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}, \\ \mathfrak{R}_n &= \mathfrak{E}_n \frac{\mu_1 \varepsilon_2 - \mu_2 \varepsilon_1}{\mu_1 \varepsilon_2 + \mu_2 \varepsilon_1}, & \mathfrak{D}_n &= \mathfrak{E}_n \frac{2 \mu_1 \varepsilon_2}{\mu_1 \varepsilon_2 + \mu_2 \varepsilon_1}. \end{aligned} \quad (93)$$

Daß auch die dritte und sechste der Grenzbedingungen durch diese Werte erfüllt werden, sieht man sofort, wenn man die Werte in die Gleichungen einsetzt.

Man kann die Frage aufwerfen, unter welchen Bedingungen eine der reflektierten Komponenten verschwindet. Nach (92) und (93) würde das der Fall sein entweder gleichzeitig für  $\mathcal{R}_i$  und  $R_p$ , wenn  $p_1 : p_2 = \mu_1 : \mu_2$  oder gleichzeitig für  $\mathcal{R}_p$  und  $R_s$ , wenn  $p_1 : p_2 = \varepsilon_1 : \varepsilon_2$  wäre. Setzt man für  $p_1$  und  $p_2$  ( $p$  und  $p_0$ ) ihre aus (81) und (83) folgenden Werte ein, so werden jene Bedingungen zu:

$$1) \frac{\cos \varphi}{\cos \chi} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} : \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}, \quad 2) \frac{\cos \varphi}{\cos \chi} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} : \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}. \quad (94)$$

Man sieht, daß nur eine dieser beiden Bedingungen erfüllt sein kann, da ihre rechten Seiten reziprok zueinander sind. Es ist nämlich nach dem Snelliusschen Brechungsgesetz entweder  $\varphi$  stets größer als  $\chi$ , oder stets kleiner als  $\chi$ . Daher ist  $\cos \varphi : \cos \chi$  entweder (bei  $n > 1$ ) für alle Werte von  $\varphi$  kleiner als 1, oder (bei  $n < 1$ ) für alle Werte von  $\varphi$  größer als 1.

Nimmt man zu (94) das Brechungsgesetz:

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \chi} = \frac{\sqrt{\mu_2 \varepsilon_2}}{\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1}} = n$$

hinzu, so kann man  $\chi$  eliminieren und erhält für jede der beiden Bedingungen einen bestimmten Wert von  $\varphi$ , für den die Bedingung erfüllt ist. Die Gleichung für diesen speziellen Wert von  $\varphi$  läßt sich durch einige, leicht ersichtliche Umformungen auf folgende Form bringen:

$$\left. \begin{aligned} 1) \mathcal{R}_s = R_p = 0 \text{ für } \operatorname{tg} \varphi = n \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \frac{\mu_2}{\mu_1}} \\ 2) \mathcal{R}_p = R_s = 0 \text{ für } \operatorname{tg} \varphi = n \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \end{aligned} \right\} \quad (95)$$

Die Erfahrungen der Optik haben gelehrt, daß bei der Reflexion an durchsichtigen Medien natürliches Licht in geradlinig polarisiertes Licht verwandelt, d. h. eine Komponente der einfallenden Schwingung nicht reflektiert wird für denjenigen Einfallswinkel  $\varphi'$ , für den die Beziehung gilt:

$$\operatorname{tg} \varphi' = n \quad (\text{Brewstersches Gesetz}). \quad (96)$$

Dieser Einfallswinkel  $\varphi'$  wird der Polarisationswinkel des Körpers (2) gegen das Medium (1) genannt. Für ihn stehen, wie aus (96) in Verbindung mit dem Brechungsgesetz folgt, die Fortpflanzungsrichtungen der reflektierten und der gebrochenen Welle aufeinander senkrecht. Da beide Körper (1) und (2) isotrop vorausgesetzt sind, so folgt aus Symmetrierück-

sichten, daß die Schwingungen dann entweder nur in der Einfallsebene oder senkrecht zu ihr erfolgen. Es muß also für  $\varphi = \varphi'$  entweder die p- oder die s-Komponente von R oder  $\mathfrak{R}$  verschwinden. Dieses empirisch gefundene Gesetz ergibt sich aus den Gleichungen (95), wenn

entweder  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$  ist; dann ist für den Polarisationswinkel

$$\mathfrak{R}_s = R_p = 0;$$

oder wenn  $\mu_1 = \mu_2$  ist; dann ist für den Polarisationswinkel

$$\mathfrak{R}_p = R_s = 0.$$

Die zweite von diesen beiden Gleichungen ist nun tatsächlich für alle durchsichtigen Körper sehr nahezu erfüllt, falls wir dem  $\mu$  die aus Experimenten mit langsam veränderlichen magnetischen oder elektromagnetischen Zuständen ermittelten Werte beilegen. Unter allen durchsichtigen Körpern haben konzentrierte Eisenchloridlösungen eine am meisten von 1 abweichende Magnetisierungskonstante, nämlich etwa  $\mu = 1,00075$  (vgl. oben S. 163). Legt man diesen Wert zugrunde für die Reflexion des Lichtes in Luft an Eisenchlorid, d. h. setzt man  $\mu_1 = 1$ ,  $\mu_2 = 1,00075$ , und setzt man in (95) 2)  $\varphi = \varphi' - \zeta$ , wo  $\zeta$  ein kleiner Winkel ist, so würde aus (95) folgen:

$$\operatorname{tg} \zeta = 0,00075 \cdot \frac{n^3}{(n^2 - 1)(n^2 + 1)},$$

d. h. z. B. für  $n = 1,45$ ;  $\zeta = 2,3'$ . Dies bedeutet eine so geringe Abweichung vom Brewsterschen Gesetz, daß sie sich vollkommen in anderen Störungen (durch Oberflächenschichten) verstecken würde. Es ist daher für die hier zu untersuchenden Erscheinungen die Differenz der Magnetisierungskonstanten durchsichtiger Körper zu vernachlässigen, wenn diese für Lichtschwingungen nicht höhere Beträge erreicht wie für magneto-statische Erscheinungen. Diese Annahme werden wir machen, solange wir keinen Beweis für das Gegenteil haben. Die elektrische Theorie entspricht also den tatsächlich beobachteten Verhältnissen.

Wir wollen daher nun mit einer für die hier zu berechnenden Erscheinungen ausreichenden Annäherung für alle Körper  $\mu = 1$  setzen. Es folgt dann also aus den Formeln (92) und (93) das Brewstersche Gesetz (96) für den Polarisationswinkel  $\varphi'$ , und nach den obigen Ausführungen verschwindet dann für  $\varphi = \varphi'$   $\mathfrak{R}_p$  und  $R_s$ . Fallen also elektromagnetische Wellen unter dem Polarisationswinkel auf die Grenzfläche zweier durchsichtiger Medien, so schwingt in der reflektierten Welle die elektrische Kraft vollständig senkrecht zur Einfallsebene, die magnetische Kraft vollständig in der Einfallsebene. Ueber die Folgerungen, die sich hieraus für die optischen Erscheinungen und den Begriff der Polarisations-ebene ergeben, siehe Drudes Optik (II. Aufl., S. 268 ff.).



Die Formeln (92) und (93) nehmen für  $p_1 = p_2 = 1$ , da dann auch nach (84)  $\varepsilon_2 : \varepsilon_1$  gleich  $\omega_1^2 : \omega_2^2$  wird, die Gestalt an, falls man noch für  $p_1$  und  $p_2$  die Werte nach (81) und (83) einsetzt:

$$\begin{aligned} R_s &= \mathcal{E}_s \frac{\omega_2 \cos \varphi - \omega_1 \cos \chi}{\omega_2 \cos \varphi + \omega_1 \cos \chi}, & \mathcal{D}_s &= \mathcal{E}_s \frac{2 \omega_1 \cos \varphi}{\omega_2 \cos \varphi + \omega_1 \cos \chi}, \\ R_p &= \mathcal{E}_p \frac{\omega_1 \cos \varphi - \omega_2 \cos \chi}{\omega_1 \cos \varphi + \omega_2 \cos \chi}, & \mathcal{D}_p &= \mathcal{E}_p \frac{2 \omega_2 \cos \varphi}{\omega_1 \cos \varphi + \omega_2 \cos \chi}, \\ R_p &= \mathcal{E}_p \frac{\omega_2 \cos \varphi - \omega_1 \cos \chi}{\omega_2 \cos \varphi + \omega_1 \cos \chi}, & \mathcal{D}_p &= \mathcal{E}_p \frac{2 \omega_1 \cos \varphi}{\omega_2 \cos \varphi + \omega_1 \cos \chi}, \\ R_s &= \mathcal{E}_s \frac{\omega_1 \cos \varphi - \omega_2 \cos \chi}{\omega_1 \cos \varphi + \omega_2 \cos \chi}, & \mathcal{D}_s &= \mathcal{E}_s \frac{2 \omega_2 \cos \varphi}{\omega_1 \cos \varphi + \omega_2 \cos \chi}. \end{aligned}$$

Setzt man hierin für  $\omega_1 : \omega_2$  den Wert  $\sin \varphi : \sin \chi$  nach (84) ein, so folgt:

$$R_s = - \mathcal{E}_s \frac{\sin(\varphi - \chi)}{\sin(\varphi + \chi)}, \quad \mathcal{D}_s = \mathcal{E}_s \frac{2 \cos \varphi \sin \chi}{\sin(\varphi + \chi)}, \quad (97)$$

$$R_p = \mathcal{E}_p \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \chi)}{\operatorname{tg}(\varphi + \chi)}, \quad \mathcal{D}_p = \mathcal{E}_p \frac{2 \cos \varphi \sin \chi}{\sin(\varphi + \chi) \cos(\varphi - \chi)},$$

$$R_p = - \mathcal{E}_p \frac{\sin(\varphi - \chi)}{\sin(\varphi + \chi)}, \quad \mathcal{D}_p = \mathcal{E}_p \frac{\sin 2 \varphi}{\sin(\varphi + \chi)}, \quad (97')$$

$$R_s = \mathcal{E}_s \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \chi)}{\operatorname{tg}(\varphi + \chi)}, \quad \mathcal{D}_s = \mathcal{E}_s \frac{\sin 2 \varphi}{\sin(\varphi + \chi) \cos(\varphi - \chi)}.$$

Diese Formeln für die Reflexion elektromagnetischer Wellen sind identisch mit den Formeln, die aus mechanisch elastischen Voraussetzungen heraus für die Reflexion des Lichtes abgeleitet worden sind, und zwar ist das Formelsystem (97) identisch mit dem aus der mechanischen Theorie Fresnels folgenden, welcher annahm, daß der Aether in allen Körpern die gleiche Elastizität, aber verschiedene Dichtigkeit besäße, während die Formeln (97') für die magnetische Kraft identisch mit den Formeln Neumanns sind, welcher annahm, daß der Aether in allen Körpern die gleiche Dichte, aber verschiedene Elastizität besäße. Die elektromagnetische Begründung dieser Formeln beseitigt die Unbestimmtheit, die sie in der mechanischen Theorie hatten.

Wenn sich die elektrische Schwingung in der einfallenden Welle unter einem Winkel  $\alpha$  gegen die Y-Achse vollzieht, so ist

$$\mathcal{E}_s = \mathcal{E} \cdot \cos \alpha, \quad \mathcal{E}_p = \mathcal{E} \cdot \sin \alpha,$$

unter  $\mathcal{E}$  die Amplitude der einfallenden Schwingung verstanden. Die Komponenten der reflektierten und der hindurchgehenden Schwingung setzen sich dann zu einer Schwingung zusammen, die mit der Y-Achse den Winkel  $\beta$  bzw.  $\delta$  macht, und es ist:

$$\mathfrak{R}_s = \mathfrak{R} \cdot \cos \beta \quad \mathfrak{R}_p = \mathfrak{R} \cdot \sin \beta$$

$$\mathfrak{D}_s = \mathfrak{D} \cdot \cos \delta \quad \mathfrak{D}_p = \mathfrak{D} \cdot \sin \delta.$$

Aus (97) folgt dann:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \beta &= -\operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{\cos(\varphi + \chi)}{\cos(\varphi - \chi)} \\ \operatorname{tg} \delta &= \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{1}{\cos(\varphi - \chi)} \end{aligned} \right\} \quad (98)$$

Wir leiten auch noch die Formeln für den Spezialfall des senkrechten Auftreffens der Wellen auf die Grenzfläche ab. Für  $\varphi = 0$  wird:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{R}_s &= -\mathfrak{E}_s \frac{n-1}{n+1}, & \mathfrak{D}_s &= \mathfrak{E}_s \frac{2}{n+1}, \\ \mathfrak{R}_p &= \mathfrak{E}_p \frac{n-1}{n+1}, & \mathfrak{D}_p &= \mathfrak{E}_p \frac{2}{n+1}. \end{aligned} \right\} \quad (99)$$

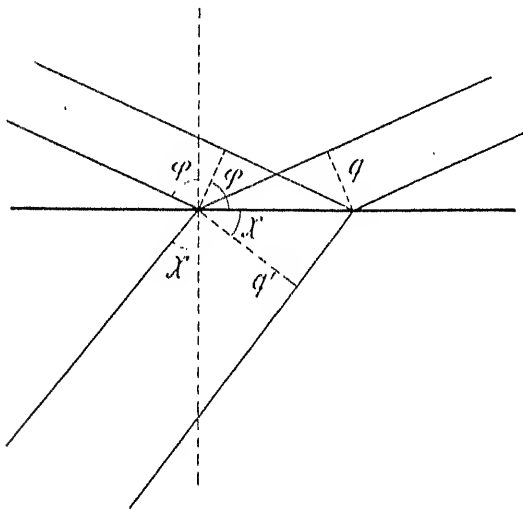


Fig. 86.

Endlich wollen wir noch den Nachweis führen, daß die aufgestellten Lösungen des Problems auch dem Satz von der Erhaltung der Energie genügen. Dazu müssen wir den Energiestrom in der einfallenden Welle einerseits, in der reflektierten und gebrochenen Welle andererseits betrachten. Nach (43) in Abschnitt 9 des VII. Kapitels kann die in jeder Sekunde durch die Flächeneinheit der Wellenebene tretende Energiemenge dargestellt werden durch

$$\mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} (f_1^2 + \varphi_1^2),$$

wo  $f_1$  und  $\varphi_1$  die in Abschnitt 9 des VII. Kapitels definierten Wellenfunktionen bedeuten. Wir können sie in unserem Falle mit den beiden

Funktionen identifizieren, welche die in und senkrecht zur Einfallsebene schwingenden Komponenten unserer Welle darstellen. Dann ist  $\mathfrak{E}$  in der einfallenden Welle proportional mit

$$\frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cdot (\mathfrak{E}_n^2 + \mathfrak{E}_p^2).$$

Da die Energie senkrecht zur Wellenfläche strömt, so sind die Normalen der Wellenebene die Strömungslinien der Energie; denkt man sich auf einem Ausschnitt  $q$  der Wellenebene einen Zylinder von Normalen errichtet, so strömt in diesem Zylinder die Energiemenge  $\mathfrak{E}q$ . Diese Energie geht beim Auftreffen auf die Grenzfläche einerseits in die reflektierte Welle, andererseits in die gebrochene über, und pflanzt sich in beiden in Zylindern fort, deren Querschnitt für die reflektierte Welle auch den Wert  $q$ , für die gebrochene Welle aber den Wert  $q'$  hat. Nach dem Brechungsgesetz (siehe Fig. 86) ist:

$$\frac{q}{\cos \varphi} = \frac{q'}{\cos \chi}.$$

Indem wir dies berücksichtigen, können wir die Summe der reflektierten und gebrochenen Energieströmung in der Form ansetzen:

$$\begin{aligned} & \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} (\mathfrak{R}_n^2 + \mathfrak{R}_p^2) q + \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} (\mathfrak{D}_n^2 + \mathfrak{D}_p^2) q' \\ &= \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} q \cdot \left\{ \mathfrak{R}_n^2 + \mathfrak{R}_p^2 + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \cdot \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{\cos \chi}{\cos \varphi}} (\mathfrak{D}_n^2 + \mathfrak{D}_p^2) \right\} \end{aligned}$$

Führen wir in diese Gleichung die durch (92) gegebenen Werte der Amplituden ein und beachten die Beziehungen (81) und (83), so erhalten wir

$$\frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} q \cdot (\mathfrak{E}_n^2 + \mathfrak{E}_p^2).$$

Das ist aber derjenige Ausdruck, dem die Energieströmung der einfallenden Welle im Zylinder vom Querschnitt  $q$  proportional ist.

## 27. Messung von Dielektrizitätskonstanten mit Hilfe freier elektrischer Wellen.

a) Brechung der Wellen durch Prismen. Schon oben S. 568 war erwähnt, daß Hertz die Brechung elektrischer Wellen durch ein Pechprisma von  $30^\circ$  brechendem Winkel nachweisen konnte, und daß sich daraus eine Bestimmung der Dielektrizitätskonstante des Pechs nach den aus der Optik bekannten Formeln ergibt. Ellinger konnte nach dieser Methode sogar die Dielektrizitätskonstante des

Wassers<sup>1)</sup> und Alkohols<sup>2)</sup> bestimmen. Der Erfolg dieser Methode war wegen der starken Verluste, welche die elektrische Energie durch Reflexion an den Oberflächen des Wasser- bzw. Alkoholprismas infolge des großen Wertes von  $n$  nach Formel (99) erleidet, nicht von vornherein sichergestellt. Durch ein Wasserprisma von  $30^\circ 45'$  brechendem Winkel wurden die Wellen um  $30^\circ$  abgelenkt. Daraus ergibt sich der Brechungsexponent des Wassers, nach der bekannten Formel für das Minimum der Ablenkung im Prisma, die sich aus dem Snelliusschen Brechungsgesetz ergibt:

$$n = \frac{\sin \frac{1}{2} (30^\circ + 30^\circ 45')}{\sin \frac{1}{2} \cdot 30^\circ 45'} = 8,9,$$

d. h. die Dielektrizitätskonstante zu

$$\epsilon = n^2 = 79,2.$$

Ein Alkoholprisma von  $8^\circ 16'$  brechendem Winkel lenkte die Wellen um  $33^\circ$  ab. Daraus folgt

$$n = 4,9; \quad \epsilon = n^2 = 24,0.$$

Diese Werte stimmen mit den nach anderen Methoden gewonnenen nahe überein.

Weitere Messungen nach der prismatischen Methode hat Lampa gemacht (siehe die auf S. 575 genannten Arbeiten). Er fand mit den von ihm benutzten sehr kurzen elektrischen Wellen für Wasser ähnliche Werte wie Ellinger, die aber mit abnehmender Wellenlänge anstiegen, für Alkohol dagegen wesentlich kleinere Werte, die zudem mit abnehmender Wellenlänge abnahmen (von 6,8 bis 5). Die Frage des Einflusses der Wellenlänge auf den Brechungsexponenten soll in den nächsten Abschnitten erörtert werden. Lampa hat außerdem Paraffin, Ebonit, Schwefel, Benzol, Glycerin und Terpentinöl nach der prismatischen Methode untersucht.

Diese Anwendung des Prismas zur Bestimmung der Dielektrizitätskonstante ist eine wesentlich andere als die von Perot benutzte (vgl. oben S. 73).

b) Reflexion an ebenen Wänden. Die Analogie mit den optischen Vorgängen ergibt noch eine andere Methode, um die Dielektrizitätskonstante eines Isolators zu messen. Aus dem Polarisationswinkel einer Substanz ergibt sich nach den Formeln des vorigen Abschnittes ihr Brechungsexponent. Nachdem nun zuerst Trouton<sup>3)</sup> die Reflexion

<sup>1)</sup> H. Ellinger, Wied. Ann. 46, S. 513, 1892.

<sup>2)</sup> H. Ellinger, Wied. Ann. 48, S. 108, 1893.

<sup>3)</sup> Trouton, Nat. 39, S. 391; 40, S. 398, 1890.

ebener elektrischer Wellen an einer ebenen Wand eines Isolators beobachtet hatte, studierte Klemencie<sup>1)</sup> diese Verhältnisse beim Schwefel in quantitativer Weise. Es ergab sich große Analogie mit den Gesetzen, welchen ebene optische Wellen bei der Reflexion an einem durchsichtigen Spiegel gehorchen; es waren nur gewisse Störungen durch zu kleine Wahl der Dimensionen der Schwefelwand veranlaßt, so daß Beugungseffekte auftraten. Der Polarisationswinkel der Schwefelwand ergab sich zwischen  $60^\circ$  und  $65^\circ$ , d. h. dem Werte ( $63^\circ$ ) des optischen Polarisationswinkels nahe benachbart. Daraus folgt, daß die Dielektrizitätskonstante ungefähr gleich dem Quadrat des optischen Brechungsindex ist, welche Beziehung mit den Resultaten anderer Methoden zur Bestimmung der Dielektrizitätskonstante des Schwefels übereinstimmt.

Cole<sup>2)</sup> hat die Werte für  $\mathfrak{N}_s$  und  $\mathfrak{N}_p$  bei Reflexion elektrischer Wellen unter  $45^\circ$  an einer Zinkoberfläche und an der Oberfläche von Wasser, von Alkohol und von Petroleum bestimmt und aus diesen Messungen mit Hilfe der Formeln (97) den Brechungsexponenten dieser Substanzen berechnet. Er findet für Wellen von 5 cm Länge für Wasser 8,8—8,9, für Alkohol 3,2—3,1, für Petroleum 1,5. Nach dem gleichen Verfahren hat neuerdings Merczyng die Brechungsexponenten kurzer elektrischer Wellen für Glyzerin, Methylalkohol, Amylalkohol, Essigsäure, Anilin und Aethyläther gemessen<sup>3)</sup>.

Weniger zur Messung von Dielektrizitätskonstanten als zur Prüfung der theoretisch entwickelten Gesetzmäßigkeiten hat Righi<sup>4)</sup> Reflexionsversuche an Schwefel, Paraffin und Glas angestellt und speziell die Azimute  $\beta$  der von Schwefel reflektierten Schwingung für verschiedene Einfallswinkel bei einem Azimut  $\alpha = 45^\circ$  der einfallenden Wellen gemessen [siehe Formel (98)]. Er fand folgende Zahlen:

i	$45^\circ$	$50^\circ$	$55^\circ$	$60^\circ$	$65^\circ$	$70^\circ$
$\beta$	$-25^\circ$	$-19^\circ$	$-11^\circ$	$-5^\circ$	$7^\circ$	$18^\circ$
$\text{tg } \beta$	0,47	0,34	0,19	0,09	0,12	0,32
$\frac{\cos(\varphi + \chi)}{\cos(\varphi - \chi)}$	0,42	0,30	0,18	0,05	0,09	0,25

In Anbetracht der geringen Genauigkeit, mit der die Messungen nur möglich sind, ist die Uebereinstimmung der Beobachtungen mit der Theorie als eine ausreichende Bestätigung anzusehen.

c) Interferenzialmethoden. Diese sind schon oben Abschnitt 15 besprochen worden.

<sup>1)</sup> J. Klemencie, Wied. Ann. 45, S. 62, 1892.

<sup>2)</sup> A. D. Cole, Wied. Ann. 57, S. 290, 1896.

<sup>3)</sup> H. Merczyng, Ann. der Phys. (4) 33, S. 1, 1910.

<sup>4)</sup> A. Righi, Die Optik der elektrischen Schwingungen, Leipzig 1898, S. 139 ff.

## 28. Leitende Medien. Absorption der fortschreitenden Wellen.

Ebene elektromagnetische Wellen pflanzen sich in einem vollkommenen Isolator ohne Schwächung fort; dagegen tritt letztere ein in einem Medium, welches galvanische Leitfähigkeit besitzt, da die Energie der Wellen allmählich in Joulesche Wärme umgesetzt wird.

Die Grundgleichungen für ein leitendes Medium haben wir bereits in Abschnitt 6 des VII. Kapitels aufgestellt. An die Stelle der Gleichungen (20) des Maxwell'schen Gleichungssystems für Isolatoren (siehe S. 420) treten die Gleichungen (27), während das zweite Tripel der Maxwell'schen Gleichungen, die Formeln (21), unverändert auch im leitenden Medium gelten. Durch dieselben Prozesse, durch die in Abschnitt 9 des VII. Kapitels das Gleichungssystem (34) für Isolatoren gewonnen wurde, kann man auch hier die Größen  $\mathfrak{E}_x$ ,  $\mathfrak{E}_y$ ,  $\mathfrak{E}_z$  aus (27) mit Hilfe von (21) eliminieren und erhält:

$$\frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial t^2} + \frac{4 \pi \mu \sigma}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial t} - \Delta \mathfrak{E}_x = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial z} \right).$$

Aus denselben Gründen, wie oben auf S. 433, können wir auch hier von dem letzten Gliede dieser Gleichung absehen. Die entsprechenden Gleichungen erhält man, wenn man  $\mathfrak{E}_x$ ,  $\mathfrak{E}_y$ ,  $\mathfrak{E}_z$  eliminiert, für  $\mathfrak{H}_x$ ,  $\mathfrak{H}_y$ ,  $\mathfrak{H}_z$ . Es treten also an Stelle der Gleichungen (77) dieses Kapitels für isolierende Medien die folgenden Gleichungen für leitende Medien:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_x}{\partial t^2} + \frac{4 \pi \sigma \mu}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial t} &= \Delta \mathfrak{H}_x \text{ und ebenso für } \mathfrak{H}_y, \mathfrak{H}_z \\ \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial t^2} + \frac{4 \pi \sigma \mu}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial t} &= \Delta \mathfrak{E}_x \text{ und ebenso für } \mathfrak{E}_y, \mathfrak{E}_z \end{aligned} \right\} \quad (100)$$

Die Lösung dieser Gleichungen gestaltet sich dadurch sehr einfach, daß man die elektrische oder magnetische Kraft in Form einer Exponentialfunktion der Zeit mit imaginärem Exponenten annimmt. Die Gleichungen (100) gehen dann direkt in die Gleichungen (77) für Isolatoren über, nur daß an Stelle der ihre Natur charakterisierenden reellen Größe  $\varepsilon$  eine komplexe Größe tritt. Da nämlich unter der gemachten

Annahme über  $\mathfrak{E}_x$   $\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial t} = \frac{1}{\tau} \mathfrak{E}_x$ , also  $\frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial t^2} = \frac{1}{\tau} \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial t}$  und daher auch  $\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial t} = -\tau \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial t^2}$  ist, so kann (100) in der Form geschrieben werden:

$$-\frac{\mu}{c^2} (\varepsilon - 4 \pi \tau \sigma) \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial t^2} = \Delta \mathfrak{E}_x, \quad (100')$$

d. h. bei Vorhandensein von Leitungsströmen tritt  $(\epsilon - 4\pi i\sigma\tau)$  an Stelle der reellen Größe  $\epsilon$ .

Wir wollen annehmen, daß sich ebene Wellen parallel der z-Achse fortpflanzen mögen. Gemäß der obigen Annahme ist also zu schreiben:

$$\mathcal{E}_x = A \cdot e^{i(t - p_0 z)}. \quad (101)$$

Aber mit Rücksicht auf die komplexe Form des Faktors in (100') ist auch  $p_0$  nicht mehr reell, denn es muß ja der Gleichung genügen:

$$\left( \frac{\mu \epsilon}{c^2} - \frac{4\pi \mu \sigma \tau}{c^2} \right) = p_0^2.$$

Setzen wir also

$$p_0 = p + i p',$$

so ist

$$\left. \begin{aligned} p^2 - p'^2 &= \frac{\mu \epsilon}{c^2} \\ 2p p' &= \frac{4\pi \mu \sigma \tau}{c^2} \end{aligned} \right\} \quad (102)$$

und (101) geht über in

$$\mathcal{E}_x = A e^{-\frac{p' z}{\tau}} \cdot e^{i(t - p z)}. \quad (103)$$

Die physikalische Bedeutung von  $\mathcal{E}_x$  erhalten wir, indem auf der rechten Seite dieser Gleichung der konjugierte (nur durch das Vorzeichen von  $i$  verschiedene) Ausdruck addiert wird. Dies ergibt:

$$\mathcal{E}_x = A \left\{ e^{\frac{i}{\tau}(t - p z + i p' z)} + e^{-\frac{i}{\tau}(t - p z + i p' z)} \right\} = 2A e^{-\frac{p' z}{\tau}} \cos\left(\frac{t - p z}{\tau}\right). \quad (104)$$

Hieraus erkennt man, daß in diesem Falle, wo  $p_0$  komplex ist, die Amplitude der Wellen beim Fortschreiten nach einer Exponentialfunktion abnimmt, mit anderen Worten, daß die Wellen eine Absorption erleiden.

Nach (104) ist  $p$ , d. h. der reelle Teil von  $p_0$ , gleich der reziproken Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen, während der imaginäre Bestandteil von  $p_0$ , nämlich  $p'$ , ein Maß für die Dämpfung der Wellen, d. h. die Absorption, ergibt.

Setzt man

$$p = \frac{n}{c}, \quad p' = \frac{k}{c}, \quad (105)$$

so bezeichnet  $n$  das Verhältnis der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen im leeren Raume zu der der Wellen in dem betrachteten Körper, d. h. den Brechungsexponenten desselben gegen den leeren

Raum. -- Da ferner unter Berücksichtigung der Beziehung  $\tau = \frac{T}{2\pi}$

$$\epsilon = \frac{\mu' z}{c} = e^{-2\pi k \frac{z}{\lambda_0}}$$

ist, wo  $\lambda_0 = cT$  die Wellenlänge der Wellen im leeren Raume ist, so nimmt die Amplitude der Wellen nach Durchlaufen der Strecke  $z = \lambda_0$  im Verhältnis  $1 : e^{2\pi k}$  ab. Wir wollen  $k$  den Absorptionskoeffizienten des Körpers nennen.

Entsprechend der Bemerkung auf S. 424 ist in den aufgestellten Gleichungen  $\sigma$  in elektrostatischem Maße gerechnet;  $\sigma/c^2$  bedeutet dann, gemäß Abschnitt 6, Kapitel VI, die Leitfähigkeit  $\sigma_m$  in elektromagnetischem Maße.

Für sogenannte unvollkommene Isolatoren ist die Leitfähigkeit  $\sigma$  sehr klein. Man kann aber eine stetige Reihenfolge von Körpern aufstellen, für welche  $\sigma$  nach und nach größer wird. Diese Reihenfolge endet mit den Metallen, für welche  $\sigma$  die höchsten Beträge erreicht. Eine gewisse Mittelstellung nehmen die Elektrolyte und destilliertes Wasser ein. Folgende Tabelle gibt die Leitfähigkeit  $\sigma'$  einiger Körper, bezogen auf Quecksilber. Die Leitfähigkeit  $\sigma_m$  nach absolutem Maß findet man nach Formel (20) auf S. 362 durch Multiplikation von  $\sigma'$  mit dem Faktor  $1,063 \cdot 10^{-5}$ .

Tabelle der Leitfähigkeiten.

	$\sigma'$	$\sigma_m$	$2\pi\sigma_m$
Kupfer (0°) . . . . .	60	$6,4 \cdot 10^{-4}$	$38 \cdot 10^6$
Quecksilber . . . . .	1	$1,1 \cdot 10^{-5}$	$7 \cdot 10^6$
25 % NaCl-Lösung . . .	$2 \cdot 10^{-5}$	$2,1 \cdot 10^{-10}$	$1,2 \cdot 10^1$
Destilliertes Wasser . .	$7 \cdot 10^{-10}$	$7,4 \cdot 10^{-15}$	$4,5 \cdot 10^{-4}$

Aus den Grundgleichungen geht hervor, daß, je größer die Leitfähigkeit wird, um so mehr die Leitungsströme neben den Verschiebungsströmen auftreten. Jedoch hängt ihr gegenseitiges Größenverhältnis auch wesentlich von der Schnelligkeit der Stromwechsel ab, indem die Verschiebungsströme um so mehr zur Geltung kommen, je größer diese Schnelligkeit ist. Denn in der Gleichung (100') rührt der erste Summand auf der linken Seite  $\frac{\mu \epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}_x}{\partial t^2}$  von den Verschiebungsströmen, der zweite, imaginär geschriebene, von den Leitungsströmen her. Die komplexe Verbindung beider hat physikalisch die Bedeutung einer Phasendifferenz zwischen beiden Arten von Strömen. Das Größenverhältnis aber der Leitungs- und der Verschiebungsströme



ist durch das Verhältnis der beiden Faktoren von  $\frac{\sigma^2 \epsilon}{\omega^2 \tau}$  gegeben, also durch den Quotienten  $\frac{4\pi\sigma\tau}{\epsilon}$ , der sich in Berücksichtigung der Beziehungen  $\tau = \frac{T}{2\pi}$ ,  $\sigma = c^2\sigma_m$  und  $\lambda = cT$  in der Form schreiben läßt:

$$\frac{2c\sigma_m\lambda}{\epsilon}.$$

Aus den in der letzten Kolonne der vorigen Tabelle angeführten Werten von  $2c\sigma_m$  ergibt sich, daß, falls die Dielektrizitätskonstante  $\epsilon$  der Metalle selbst die Größe 1000 erreichen sollte, doch für alle mit elektrischen Experimenten zu erreichenden Wellenlängen, deren kleinste auf 10 cm zu schätzen ist, die Verschiebungsströme der Metalle gegen ihre Leitungsströme zu vernachlässigen sind, da ihr Größenverhältnis selbst für Quecksilber unter der Zahl 1:7000 bleiben muß. Daher waren wir also berechtigt, für alle elektrischen Experimente, selbst für die Righischen Wellen der Hertzischen Versuche, nur Leitungsströme in den Metallen anzunehmen. Für  $\epsilon = 1000$  würden erst bei Wellenlängen der Größenordnung  $\lambda = 0,25 \cdot 10^{-4}$  cm, welche kurzen optischen Wellen entsprechen, für Kupfer die Verschiebungsströme gegen die Leitungsströme ins Gewicht fallen. Dies zeigt also, daß wir bei der Anwendung unserer Formeln auf optische Verhältnisse bei Metallen das etwaige Vorhandensein einer Dielektrizitätskonstante zu berücksichtigen haben.

Anders liegen die Verhältnisse beim Wasser. Setzen wir für dieses  $\epsilon = 80$ , so ergibt sich, daß schon für eine Wellenlänge von  $\lambda = \frac{80}{4,7} 10^4 = 1,7 \cdot 10^5$  cm die Verschiebungsströme von gleicher Stärke sind wie die Leitungsströme. Dies würde einer Schwingungsperiode  $T$  von  $6 \cdot 10^{-5}$  sek entsprechen, wie sie schon durch Entladungen großer Kondensatoren zu erreichen ist (vgl. oben S. 444). Für Hertzische Schwingungen, selbst von der Wellenlänge  $\lambda = 10 \text{ m} = 10^3$  cm, würden die Leitungsströme 170mal schwächer sein als die Verschiebungsströme. Daher kann für diese Versuche das Wasser lediglich als Isolator behandelt werden.

Es wird jetzt auch sofort das oben S. 569 angeführte Resultat verständlich, daß schlechte Leiter, wie z. B. Holz, Papier, Wasser, für statische Ladungen oder langsam veränderliche elektrische Zustände als Leiter wirken, z. B. Schirmwirkungen ausüben, während sie für schnelle Schwingungen sich wie Isolatoren verhalten, d. h. dieselben nicht absorbieren, sondern durchlassen.

## 29. Reflexion und Brechung an leitenden Medien.

Wir wollen uns nun zunächst damit beschäftigen, in welcher Weise eine komplexe Form von  $\epsilon$  die Reflexionsgesetze abändert. Die Entstehung dieser komplexen Form, d. h. ihre Beziehung zur Leitfähigkeit, soll uns zunächst nicht kümmern. Wir setzen zwei Medien voraus, die in einer ebenen Grenzfläche aneinanderstoßen. Diese Grenzebene werde wieder zur  $XY$ -Ebene genommen, die Einfallsebene der ebenen Wellen zur  $XZ$ -Ebene, wie in Abschnitt 26. Als Grenzbedingungen für  $z = 0$  genügen die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_{x1} &= \mathfrak{G}_{x2} & \mathfrak{G}_{y1} &= \mathfrak{G}_{y2} \\ \mathfrak{E}_{x1} &= \mathfrak{E}_{x2} & \mathfrak{E}_{y1} &= \mathfrak{E}_{y2} \end{aligned} \quad (106)$$

deren Gültigkeit aus den Ueberlegungen der S. 422 auch in unserem Falle folgt. Im Inneren des ersten Mittels bestehen die Hauptgleichungen:

$$\frac{\epsilon_1 \mu_1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{G}_{x1}}{\partial t^2} = \Delta \mathfrak{G}_{x1}, \quad \frac{\epsilon_1 \mu_1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_{x1}}{\partial t^2} = \Delta \mathfrak{E}_{x1} \text{ usw.} \quad (77')$$

Im Inneren des zweiten Mittels dagegen die Gleichungen:

$$\frac{a \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{G}_{x2}}{\partial t^2} = \Delta \mathfrak{G}_{x2}, \quad \frac{a \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_{x2}}{\partial t^2} = \Delta \mathfrak{E}_{x2}, \quad (100'')$$

wo

$$a = \epsilon_2 - 1 \text{ ist,} \quad b = 4\pi\tau. \quad (107)$$

Wir haben dann dasselbe Gleichungssystem, wie es in Abschnitt 26 der Theorie der Reflexion an durchsichtigen isotropen Körpern zugrunde liegt, nur daß an Stelle der dort auftretenden reellen Größe  $\epsilon$  hier die komplexe Größe  $a$  tritt.

Die Komponenten der elektrischen Kraft sind daher wieder in der Form darstellbar:

$$\mathfrak{E}_{x2} = M e^{\frac{1}{c} [t - mx - pz]}, \quad \frac{1}{\tau} = \frac{2\pi}{T}, \quad (108)$$

wie auch unmittelbar durch Einsetzen von (107) in (100'') folgt.

Im ersten Medium besteht, wie oben S. 624, die Gleichung:

$$m^2 + p^2 = \frac{\mu_1 \epsilon_1}{c^2}, \quad (109)$$

im zweiten die Gleichung:

$$m^2 + p^2 = \frac{\mu_2 a}{c^2}. \quad (109')$$

Im ersten Medium sind, da es keine merkliche Absorption haben soll,  $m$  und  $p$  reell und haben nach den Gleichungen (81) der S. 624 die Bedeutung:

$$m = \frac{\sin \varphi}{\omega_1}, \quad p = \frac{\cos \varphi}{\omega_1}, \quad (110)$$

wo  $\varphi$  der Winkel zwischen der Wellennormale und der Z-Achse, und  $\omega_1$  die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen im durchsichtigen Medium ist. Da die Z-Achse senkrecht zur Grenze zwischen dem durchsichtigen und dem absorbierenden Medium liegt, so bedeutet  $\varphi$  den Einfallswinkel der Wellen. Ferner soll die positive Richtung der Z-Achse in das absorbierende Medium hinein gerichtet sein. Im zweiten Medium muß der Koeffizient  $m$  denselben Wert wie für die Wellen im durchsichtigen Körper besitzen, da dieses nach S. 624 wegen des Bestehens irgendwelcher, für alle Werte von  $x$ ,  $y$ ,  $t$  gültigen Grenzbedingungen notwendig ist.  $m$  ist also auch im absorbierenden Körper eine reelle Größe. Dagegen muß  $p$  im zweiten Körper eine komplexe Größe sein. Unterscheiden wir die Werte von  $p$  für das erste und das zweite Mittel wieder durch die Indizes 1 und 2, so ist

$$m^2 + (p_2 - ip_1')^2 = \frac{\mu_2 \epsilon_2}{c^2}, \quad (109')$$

während nach (110) ist:

$$m = \frac{\sin \varphi}{\omega_1}, \quad p_1 = \frac{\cos \varphi}{\omega_1}. \quad (110')$$

Da Hauptgleichungen und Grenzbedingungen ganz die gleichen wie in Abschnitt 26 sind, so gelten auch unmittelbar die dortigen Formeln (92) für die elektrische, bzw. die Formeln (93) für die magnetische Kraft (S. 627). Man muß nur darin für  $p_2$  den komplexen Wert  $p_2 - ip_1'$  einsetzen, ferner für  $\epsilon_2$  den komplexen Wert  $\alpha$ , während  $\frac{\mu_1 \epsilon_1}{c^2}$  gleich  $m^2 + p_1^2$  ist. Daraus erkennt man, daß die Amplituden der reflektierten und gebrochenen elektrischen Kräfte komplexe Größen sind, wenn die der einfallenden Kräfte reell sind.

Um die physikalische Bedeutung hiervon zu erkennen, ist zu berücksichtigen, daß man die wirkliche Bedeutung der Kräfte erhält, wenn man zu ihrer komplexen Form die konjugiert komplexe addiert. Nehmen wir daher an, daß die Amplitude der reflektierten y-Komponente der elektrischen Kraft  $\mathfrak{E}_{yr}$  durch

$$\mathfrak{R}_r = \mathfrak{R}_s \cdot e^{i\Delta_s} \quad (111)$$

dargestellt sei, wobei  $\mathfrak{R}_s$ ,  $\Delta_s$  reelle Größen sind, so ist für  $z = 0$ :

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_{yr} &= \mathfrak{R}_s e^{i\left(\Delta_s + \frac{t - mx}{\tau}\right)} + \mathfrak{R}_s e^{-i\left(\Delta_s + \frac{t - mx}{\tau}\right)} \\ &= 2\mathfrak{R}_s \cos\left(\Delta_s + \frac{t - mx}{\tau}\right), \end{aligned}$$

während die y-Komponente der einfallenden Welle, falls ihre Amplitude  $\mathfrak{E}_s$  reell =  $\mathfrak{G}_s$  ist, den Wert hat

$$\mathfrak{G}_{y_0} = 2\mathfrak{G}_s \cos\left(\frac{t - mx}{\tau}\right).$$

Hieraus erkennt man, daß die reflektierte Welle an der Grenze, d. h. für  $z = 0$ , eine Phasenbeschleunigung  $\Delta$  gegen die einfallende Welle erfahren hat. Bringt man also den Quotienten  $R_s : E_s$  auf die Form  $\rho \cdot e^{i\Delta}$ , wo  $\rho$  und  $\Delta$  reell sind, so bedeutet  $\rho$  das Amplitudenverhältnis der reflektierten Welle zur einfallenden Welle,  $\Delta$  die durch Reflexion herbeigeführte Phasenbeschleunigung.

Die Gleichungen (92) für die reflektierten Komponenten lassen sich dann also in der Form schreiben:

$$\begin{aligned} R_s e^{i\Delta} &= \mathfrak{R}_s = \frac{\mu_2 p_1 - \mu_1 p_2 - i(\mu_1 p_2' - \mu_2 p_1')}{\mu_2 p_1 + \mu_1 p_2 - i(\mu_1 p_2' - \mu_2 p_1')}; \\ R_p e^{i\Delta} &= \mathfrak{R}_p = \frac{\varepsilon_2 p_1 - \varepsilon_1 p_2 - i(\varepsilon_1 p_1' - \varepsilon_2 p_2')}{\varepsilon_2 p_1 + \varepsilon_1 p_2 - i(\varepsilon_1 p_1' - \varepsilon_2 p_2')}, \end{aligned} \quad (112)$$

aus der sich durch Trennung der reellen und imaginären Größen  $\mathfrak{R}_s$ ,  $\Delta_s$ ,  $\mathfrak{R}_p$  und  $\Delta_p$  berechnen lassen.

Es ergibt sich daher auch sofort, daß, falls  $R_p$  die komplexe Amplitude der reflektierten, in der Einfallsebene schwingenden, elektrischen Kraft ist, und falls man den Quotienten  $R_p : R_s$  auf die Form  $\rho \cdot e^{i\Delta}$  bringt, wo  $\rho$  und  $\Delta$  reell sind,  $\rho$  das Amplitudenverhältnis der in der Einfallsebene und der senkrecht zu ihr schwingenden, reflektierten elektrischen Kraft bedeutet,  $\Delta$  die Phasenbeschleunigung der ersteren gegen letztere. Diese beiden Größen, welche der experimentellen Erforschung besonders bequem zugänglich sind, sollen als relatives Amplitudenverhältnis und relative Phasendifferenz der reflektierten elektrischen Kraft kurz bezeichnet werden.

Da die Intensität der Welle proportional mit dem Quadrat ihrer Amplitude ist, so wird sie aus einer komplexen Amplitude, z. B.  $R_s$ , erhalten, indem man sie mit ihrem konjugierten Werte multipliziert. Denn nach (111) ergibt sich dadurch  $\mathfrak{R}_s^2$ .

Ähnliche Betrachtungen gelten für die gebrochene Welle. Aber die Brechung vollzieht sich hier nach komplizierteren Gesetzen. Denn der Sinus des Brechungswinkels  $\chi$  steht zu dem Sinus des Einfallswinkels  $\varphi$  nicht mehr in einem konstanten, vom Einfallswinkel unabhängigen Verhältnis. Wir wollen das Verhältnis der beiden Größen mit  $\nu$  bezeichnen, d. h. es soll

$$\nu = \frac{\sin \varphi}{\sin \chi} \quad (113)$$

sein und wir wollen den Wert von  $\nu$  ableiten, der sich aus unseren Gleichungen ergibt. Wendet man die Formel (110) auf die in das zweite Medium eindringende Welle an, so ist ersichtlich, daß die Richtung der gebrochenen Welle durch  $m$  und  $p_2$  bestimmt ist, während  $p_2'$  in

den Faktor  $e^{-\frac{\mu_2' z}{r}}$  übergeht und die Absorption der Welle bestimmt, und zwar ist

$$\operatorname{ctg} Z = \frac{\mu_2}{m} = \frac{\omega_1 \mu_2}{\sin \varphi}.$$

Also ist

$$\nu^2 = \sin^2 \varphi (1 + \operatorname{ctg}^2 Z) = \sin^2 \varphi + \omega_1^2 \mu_2^2. \quad (114)$$

Nun bestimmt sich  $\mu_2$  aus (107) und (109') folgendermaßen:

$$m^2 + \mu_2^2 = \mu_2'^2 = 2\mu_2 \mu_2' = \frac{\mu_2^2 \epsilon_2}{c^2} + \frac{\mu_2^2 b}{c^2},$$

also

$$m^2 + \mu_2^2 = \mu_2'^2 = \frac{\mu_2^2 \epsilon_2}{c^2},$$

$$2\mu_2 \mu_2' = \frac{\mu_2^2 b}{c^2}.$$

Daraus folgt:

$$\mu_2^2 = \frac{\mu_2 \epsilon_2 - \mu_1 \epsilon_1 \sin^2 \varphi + \sqrt{(\mu_2 \epsilon_2 - \mu_1 \epsilon_1 \sin^2 \varphi)^2 + (\mu_2^2 b)^2}}{2c^2} \quad (115)$$

$$\mu_2'^2 = \frac{\mu_2^2 b^2}{2c^2 (\mu_2 \epsilon_2 - \mu_1 \epsilon_1 \sin^2 \varphi + \sqrt{(\mu_2 \epsilon_2 - \mu_1 \epsilon_1 \sin^2 \varphi)^2 + (\mu_2^2 b)^2})}. \quad (116)$$

In dieser Gleichung wollen wir noch die für das zweite Medium charakteristischen Konstanten  $\mu_2$ ,  $\epsilon_2$  und  $b$  durch die Konstanten  $n$  und  $k$  ersetzen, die wir in Abschnitt 28, Gleichung (105) eingeführt hatten. Dazu verwenden wir die Form, die die Ausdrücke für  $\mu_2$  und  $\mu_2'$  annehmen, wenn  $\varphi = 0$  ist. Dann liegt die einfallende Wellenebene parallel zur Grenzfläche. Alle Punkte der Grenzfläche werden gleichzeitig und in gleicher Stärke von der Welle erregt und sie schreitet in das zweite Medium hinein als eine ebene Welle fort, für die die Wellenebene nicht bloß eine Ebene gleicher Phase, sondern auch gleicher Amplitude ist. Bei schiefem Eintritt einer ebenen Welle in ein absorbierendes Medium ist die letztere Bedingung nicht mehr erfüllt; die Ebene gleicher Phase ist dann nicht mehr eine Ebene gleicher Amplitude. Bei senkrechter Inzidenz aber entspricht die Welle ganz der in Abschnitt 28 behandelten, und wir können dementsprechend in den Gleichungen (105)  $p$  und  $p'$  durch  $\mu_2$  und  $\mu_2'$  für  $\varphi = 0$  ersetzen. Also ist:

$$2n^2 = \mu_2 (\epsilon_2 + \sqrt{\epsilon_2^2 + b^2}), \quad 2nk = \mu_2 b, \quad (117)$$

woraus weiter folgt:

$$\mu_2 \epsilon_2 = n^2 - k^2 \quad \mu_2 \sqrt{\epsilon_2^2 + b^2} = n^2 + k^2. \quad (118)$$

Dies in die obigen Gleichungen eingesetzt ergibt, wenn wir noch den Brechungsexponenten des ersten Mediums mit  $n_0 (= \sqrt{\epsilon_1 \mu_1})$  bezeichnen:

$$p_2^2 = \frac{1}{2c^2} \left( n^2 - k^2 - n_0^2 \sin^2 \varphi + \sqrt{[n^2 - k^2 - n_0^2 \sin^2 \varphi]^2 + 4n^2 k^2} \right) \quad (115')$$

$$p_2'^2 = \frac{4n^2 k^2}{2c^2 \left( n^2 - k^2 - n_0^2 \sin^2 \varphi + \sqrt{[n^2 - k^2 - n_0^2 \sin^2 \varphi]^2 + 4n^2 k^2} \right)} \quad (116')$$

endlich:

$$2v^2 = \frac{n^2}{n_0^2} - \frac{k^2}{n_0^2} + \sin^2 \varphi + \sqrt{\left( \frac{n^2}{n_0^2} - \frac{k^2}{n_0^2} - \sin^2 \varphi \right)^2 + \frac{4n^2 k^2}{n_0^4}}. \quad (114'')$$

Diese Gleichung<sup>1)</sup> zeigt, wie bei einem absorbierenden Medium das Snelliussche Brechungsgesetz im Sinne eines konstanten Verhältnisses der beiden Sinus nicht mehr gültig ist. Für  $k = 0$  geht die Gleichung

in die Form  $v = \frac{n}{n_0}$  der Isolatoren über. Den gleichen Wert nimmt  $v$

auch bei beliebigem  $k$  für  $\varphi = 0$  an. Die Größe  $n$  hat also nur für senkrechte Inzidenz die Bedeutung des Brechungsexponenten im gewöhnlichen Sinne<sup>1)</sup>.

### 30. Senkrechte Inzidenz der einfallenden Wellen.

Wir leiten nach den im vorigen Abschnitt aufgestellten Grundsätzen zunächst die Formeln für die Intensität der reflektierten und der durchgehenden Wellen im Falle der senkrechten Inzidenz ab, für die die Formeln besonders einfach werden.

Nach den Formeln (92), S. 627, wird für  $\varphi = 0$  unter Berücksichtigung von (109) und (109'), wenn die Zeichen  $R_p$ ,  $E_p$ ,  $R_s$ ,  $E_s$  hier die komplexen Werte bedeuten:

$$\begin{aligned} R_p &= E_p \frac{\sqrt{\mu_1 \alpha} - \sqrt{\mu_2 \varepsilon_1}}{\sqrt{\mu_1 \alpha} + \sqrt{\mu_2 \varepsilon_1}}, \\ R_s &= E_s \frac{\sqrt{\mu_2 \varepsilon_1} - \sqrt{\mu_1 \alpha}}{\sqrt{\mu_2 \varepsilon_1} + \sqrt{\mu_1 \alpha}}. \end{aligned} \quad (119)$$

Für  $E_p = E_s$  ist also  $R_p = -R_s$ .

Nach dem oben auf S. 626 näher beschriebenen Sinne, in welchem die  $p$ - und  $s$ -Amplituden positiv gerechnet sind, bedeutet dieses, daß für senkrechte Inzidenz die  $p$ -Amplitude sich geradeso verhält wie die  $s$ -Amplitude, was auch schon aus Symmetrierücksichten notwendig ist.

<sup>1)</sup> Die obigen Ausführungen über diese Gleichung, deren Ableitung sich u. a. bei Kirchhoff, Vorlesungen über Optik, S. 183, findet, wurden aufgenommen, um eine kurze Bemerkung in der ersten Auflage dieses Werkes verständlicher zu machen mit Rücksicht darauf, daß die Frage, wie der Brechungsexponent absorbierender Medien mit dem Einfallswinkel sich ändert, auch in Drudes Optik nicht behandelt ist.

Die komplexe optische Konstante  $a$  des zweiten Mediums läßt sich nun leicht durch  $n$  und  $k$  ausdrücken; denn eine Vergleichung von (107), (117) und (118) liefert:

$$\mu_2 a = n^2 + k^2 - 2nk, \text{ oder } \frac{1}{\mu_2} a = n - ik.$$

Da nun ferner  $\sqrt{\epsilon_1} = n_0$  ist, falls  $n_0$  wie oben den Brechungs-exponenten des durchsichtigen Körpers gegen den freien Äther bedeutet, so erhalten wir, falls wir noch  $\mu_1 = 1$  setzen, wozu wir berechtigt sind, da die Magnetisierungskonstante aller durchsichtigen Körper sich nur unmerklich von 1 unterscheidet, aus (119):

$$R_p = R_p \frac{n - ik}{n + ik} \frac{n_0 + \mu}{n_0 + \mu}.$$

Hierin ist für die Magnetisierungskonstante  $\mu_2$  des Metalls einfach  $\mu$  geschrieben.

Da nun nach S. 641 die Intensität des reflektierten Lichtes dadurch erhalten wird, daß wir diesen Ausdruck für  $R_p$  mit dem konjugiert-komplexen Ausdruck multiplizieren, so ergibt sich für das Verhältnis der Intensität  $J_r$  des reflektierten und der Intensität  $J_e$  des einfallenden Lichtes:

$$\frac{J_r}{J_e} = r = \frac{(n - n_0 \mu)^2 + k^2}{(n + n_0 \mu)^2 + k^2} = \frac{n^2 + k^2 + n_0^2 \mu^2 - 2n n_0 \mu}{n^2 + k^2 + n_0^2 \mu^2 + 2n n_0 \mu}. \quad (120)$$

Dieses Verhältnis  $r$  der Intensitäten für senkrechte Incidenz soll das Reflexionsvermögen des betreffenden Körpers genannt werden. Man kann es in der Form schreiben:

$$r = 1 - \frac{4n n_0 \mu}{n^2 + k^2 + n_0^2 \mu^2 + 2n n_0 \mu}, \quad (121)$$

woraus deutlich wird, daß das Reflexionsvermögen um so höher wird, je größer der Absorptionskoeffizient  $k$  und je kleiner der Brechungs-exponent ist.

Durch die entsprechenden Operationen findet man das Quadrat der Amplitude der eindringenden Welle in der Grenzschicht, d. h. vor Beginn der Absorption zu:

$$d = \frac{4n_0^2 \mu}{n^2 + k^2 + n_0^2 \mu^2 + 2n n_0 \mu}. \quad (122)$$

### 31. Beziehung zwischen Absorption und Leitfähigkeit in Halbleitern.

Nach den Gleichungen (117) und (118) ist unter Berücksichtigung von (107):

$$n^2 - k^2 = \mu \epsilon \quad \text{und} \quad 2nk = 4\pi \mu \sigma \tau,$$

wenn wir den Index 2, der das leitende Medium bezeichnete, hier einfach fortlassen, oder da  $\tau = \frac{T}{2\pi}$ ,  $\sigma = \sigma_m c^2$  ist:

$$n^2 - k^2 = \mu \varepsilon, \quad nk = \mu \sigma_m c^2 T. \quad (123)$$

Man kann diese Gleichungen leicht nach  $n^2$  und  $k^2$  auflösen. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} n^2 &= \mu \left( \frac{1}{2} \varepsilon + \sqrt{\frac{1}{4} \varepsilon^2 + \sigma_m^2 c^4 T^2} \right), \\ k^2 &= \mu \left( -\frac{1}{2} \varepsilon + \sqrt{\frac{1}{4} \varepsilon^2 + \sigma_m^2 c^4 T^2} \right). \end{aligned} \quad (124)$$

Dabei ist  $n$  das Verhältnis der Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $c$  der Wellen im leeren Raum zu derjenigen  $\omega$  in dem leitenden Medium. Denken wir uns ebene elektrische Wellen auf die ebene Grenzfläche senkrecht auffallend, so würden sie mit dieser Geschwindigkeit  $\omega$  in das Medium hineinlaufen. Man kann  $n$  bestimmen als Verhältnis der Wellenlänge im leeren Raum (für den auch angenähert die Luft gesetzt werden kann) und in dem leitenden Medium. Diese Ueberlegungen gelten auch für Drahtwellen. Denn in der Mitte zwischen den Drähten des Lecherschen Systems schwingt die elektrische und magnetische Kraft wie bei einer ebenen Welle. Die Drudesche Methode (S. 619) gestattet also  $n$  auch für leitende Medien zu bestimmen, soweit es möglich ist, innerhalb des leitenden Mediums noch die Knotenlage festzustellen. Nun nimmt die Amplitude der Wellen beim Fortschreiten um die Strecke  $z$  innerhalb des leitenden Mediums ab im Verhältnis:

$$1 : e^{\frac{2\pi k z}{cT}}. \quad (125)$$

Aus der Leitfähigkeit und der Dielektrizitätskonstante läßt sich die Größe dieser Abnahme und ebenso die Veränderlichkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit mit der Schwingungsdauer berechnen. Nehmen wir z. B. Wasser, für welches  $\mu = 1$ ,  $c\sigma_m = 2,4 \cdot 10^{-4}$  (vgl. oben S. 637),  $\varepsilon = 80$  ist.

Für Hertzsehe Schwingungen, deren Wellenlängen zwischen den Grenzen  $cT = 10^3$  cm bis 1 cm eingeschlossen sind, ist  $\frac{1}{4} \varepsilon^2$  groß gegen

$\sigma_m^2 c^4 T^2$ . Denn es ist  $\frac{1}{4} \varepsilon^2 = 1600$ , während  $\sigma_m^2 c^4 T^2$  zwischen  $5,8 \cdot 10^{-2}$  und  $5,8 \cdot 10^{-8}$  liegt. Es ist daher  $n^2$  durch die Leitfähigkeit des Wassers gar nicht beeinflusst, während nach (124)  $k^2$  folgt zu

$$\begin{aligned} k^2 &= -\frac{1}{2} \varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon \sqrt{1 + \frac{4\sigma_m^2 c^4 T^2}{\varepsilon^2}} = -\frac{1}{2} \varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon \left( 1 + \frac{2\sigma_m^2 c^4 T^2}{\varepsilon^2} \right) \\ k &= \frac{\sigma_m c^2 T}{\sqrt{\varepsilon}}. \end{aligned} \quad (126)$$



Die Schwächung der Amplitude der Wellen nach Durchlaufen der Strecke  $z$  ist also nach (125):

$$1 : e^{-\frac{2\pi\sigma_m c}{T} z} = 1 : e^{-1.65 \cdot 10^{-1} z} \quad (127)$$

Die Schwächung ist also von der Schwingungsdauer unabhängig und sehr gering, da sie z. B. für  $z = 10 \text{ m} = 10^3 \text{ cm}$  noch kaum merklich ist.

Auders gestalten sich die Verhältnisse, wenn die Schwingungsdauer  $T$  so groß wird, daß  $\frac{1}{2} \approx$  zu vernachlässigen ist neben  $\sigma_m c^2 T$ . Dann wird nach (124)

$$k = \frac{1}{2} \mu \sigma_m c^2 T, \quad (128)$$

d. h. die Schwächung nach (125)

$$1 : e^{-2\pi \sqrt{\frac{\mu \sigma_m}{T}} z}. \quad (129)$$

Je größer also die Schwingungsdauer wird, desto kleiner wird die Schwächung durch Absorption. Hiernach könnte es scheinen, daß Halbleiter schnelle elektrische Schwingungen eher abschirmen würden als langsame, da letztere durch Absorption weniger vernichtet werden. Und doch sprechen die Versuche gerade dagegen, da Papier, Holz, Wasser usw. schnelle Hertz'sche Schwingungen hindurchlassen, während sie elektrostatische Kräfte vollkommen abschirmen.

Die Erklärung dieser Erscheinung liegt an dem, je nach der Schwingungsperiode verschiedenen Reflexionsvermögen der Körper für elektrische Schwingungen. Nach der Formel (121) (S. 644) ist dasselbe in Luft, d. h. für  $n_0 = 1$ :

$$r = 1 - \frac{4np}{n^2 + k^2 + \mu^2 + 2np},$$

d. h. wenn man die Formeln (124) benutzt und darin  $\frac{1}{2} \approx$  gegen  $\sigma_m c^2 T$  vernachlässigt:

$$r = 1 - \frac{4\mu \sqrt{\mu \sigma_m c^2 T}}{2\mu \sigma_m c^2 T + \mu^2 + 2\mu \sqrt{\mu \sigma_m c^2 T}},$$

oder, falls  $2\sigma_m c^2 T$  auch groß gegen  $\mu$  ist:

$$r = 1 - 2 \sqrt{\frac{\mu}{\sigma_m c^2 T}}. \quad (130)$$

Hieraus erkennt man, daß  $r$  sehr nahezu gleich 1 wird, falls  $T$  sehr groß wird. Also wegen der starken Reflexion, nicht wegen der Absorption müssen Halbleiter lange elektrische Wellen vollständiger abschirmen als kurze.

Für sehr kurze Wellen, d. h. solche, bei denen  $\sigma_m^2 c^4 T^2$  neben

$\frac{1}{4} \epsilon^2$  zu vernachlässigen ist, gilt für das Reflexionsvermögen bei  $n_0 = 1$  die Formel:

$$r = 1 - \frac{4np}{n^2 + p^2 + 2np} = 1 - \frac{4\sqrt{\epsilon} p}{p + \epsilon + 2\sqrt{\epsilon} p}, \quad (131)$$

welche für  $p = 1$  in die optische Formel Fresnels übergeht:

$$r = 1 - \frac{4n}{(n + 1)^2} = 1 - \frac{4\sqrt{\epsilon}}{(\sqrt{\epsilon} + 1)^2}. \quad (131')$$

Nach (131) würde Wasser für elektrische Wellen von der Größenordnung der Hertzschen Wellen ein Reflexionsvermögen von 0,64 haben, während es für optische Wellen nur 0,02 beträgt.

Setzt man dem Wasser Salze zu, so erhöht man seine Leitfähigkeit. Die Dielektrizitätskonstante der Lösung dagegen wird bei mäßigen Konzentrationen von der des reinen Wassers nicht merklich abweichen. Wir wollen berechnen, wie groß die Leitfähigkeit ist, bei der das zweite Glied unter dem Wurzelzeichen der Gleichungen (124) gleich dem zehnten Teil des ersten Gliedes ist für Wellen von 75 cm Wellenlänge, wie sie Drude bei seinen Untersuchungen (s. den nächsten Abschnitt) benutzte, d. h.:

$$\frac{4\sigma_m^2 c^4 T^2}{\epsilon^2} = 0,1.$$

Man erhält daraus

$$\sigma_m = 0,56 \cdot 10^{-11} \quad \text{oder} \quad \sigma' = 0,53 \cdot 10^{-6}.$$

Eine wässrige Lösung, die diese Leitfähigkeit besitzt, würde nach (117) einen Brechungsexponenten für die elektrischen Wellen von 75 cm Länge haben, der um 1,2% größer wäre als der des reinen Wassers, und einen Absorptionskoeffizienten  $k = 1,414$ , dem nach (125) eine Schwächung der Wellen im Verhältnis

$$1 : e^{0,12 \cdot z}$$

entsprechen würde, d. h. für  $z = 10$  cm würde die Amplitude der Wellen auf 0,3 des Anfangswertes gesunken sein. Drude hat seine Messungen bis zur Leitfähigkeit wässriger Lösungen von  $\sigma' = 2,5 \times 10^{-6}$  ausgedehnt. Hier würde die Zunahme des Brechungsexponenten schon 15,3% nach Drudes Rechnungen betragen, und  $k$  würde den Wert 5,6 haben; die Schwächung würde  $1 : e^{0,47 \cdot z}$  betragen; die Amplitude würde in diesem Falle schon für  $z = 1$  cm auf die Hälfte, für  $z = 2$  cm auf ein Drittel gesunken sein.

## 32. Messung der Absorption in Halbleitern.

Die Prüfung der Richtigkeit der im vorigen Abschnitte entwickelten Beziehung zwischen Leitfähigkeit und Absorption verlangt die Messung der letzteren.

Drude hat die beiden von ihm ausgebildeten Verfahren zur Messung der Dielektrizitätskonstanten mittels Drahtwellen (s. Abschnitt 25) auch für die Prüfung der durch die Gleichungen (124) dargestellten Beziehungen und zur Beurteilung der Absorption benutzt. Bei der ersten Methode, die auf der Messung stehender Wellen an einer längeren Drahtleitung beruht (s. S. 619), beeinträchtigt die Absorption die Ausbildung der stehenden Wellen; die Zahl der meßbaren Halbwellen verringert sich mit zunehmender Absorption und gibt ein gewisses Maß für die Größe der Absorption. Doch sind diese Beobachtungen für verschiedene Flüssigkeiten nur dann vergleichbar, wenn auch der Brechungsexponent nahezu übereinstimmt, weil sonst infolge der Verschiedenheit der Reflexion die Energie der in das Medium eintretenden Wellen zu verschieden ist<sup>1)</sup>. Bei der zweiten Drudeschen Methode, die einen Endkondensator von geringer Kapazität benutzt (s. S. 621), wirkt dieser letztere ganz verschieden, je nachdem er mit einer isolierenden oder einer leitenden Substanz gefüllt ist. Denn bei isolierender Substanz liegt am Kondensator ein Bauch des Potentials; bei gut leitender Substanz dagegen wirkt der Kondensator wie eine Brücke und bedingt einen Knoten des Potentials am Ende der Drähte. Diesen beiden extremen Fällen entspricht auch ein maximales Leuchten der Röhre. Geht man von isolierenden durch schlecht leitende zu besser leitenden Flüssigkeiten über, so muß sich einerseits die Einstellung des Apparates mit der Leitfähigkeit in bestimmter Weise ändern, andererseits muß das Leuchten der Röhre allmählich abnehmen bis zu einem Minimum und dann wieder zunehmen. Bei Untersuchung mit wässerigen Lösungen von NaCl und CuSO<sub>4</sub> hat Drude diese Erscheinungen in Uebereinstimmung mit der von ihm für seinen Apparat entwickelten Theorie gefunden. Ein Vergleich der Erscheinungen, die andere Substanzen zeigen, mit denen der untersuchten wässerigen Lösungen, gestattet dann Schlüsse nicht bloß auf die Dielektrizitätskonstante, sondern auch auf den Absorptionskoeffizienten zu ziehen, unter der Voraussetzung, daß sich der letztere für die als Vergleichsflüssigkeiten benutzten wässerigen Lösungen aus den Formeln des vorigen Abschnittes richtig berechnen läßt<sup>2)</sup>.

Die Methoden von Drude sind indirekte Methoden. Die direkte

<sup>1)</sup> P. Drude, Wied. Ann. **60**, S. 44, 1897.

<sup>2)</sup> P. Drude, Wied. Ann. **61**, S. 466, 1897.

Ermittlung des Absorptionskoeffizienten verlangt die Messung der Abnahme, die die Energie der fortschreitenden Wellen nach Durchlaufen gemessener Strecken in dem absorbierenden Medium erfährt. Diese Energiemessung kann an Drahtwellen nach den früher beschriebenen Methoden (s. S. 571) mit Hilfe von Bolometern oder Thermoelementen ausgeführt werden. Es sind dabei zwei Anordnungen möglich. Die Drähte können vertikal durch den Boden eines Zylinders hindurchgeführt werden, der mit der absorbierenden Flüssigkeit in verschiedener Höhe gefüllt wird; die Energiemessung findet hinter dieser absorbierenden Schicht in der Luft statt. Nach dieser Methode haben Yule<sup>1)</sup> und Wildermuth<sup>2)</sup> gearbeitet. Da an den beiden Grenzflächen der Schicht vielfache Reflexionen stattfinden, so entstehen Interferenzen und die Intensität der Wellen hinter der Schicht nimmt mit wachsender Schichtdicke nicht einfach ab, sondern zeigt Maxima und Minima. Die Schwierigkeiten und Fehlerquellen dieser Methode sind eingehend von O. Berg behandelt worden<sup>3)</sup>. Besser ist die zweite Anordnung, bei der man den Zylinder dauernd in solcher Höhe mit der absorbierenden Flüssigkeit füllt, daß die Wellen am Ende dieser Schicht vollkommen absorbiert sind, während die zur Energiemessung dienenden Fläschchen (nach Rubens und Paulzow, s. S. 581) innerhalb der Flüssigkeit auf den Drähten verschoben und so die Energie in verschiedenen Abständen von der Oberfläche der Flüssigkeit gemessen wird. Diese Methode ist zuerst von Zeeman<sup>4)</sup> angewandt worden, dann in Wiederholung und Verbesserung der Zeemanschen Versuche von Eichenwald<sup>5)</sup>, neuerdings von O. v. Baeyer<sup>6)</sup>.

### 33. Normale und anomale Absorption und Dispersion.

Drudes Beobachtungen und die exakten Messungen Eichenwalds an Elektrolyten haben ergeben, daß wässrige Lösungen von Elektrolyten den in Abschnitt 31 aus der Maxwellschen Theorie entwickelten Gesetzmäßigkeiten genügen. Bei ihnen erhält man die richtigen Werte des Absorptionskoeffizienten nach Formel (124), wenn man für  $\sigma$  diejenigen Werte der Leitfähigkeit einsetzt, die der betreffenden Lösung für konstante Ströme zukommen, während als Dielektrizitätskonstante die des

<sup>1)</sup> G. U. Yule, Wied. Ann. **50**, S. 742, 1893.

<sup>2)</sup> K. Wildermuth, Ann. d. Physik (4) **8**, S. 212, 1902.

<sup>3)</sup> O. Berg, Ann. d. Physik (4) **15**, S. 307, 1904.

<sup>4)</sup> P. Zeeman, Kon. Akad. van Wetensch., Amsterdam, Sept. 1896.

<sup>5)</sup> A. Eichenwald, Wied. Ann. **62**, S. 571, 1897.

<sup>6)</sup> O. v. Baeyer, Ann. d. Physik (4) **17**, S. 30, 1905.

reinen Wassers benutzt wird. Dasselbe gilt von der Veränderlichkeit des elektrischen Brechungsexponenten mit der Leitfähigkeit. Auch hier haben die Messungen Drudes die durch die Formel (124, 1) geforderte Zunahme von  $n$  mit wachsendem  $\sigma$  ergeben, wobei es sich als besonders charakteristisch im Sinne der Bestätigung der Theorie ergeben hat, daß die Zunahme von  $n$  nur von der Leitfähigkeit und nicht von der Natur des gelösten Salzes abhängt; denn Lösungen von Kochsalz und von schwefelsaurem Kupfer ergaben gleiche Zunahme, wenn sie gleiche Leitfähigkeit besaßen. Daß die Zunahme hinter den theoretischen Werten etwas zurückbleibt, könnte sich durch eine Abnahme der Dielektrizitätskonstante mit wachsender Konzentration erklären.

Aus Formel (124, 1) folgt, daß  $n$  in Stoffen mit Leitfähigkeit auch von der Dauer der elektrischen Schwingungen abhängt und zwar mit dieser Dauer zunimmt. Die Abhängigkeit des Brechungsexponenten von der Wellenlänge bezeichnet man allgemein als Dispersion. Im Gebiet der elektrischen Schwingungen bezeichnet man nun mit Drude alle Stoffe, die in ihrem Verhalten gegen die elektrischen Wellen den Formeln (124) genügen, als Stoffe von normaler Absorption und normaler Dispersion. Die Erfahrung hat aber gelehrt, daß es zahlreiche Substanzen gibt, die für elektrische Schwingungen schneller Periode eine nicht ihrer Leitfähigkeit entsprechende Absorption und eine weit kleinere Dielektrizitätskonstante als bei langsamen elektrischen Schwingungen besitzen. Ein derartiges Verhalten ist zuerst von Drude<sup>1)</sup> am Glycerin und von Cole<sup>2)</sup> am Äthylalkohol, dann von Drude und anderen an zahlreichen organischen Substanzen nachgewiesen worden. Im Glycerin ist die Absorption für Schwingungen von der Schwingungszahl  $4 \cdot 10^8$  so groß wie in einer wässerigen Salzlösung, deren Leitfähigkeit 6000mal größer ist als die des Glycerins. Die Veränderung des Brechungsexponenten mit der Schwingungszahl  $N$  zeigt die folgende Tabelle:

$N =$	$25 \cdot 10^6$	$n^2$	56,2	nach Thwing <sup>3)</sup> .
	$150 \cdot 10^6$		39,1	nach Drude <sup>1)</sup> .
	$400 \cdot 10^6$		25,4	nach Drude.
	$6700 \cdot 10^6$		16,8	nach Merczyng <sup>4)</sup> .
	$37500 \cdot 10^6$		3,4	} nach Lampu <sup>5)</sup> .
	$50000 \cdot 10^6$		3,1	
	$75000 \cdot 10^6$		2,62	

<sup>1)</sup> P. Drude, Ber. der Sächs. Gesellsch. d. Wiss., math.-phys. Klasse, 6. Mai 1895.  
— Wied. Ann. 58, S. 1, 1896.

<sup>2)</sup> A. D. Cole, Wied. Ann. 57, S. 290, 1896.

<sup>3)</sup> Ch. B. Thwing, Zeitschr. f. phys. Chem. 14, S. 286, 1894.

<sup>4)</sup> Siehe oben S. 634 genannte Arbeit.

<sup>5)</sup> Siehe oben S. 515 genannten Arbeiten.

Ähnlich für Aethylalkohol:

N	$\infty$	$n^2 = 25,9$	nach Nernst <sup>1)</sup> .
	$25 \cdot 10^6$	24,8	nach Thwing.
	$150 \cdot 10^6$	24,4	} nach Drude.
	$400 \cdot 10^6$	23	
	$6\,000 \cdot 10^6$	10,2	nach Cole.
	$37\,500 \cdot 10^6$	6,8	} nach Lampa.
	$50\,000 \cdot 10^6$	5,3	
	$75\,000 \cdot 10^6$	5	

Will man mit diesen Werten diejenigen vergleichen, welche man an denselben Substanzen im Gebiet der sichtbaren Wellen findet, so hat man an das Ende dieser Reihe zu stellen:

$$\text{für } N = 5 \cdot 10^{14}, \quad n^2 = 2,1 \text{ beim Glyzerin,} \\ n^2 = 1,85 \text{ bei Aethylalkohol.}$$

Die allmähliche Abnahme des  $n$  von den hohen Werten für langsame Schwingungen an erscheint also zunächst als ein Uebergang zu den kleinen Werten, die dem Brechungssexponenten für die Lichtwellen zukommen. Aber es ist zu beachten, daß im Gebiet der sichtbaren Wellen der Brechungssexponent dieser Substanzen mit weiterer Zunahme der Schwingungszahl nicht ab- sondern zunimmt. Beim Uebergang aus dem elektrischen in das optische Gebiet vollzieht sich also auch eine Umkehrung des Ganges der Dispersion.

Dieses anomale Verhalten in bezug auf Absorption und Dispersion ist auf der Grundlage der einfachen Maxwell'schen Theorie nicht mehr zu deuten. Diese Tatsachen verlangen eine Erweiterung der Vorstellungen. Man hat sie zunächst im Gebiet der Optik in den modernen Dispersionstheorien gewonnen, die den molekularen Aufbau der Materie und die Annahme mitschwingender Bestandteile innerhalb der Moleküle zur Erklärung der optischen Dispersionsercheinungen heranziehen. Aber für die Anomalien im Gebiet der elektrischen Schwingungen ist eine andere Erklärung möglich, die zuerst von Nernst<sup>2)</sup> angedeutet und von Drude<sup>3)</sup> ausführlicher behandelt worden ist. Sie beruht auf der Vorstellung, daß einem isolierenden Medium kleine Bestandteile, denen eine gewisse Leitfähigkeit zukommt, eingelagert sind.

Drude hat den Nachweis geführt, daß die vorhandenen Anomalien sich mit einer solchen Vorstellung deuten lassen würden. Doch geht es über die Aufgaben dieses Buches hinaus, diese Theorie hier zu entwickeln. Es muß in dieser Hinsicht auf die genannte Drudesche Abhandlung und auf sein Lehrbuch der Optik verwiesen werden.

<sup>1)</sup> W. Nernst, Zeitschr. f. phys. Chem. 14, S. 622, 1894.

<sup>2)</sup> R. Millikau, Wied. Ann. 60, S. 876, 1897.

<sup>3)</sup> P. Drude, Wied. Ann. 64, S. 131, 1898.

### 34. Beziehung zwischen Absorption und Leitfähigkeit in Metallen.

Bei Metallen spielen wegen ihrer großen Leitfähigkeit selbst die schnellsten Hertz'schen Schwingungen insofern noch die Rolle der langsamen Schwingungen bei den vorhin betrachteten Halbleitern, als in (124)  $\frac{1}{4} \varepsilon^2$  neben  $\sigma_m^2 c^4 T^2$  sehr klein ist. In der Tat hat  $\sigma_m^2 c^4 T^2$  selbst für eine Wellenlänge  $cT$  in Luft von 1 cm für das schlecht leitende Quecksilber den Wert  $9 \cdot 10^{10}$  (s. S. 637), und hiergegen ist  $\frac{1}{4} \varepsilon^2$  klein, selbst wenn  $\varepsilon$  von der Größenordnung  $10^4$  ist. Es gelten daher die Formeln (128), (129) und (130) für die Absorption und Reflexion von Hertz'schen Schwingungen bei Metallen. Aus (124) leitet man mit Vernachlässigung von  $\varepsilon$  sofort ab:

$$n = \sqrt{\mu \sigma_m c^2 T} = k, \quad (132)$$

es ist also der Brechungsindex der Metalle für Hertz'sche Schwingungen sehr groß (selbst für Quecksilber bei  $cT = 1$  cm ist  $n = 548$ ), d. h. die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen ist in den Metallen verhältnismäßig klein. Dieselbe wird um so kleiner, d. h.  $n$  um so größer, je langsamer die Schwingungen sind.

Die Absorption der Wellen ist in Metallen verhältnismäßig gering, jedenfalls müßte eine Metallschicht, falls nicht die Reflexion es hinderte, für Hertz'sche Wellen weit durchlässiger sein als für optische<sup>1)</sup>. So wäre z. B. nach (129) für ein Stanniolblatt (Zinn), für welches  $\sigma = 8 \cdot 10^{-5}$  ist, bei Wellen der Länge  $cT = 60$  cm, die Schwächung der Amplitude in der Tiefe  $z$ :

$$1 : e^{2\pi \cdot 200 \cdot z} = 1 : e^{1256 z}.$$

Für  $z = 0,01$  mm müßte daher die Amplitudenschwächung durch Absorption etwa gleich  $\frac{1}{3}$  sein, d. h. ein Stanniolblatt von  $\frac{1}{100}$  mm Dicke müßte noch, falls nur die Absorption in Frage käme, merklich Hertz'sche Schwingungen hindurchlassen. In dieser Dicke ist das Blatt für optische Wellen vollkommen undurchsichtig. Denn für gelbes Licht ist bei Zinn  $k = 5,25$ , daher die Amplitudenschwächung:

$$1 : e^{2\pi \cdot 5,25 \cdot \frac{z}{0,50 \cdot 10^{-4}}} = 1 : e^{66 \cdot 10^4 z},$$

also für  $z = 0,01$  mm

$$= 1 : e^{660}.$$

<sup>1)</sup> Einige Autoren haben das Gegenteil geschlossen, z. B. Maxwell (Elektrizität u. Magnetismus, 2. Bd., S. 554). — W. Wien (Wied. Ann. 35, S. 48, 1888). — Diese Autoren haben aber den Fehler gemacht, daß sie  $n$  ungefähr gleich 1 annehmen.

Daß ein dünn gewalztes Stanniolblatt für Hertz'sche Schwingungen vollkommen undurchlässig ist, liegt also nicht an seiner Absorption, sondern an seinem starken Reflexionsvermögen. In der Tat ergibt die Formel (130) für Zinn bei  $cT = 60$  cm:

$$r = 1 - \frac{1}{6} 10^{-3} = 0,99983.$$

Die Schirmwirkung dünner Metallschichten gegen Hertz'sche Schwingungen liegt also weit mehr an dem starken Reflexionsvermögen, als an dem Absorptionsvermögen der Metalle für diese Schwingungen.

Die Formeln (128), (130) und (132) gelten für den Fall, daß die Dielektrizitätskonstante  $\epsilon$  der Metalle neben  $2\sigma_m c^2 T$  zu vernachlässigen sei. Ist man hierüber aus Unkenntnis der Größenordnung von  $\epsilon$  im Zweifel, so läßt sich zeigen, daß der zuletzt ausgesprochene Satz über das Verhalten der Metalle gegen Hertz'sche Schwingungen a fortiori gelten muß, wenn die Dielektrizitätskonstante nicht zu vernachlässigen ist. Denn da sie positiv sein muß, so muß nach (123)  $n > k$  sein. Es ist also nach (123) der Absorptionskoeffizient  $k$  noch kleiner, als ihn die Formel (128) angibt,  $n$  dagegen noch größer, als die Formel (132) lehrt, daher auch das Reflexionsvermögen  $r$  noch größer, als die Formel (130) angibt.

Es ist interessant, zu bemerken, daß nach (129) die Schwächung ebener elektrischer Wellen in Metallen durch Absorption von demselben Koeffizienten abhängt, wie die Tiefe des Eindringens elektrischer Wellen, welche längs eines Drahtes gleiten, in den letzteren. Diese Tiefe  $f$  haben wir oben S. 613 nach der Formel berechnet

$$\frac{1}{f} = 2\pi \sqrt{\frac{\mu \sigma}{T}},$$

in der  $\sigma$  für  $\sigma_m$  steht (siehe S. 511), und gesehen, daß diese Formel mit Beobachtungen von Bjerknes in guter Uebereinstimmung war. Nach (129) ist die Schwächung ebener Wellen durch Absorption daher zu schreiben:

$$1 : e^{\frac{z}{f}}.$$

Es erscheint von vornherein plausibel, daß, je größer  $f$  im einen Falle ist, um so kleiner die Absorption im anderen Falle sein muß. Eine direkte Anwendung der für ebene Wellen erhaltenen Formeln auch auf die Fortpflanzung von Drahtwellen in den Drähten selbst ist aber deshalb nicht gestattet, weil es sich in beiden Fällen um ganz verschiedene Integrale derselben Grundgleichungen handelt.

Das Leitvermögen der Metalle ist so groß, daß die hier entwickelten Formeln nicht bloß im Gebiet der Hertz'schen Wellen, sondern bis nahe



an das Gebiet der optischen Wellen heran Gültigkeit besitzen. Diese Tatsache ist von Hagen und Rubens<sup>1)</sup> entdeckt worden, als sie das Reflexionsvermögen der Metalle für ultrarote Strahlen untersuchten. Sie fanden, daß dieses Reflexionsvermögen für Wellenlängen, die größer als 0,008 mm sind, sehr einfach asymptotisch zum Grenzwert 1 verläuft und daß sich die Metalle bezüglich ihres Reflexionsvermögens in eine durch ihre Leitfähigkeit bedingte Reihe ordnen. Bezeichnet man das Reflexionsvermögen, in Prozenten ausgedrückt, mit  $R$ , so ist nach diesen Beobachtungen  $(100 - R)$  umgekehrt proportional der Wurzel aus der Leitfähigkeit. Durch diese Entdeckung fand die zuerst von Drude<sup>2)</sup> in der ersten Auflage dieses Werkes aufgestellte Formel (130), die man,  $\mu = 1$  gesetzt, auch schreiben kann:

$$100 - R = \frac{200}{\sqrt{\sigma_m c^2 T}} \quad (133)$$

eine glänzende experimentelle Bestätigung. Hagen und Rubens haben diese Untersuchungen weitergeführt<sup>3)</sup>, indem sie an Stelle des Reflexionsvermögens die Emission der Metalle (bei ca. 170°) für Wellen von der Wellenlänge 0,0255 mm mit derjenigen eines schwarzen Körpers von der gleichen Temperatur verglichen. Diese Größe, in Prozenten ausgedrückt, ist nach dem Kirchhoffschen Gesetze direkt  $\propto (100 - R)$ . Das Produkt dieser Größe mit der Wurzel der Leitfähigkeit hat nach diesen Messungen folgende Werte:

Ag	Cu	Au	Al	Zn	Cd	Pt	Ni	Sn	Fe	Hg	Bi
7,07	6,67	8,10	8,91	7,24	7,29	6,88	7,33	7,32	6,62	7,33	18,2.

Abgesehen vom Wismut gruppieren sich die Zahlen sehr nahe um den Mittelwert 7,33. Aber nicht bloß in bezug auf die Konstanz dieses Produktes, sondern auch in bezug auf den absoluten Betrag der Konstante hat sich die Drudesche Formel bestätigt. Bei der Berechnung der obigen Zahlen ist als Leitfähigkeit der reziproke Wert des in Ohm gemessenen Leitungswiderstandes eines Drahtes von 1 m Länge und 1 mm<sup>2</sup> Querschnitt genommen. Infolgedessen hat das Produkt nach (133) den Wert:

$$\frac{200}{\sqrt{10^{-5} \cdot c^2 T}} = \frac{200}{\sqrt{10^{-5} \cdot 3 \cdot 10^{10} \cdot 0,00255}} = 7,23.$$

Eine weitere Bestätigung der Theorie haben Hagen und Rubens in der Tatsache gefunden, daß sich das Emissionsvermögen der Metalle in diesen Wellenlängengebieten mit der Temperatur so ändert, wie es die Änderung des Widerstandes mit der Temperatur nach der Formel (133) verlangt.

<sup>1)</sup> E. Hagen und H. Rubens, Sitzungsber. der Berliner Akademie 1903, S. 269.

<sup>2)</sup> P. Drude, Verhandl. der D. Phys. Gesellsch., 5, S. 142, 1903.

<sup>3)</sup> E. Hagen und H. Rubens, Sitzungsber. der Berl. Akad. 1903, S. 410.

### 35. Reflexion elektrischer Wellen an Metallen bei schiefer Inzidenz.

Im vorigen Abschnitte wurde gezeigt, daß die Größen  $n$  und  $k$ , Brechungsindex und Absorptionskoeffizient von ebenen, senkrecht einfallenden Wellen, bei Metallen sehr groß sein müssen. Unter diesen Umständen nehmen die Formeln für die Amplituden und die Phasenänderungen der reflektierten Welle sehr einfache Form an. Da nach

(132)  $n = k$  ist, so ist auch  $\frac{n}{c} = \frac{k}{c}$ , und es ist in den Formeln des

Abschnittes 29  $p_2 = p_2' = \frac{n}{c} = \frac{\sqrt{\mu_2 \epsilon_2 T}}{c}$  und nach (117)  $b = \frac{2n^2}{\mu_2}$

zu setzen. Dabei sind die Glieder in den Formeln (115') und (116'), welche die Abhängigkeit von  $p_2$  und  $p_2'$  vom  $\sin \varphi$  ausdrücken, gegenüber den hohen konstanten Werten von  $n$  und  $k$  vernachlässigt. Es soll im folgenden wieder  $\mu_1 = 1$  angenommen und  $\mu$  für  $\mu_2$  geschrieben werden.

Um die reflektierten Amplituden und die Phasenänderungen zu berechnen, haben wir diese Werte in die allgemeinen Gleichungen (112) einzusetzen. Berücksichtigen wir noch die Gleichung (81), nach der

$$p_1 = \frac{n_0 \cos \varphi}{c}$$

ist, so erhalten wir:

$$\mathcal{R}_s e^{i\delta_s} = \mathcal{E}_s \frac{\mu n_0 \cos \varphi - n_0^2 + i n_0}{\mu n_0 \cos \varphi + n_0^2 + i n_0}. \quad (134)$$

Nehmen wir auch hier an, daß  $\mu$  nur wenig von 1 verschieden ist, so verschwindet das erste Glied, dessen Betrag zwischen 0 und  $n_0$  liegt, und der Bruch wird  $= -1$ . Also ist in unserem Falle

$$\mathcal{R}_s = \mathcal{E}_s, \quad \Delta_s = \pm \pi.$$

Für die andere Komponente ergibt sich:

$$\mathcal{R}_p e^{i\delta_p} = \mathcal{E}_p \frac{\epsilon_2 n_0 \cos \varphi - n_0^2 n - i \left( \frac{2n^2}{\mu} n_0 \cos \varphi - n_0^2 n \right)}{\epsilon_2 n_0 \cos \varphi + n_0^2 n - i \left( \frac{2n^2}{\mu} n_0 \cos \varphi + n_0^2 n \right)}$$

oder, wenn man Zähler und Nenner durch  $n_0 n$  dividiert und das Glied

$\frac{\epsilon_2 \cos \varphi}{n}$  als verschwindend fortläßt:

$$\mathcal{R}_p e^{i\delta_p} = \mathcal{E}_p \frac{-n_0 - i \left( \frac{2n}{\mu} \cos \varphi - n_0 \right)}{+n_0 - i \left( \frac{2n}{\mu} \cos \varphi + n_0 \right)}. \quad (135)$$

Hier überwiegt, solange  $\cos \varphi$  endliche Werte hat, das Glied mit  $\frac{2n}{\mu} \cos \varphi$ ; daher ist

$$\mathfrak{R}_p = \mathfrak{E}_p \text{ und } \Delta_p = 0.$$

Aber in der Nähe der streifenden Inzidenz ( $\varphi$  nahe  $90^\circ$ ) muß sich  $\Delta_p$  sehr schnell ändern; denn für  $\varphi = 90^\circ$  ist

$$\mathfrak{R}_p = -\mathfrak{E}_p \text{ also } \Delta_p = \pm \pi.$$

Die genauere Gleichung für  $\Delta_p$  folgt aus (135) in der Form:

$$\operatorname{tg} \Delta_p = \frac{2n n_0 \mu \cos \varphi}{2n^2 \cos^2 \varphi - n_0^2 \mu^2} \quad (136)$$

Daraus sieht man, daß  $\Delta_p$  für endliche Werte von  $\cos \varphi$  sehr kleine, negative Werte hat, daß es gleich  $-\frac{\pi}{2}$  wird für

$$\cos \varphi = \frac{n_0 \mu}{n} \quad (137)$$

und von hier bis zur streifenden Inzidenz ansteigt bis  $\pi$ . Da  $\Delta_s$  für alle Werte von  $\varphi$  sehr nahe  $= \pi$  ist, so hat auch die relative Phasendifferenz  $\Delta = \Delta_p - \Delta_s$  für den durch (137) gegebenen Wert von  $\varphi$  den Betrag von  $\frac{\pi}{2}$ . Man nennt den Winkel, für den  $\Delta = \frac{\pi}{2}$  ist, den Haupteinfallswinkel.

Nehmen wir, wie oben, für Quecksilber und für Hertz'sche Wellen von der Länge von 1 cm  $n = 548$  an, ferner  $n_0$  und  $\mu = 1$ , so würde sich für  $\varphi$  aus (137) der Wert  $89^\circ, 55,6$  ergeben, also ein Winkel, der nur um  $4,4$  von der streifenden Inzidenz abweicht. Bei der Reflexion an Metallen werden also Hertz'sche Wellen bis nahe zur streifenden Inzidenz keine Phasendifferenz ihrer Komponenten gegeneinander aufweisen, und das Verhältnis der Amplituden ihrer Komponenten wird bis nahe zur streifenden Inzidenz gleich dem Verhältnis der Komponenten des einfallenden Lichtes sein.

Righi<sup>1)</sup> hat Versuche beschrieben, aus denen er auf das Vorhandensein von Phasendifferenzen bei der Reflexion der Wellen an Metallen schloß. Aber Lindman<sup>2)</sup> hat die Versuche wiederholt und durchaus gefunden, daß die geradlinig polarisierte Welle eines Hertz'schen Erregers an einem Metallblech, ohne merklich an Intensität zu verlieren, als geradlinig polarisiert reflektiert wird, und daß das Schwingungssazimut der reflektierten Welle gegen die Einfallsebene mit dem der einfallenden übereinstimmt. Das gleiche muß auch noch gelten für diejenigen ultraroten Schwingungen, für die die Formel (133) des vorigen Abschnittes gültig ist.

<sup>1)</sup> A. Righi, Die Optik der elektrischen Schwingungen, S. 150, 1898.

<sup>2)</sup> K. F. Lindman, Ann. d. Physik (4) 4, S. 617, 1901.

Für die kürzeren Wellenlängen des sichtbaren Spektrums aber zeigen die Metalle relative Phasendifferenzen und verschiedene Schwächung der beiden Komponenten bei der Reflexion. Wie sich die Formeln für diese Erscheinungen aus dem obigen allgemeinen Ansatz gewinnen lassen, soll hier nicht weiter ausgeführt werden. Es kann in dieser Beziehung auf Drudes Lehrbuch der Optik verwiesen werden.

Ist  $\mathfrak{E}_p = \mathfrak{E}_s$ , so folgt aus den obigen Ableitungen  $\mathfrak{R}_p = -\mathfrak{R}_s$ . Es gilt hier aber dieselbe Betrachtung, wie sie in Abschnitt 30 angestellt ist. Vergleicht man bei senkrechtem Einfall nach der auf S. 626 getroffenen Festsetzung über den positiven Sinn der Schwingung in der Einfallsebene, die einfallende mit der reflektierten p-Schwingung, so sieht man, daß beide in der Grenzfläche einander entgegengesetzt gerichtet sind, geradeso wie die s-Schwingungen. Rechnet man also die  $\mathfrak{R}_s$  und  $\mathfrak{R}_p$  als absolute Größen, so ist es richtiger,  $\Delta_s$  und  $\Delta_p$  beide gleich  $\pm \pi$  zu setzen. Daraus folgt, daß in den stehenden Wellen, welche sich vor der Metallwand durch Interferenz der einfallenden mit den reflektierten Wellen bilden, ein Knoten der elektrischen Kräfte in der Oberfläche des Metalls liegt. Dies wird durch die Versuche von Sarasin und de la Rive bestätigt (vgl. oben S. 558).

### 36. Reflexion ebener elektrischer Wellen an einer sehr dünnen Metallschicht.

Nach den soeben vorangegangenen Berechnungen kann durch das experimentelle Studium der Reflexion ebener elektrischer Wellen an ebenen Metallschirmen keinerlei Schluß auf die Konstanten des Metalls gezogen werden, als höchstens der, daß seine Leitfähigkeit sehr groß sein muß. Da es aber so verlockend ist, nach Methoden zu suchen, durch die eventuell die Dielektrizitätskonstante der Metalle ermittelt werden könnte, so wollen wir den Gegenstand nicht verlassen, ohne den eventuellen Erfolg nach einer anderen, abgeänderten Versuchsanordnung besprochen zu haben.

Da nämlich, wie wir vorhin sahen, die Absorption elektrischer Wellen in Metallen mäßig groß ist, so kann man daran denken, das starke Reflexionsvermögen der Metalle, welches für den vorliegenden Zweck der Untersuchung ihrer elektrischen Konstanten sehr störend ist, dadurch zu vermindern, daß man dem Metall eine bestimmte Dicke gibt. Es zeigt ja schon die Erscheinung der Newtonschen Ringe in der Optik, daß das Reflexionsvermögen einer dünnen Schicht von seiner Dicke abhängt, und es ist von vornherein klar, daß das Reflexionsvermögen eines Metallschirmes mit abnehmender Dicke desselben schließ-

lich abnehmen muß, da für die Dicke Null auch die Reflexion verschwindet.

Wir wollen daher jetzt das Problem der Reflexion und Brechung ebener elektrischer Wellen an einer Metallschicht der Dicke  $d$  behandeln. Die erste Grenzfläche derselben soll in die  $xy$ -Ebene fallen, die  $z$ -Achse in das Metall von da hineingerichtet sein. Die Wellen sollen senkrecht einfallen. Es ist daher für irgendeine, der  $xy$ -Ebene parallele Komponente der elektrischen Kraft, z. B. die  $y$ -komponente, in der einfallenden Welle zu setzen:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_y &= E_0 e^{i(kx - pt)} \\ \text{in der reflektierten:} \quad \mathcal{E}_y &= R e^{i(kx - pt)} \end{aligned} \quad (138)$$

Dabei bedeutet  $p$  die reziproke Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen in dem Medium, in welchem die Wellen einfallen. Wir wollen annehmen, es sei die Metallplatte beiderseits von Luft (oder, was keinen merklichen Unterschied macht, vom leeren Raum) begrenzt. Es ist dann

$$p = \frac{1}{c}. \quad (139)$$

Im Metall müssen wir ebenfalls sowohl eine einfallende, d. h. nach der positiven  $z$ -Richtung sich fortpflanzende, als eine reflektierte, nach der negativen  $z$ -Richtung sich fortpflanzende Bewegung annehmen, da nicht nur für  $z = 0$ , sondern auch für  $z = d$  eine Grenzfläche vorhanden ist, d. h. da auch dort Reflexionen eintreten.

Im Metall ist also zu setzen:

$$\mathcal{E}_y = D_0 e^{\frac{i}{\tau}(t - p'z)}, \quad \mathcal{E}_y' = D_0 e^{\frac{i}{\tau}(t + p'z)}. \quad (140)$$

Dabei ist  $p'$  komplex, und zwar ist

$$p' = \frac{n + ik}{c}, \quad (141)$$

wobei für  $n$  und  $k$  die Formeln (123) der S. 645 gelten.

In der Luft hinter der Metallschicht kann nur eine nach der positiven  $z$ -Richtung sich fortpflanzende Welle vorhanden sein, es ist also hier zu setzen:

$$\mathcal{E}_y'' = D e^{\frac{i}{\tau}(t - pz)}. \quad (142)$$

Nun sind für  $z = 0$  und  $z = d$  die Grenzbedingungen zu erfüllen, daß die elektrische Kraft und die magnetische Kraft, welche beide senkrecht zur  $z$ -Achse sind, stetig sind beim Uebergang aus der Luft in das Metall.

Die erste dieser Grenzbedingungen lautet daher:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_{y0} &| \mathfrak{E}_{yr} = \mathfrak{E}_{y0}' | \mathfrak{E}_{yr}' \text{ für } z = 0, \\ \mathfrak{E}_{y0}' &| \mathfrak{E}_{yr}' = \mathfrak{E}_{y0}'' \text{ für } z = d. \end{aligned} \quad (143)$$

Die Grundgleichungen  $\mu \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial y}$  usw. ergeben nun, daß nur die x-Komponente  $\mathfrak{H}_x$  der magnetischen Kraft existiert, falls von der elektrischen Kraft die y-Komponente  $\mathfrak{E}_y$  allein vorhanden ist, und daß  $\mathfrak{H}_x$  proportional zu  $\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial z}$  ist. Der Proportionalitätsfaktor ist für Luft und Metall der gleiche ( $1 + \tau$ ), falls die Magnetisierungskonstante des letzteren gleich 1 ist. Dieses wollen wir annehmen, schließen also die stark magnetischen Metalle von der Betrachtung aus<sup>1)</sup>. Die Stetigkeit von  $\mathfrak{H}_x$  erfordert dann die Stetigkeit von  $\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial z}$ , d. h. ergibt die Grenzbedingungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{E}_{y0}}{\partial z} &| \frac{\partial \mathfrak{E}_{yr}}{\partial z} = \frac{\partial \mathfrak{E}_{y0}'}{\partial z} | \frac{\partial \mathfrak{E}_{yr}'}{\partial z} \text{ für } z = 0, \\ \frac{\partial \mathfrak{E}_{y0}'}{\partial z} &| \frac{\partial \mathfrak{E}_{yr}'}{\partial z} = \frac{\partial \mathfrak{E}_{y0}''}{\partial z} \text{ für } z = d. \end{aligned} \quad (144)$$

Setzt man in (143) und (144) die Werte von (138), (140), (142) ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} E + R &= D_0 + D_r, \\ D_0 e^{-\frac{t}{\tau} p' d} + D_r e^{-\frac{t}{\tau} p' d} &= D_0 e^{-\frac{t}{\tau} p d}, \\ p(E - R) &= p'(D_0 - D_r), \\ p' \left( D_0 e^{-\frac{t}{\tau} p' d} - D_r e^{-\frac{t}{\tau} p' d} \right) &= p D_0 e^{-\frac{t}{\tau} p d}. \end{aligned} \quad (145)$$

Aus diesen vier Gleichungen kann man jede der vier Unbekannten  $R$ ,  $D_0$ ,  $D_r$ ,  $D$  durch  $E$  ausdrücken. Durch Multiplikation der ersten Gleichung mit  $p'$  und Addition bzw. Subtraktion von der dritten ergibt sich:

$$\begin{aligned} p'(E + R) + p(E - R) &= 2p'D_0, \\ p'(E + R) - p(E - R) &= 2p'D_r. \end{aligned} \quad (146)$$

Durch Multiplikation der zweiten der Gleichungen (145) mit  $p'$  und Addition bzw. Subtraktion von der vierten folgt:

<sup>1)</sup> Für diese würden die Resultate ganz ähnlich ausfallen, wie sie hier für nicht-magnetische Metalle abgeleitet sind.

$$\begin{aligned} 2p'D_0 e^{-\frac{i}{\tau} p'd} &= (p' + p) D e^{-\frac{i}{\tau} p'd}, \\ 2p'D_1 e^{+\frac{i}{\tau} p'd} &= (p' - p) D e^{-\frac{i}{\tau} p'd}. \end{aligned} \quad (147)$$

Aus den Gleichungen (146) und (147) kann man nun sehr leicht  $D_0$  und  $D_1$  eliminieren und erhält:

$$\begin{aligned} E(p' + p) + R(p' - p) &= D(p' + p) e^{-\frac{i}{\tau} p'd} \cdot e^{+\frac{i}{\tau} p'd}, \\ E(p' - p) + R(p' + p) &= D(p' - p) e^{-\frac{i}{\tau} p'd} \cdot e^{-\frac{i}{\tau} p'd}. \end{aligned} \quad (148)$$

Aus diesen beiden Gleichungen kann man nun leicht entweder  $R$  oder  $D$  eliminieren. Ersteres liefert:

$$\begin{aligned} &E\{(p' + p)^2 - (p' - p)^2\} \\ &= D \cdot e^{-\frac{i}{\tau} p'd} \left\{ (p' + p)^2 e^{+\frac{i}{\tau} p'd} - (p' - p)^2 e^{-\frac{i}{\tau} p'd} \right\}, \end{aligned} \quad (149)$$

während die Elimination von  $D$  ergibt:

$$\begin{aligned} &E(p'^2 - p^2) \left( e^{-\frac{i}{\tau} p'd} - e^{+\frac{i}{\tau} p'd} \right) \\ &= -R \left\{ (p' - p)^2 e^{-\frac{i}{\tau} p'd} - (p' + p)^2 e^{+\frac{i}{\tau} p'd} \right\}. \end{aligned} \quad (150)$$

Wegen der starken Absorption, d. h. des imaginären Bestandteiles von  $p'$ , kann die Metallschicht merkliche Verschiedenheiten hinsichtlich der reflektierten oder durchgelassenen Amplitude  $R$  und  $D$  gegenüber einer unendlich dicken Metallschicht nur zeigen, wenn ihre Dicke  $d$  sehr klein ist. Wir wollen annehmen, sie sei so gering, daß mit genügender Annäherung zu setzen sei:

$$e^{\pm \frac{i}{\tau} p'd} = 1 \pm \frac{i}{\tau} p'd. \quad (151)$$

Für ein Stanniolblatt von  $\frac{1}{1000}$  mm Dicke würde diese Annäherung für Hertzsche Schwingungen, deren Wellenlänge in Luft 60 cm beträgt, schon genügen. Denn nach der oben auf S. 652 angestellten Rechnung ist für diesen Fall der imaginäre Bestandteil von  $\frac{p'}{\tau}$  (welcher auch nahezu gleich seinem reellen Bestandteil ist) gleich 1256, so daß für  $d = 10^{-4}$  cm  $\frac{p'd}{\tau} = 0,1256$  wird. Das Quadrat dieser Größe kann man aber näherungsweise gegen 1 vernachlässigen.

Unter Annahme der Formel (151) wird (149) und (150) zu:

$$E \cdot 2p'p = D e^{-\frac{1}{\tau} p d} \left\{ 2p'p + \frac{1}{\tau} p'd \cdot (p'^2 + p^2) \right\} \quad (152)$$

$$E \frac{1}{\tau} p'd(p'^2 - p^2) = R \left\{ 2p'p + \frac{1}{\tau} p'd(p'^2 + p^2) \right\}.$$

In diesen Gleichungen kann man nun den Faktor  $p'$  fortheben. Setzt man für  $p'^2$  den aus (141) und (123) für  $p = 1$  folgenden Wert ein:

$$p'^2 = \frac{\varepsilon - 1 + \pi \sigma_m c^2 \tau}{c^2},$$

ferner für  $p$  den Wert  $\frac{1}{c}$  nach (139), so folgt:

$$E = D e^{-\frac{1}{\tau} p d} \left\{ 1 + 2\pi d \sigma_m c + \frac{1}{\tau} (\varepsilon - 1) \frac{d}{\lambda} \right\}, \quad (153)$$

$$E \left\{ 2\pi d \sigma_m c + \frac{1}{\tau} (\varepsilon - 1) \frac{d}{\lambda} \right\} = R \left\{ 1 + 2\pi d \sigma_m c + \frac{1}{\tau} (\varepsilon - 1) \frac{d}{\lambda} \right\}.$$

Aus diesen Formeln kann man leicht nach den oben auf S. 641 gegebenen Regeln die Phasendifferenzen der reflektierten und durchgehenden Wellen gegen die einfallenden, sowie das Verhältnis ihrer Intensitäten bilden. Aber zu unserem Ziele, nämlich zu einer experimentellen Bestimmung der Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon$  des Metalls, gelangen wir dadurch auf keine Weise, wie dünn wir auch den Metallschirm wählen. Seine Dicke  $d$  tritt nämlich in den letzten Formeln mit dem Faktor auf:

$$\pi \left( 2c\sigma_m + \frac{\varepsilon - 1}{\lambda} \right).$$

Solange nun der reelle Teil dieses Faktors sehr über den imaginären Teil überwiegt, d. h. solange  $2c\sigma_m\lambda$  groß gegen  $\varepsilon$  ist, so lange ist auch ein merkbarer Einfluß von  $\varepsilon$  auf die Erscheinungen nicht vorhanden. Es deckt sich diese Bedingung mit der schon in Abschnitt 28 dieses Kapitels auf S. 638 aufgestellten, nach welcher das Größenverhältnis der Leitungs- und der Verschiebungsströme in einem Körper als abhängig bestimmt wurde von dem Verhältnis der Werte  $2c\sigma_m\lambda$  und  $\varepsilon$ . Wie wir dort sahen, ist dieses Verhältnis für die schnellsten Hertz'schen Schwingungen immer noch größer als 7000 : 1. Falls man also nicht daran denken kann, die Phasen- oder Intensitätsänderung durch Reflexion und Brechung genauer als bis auf den 7000sten Teil des eigenen Wertes zu bestimmen, kann man auch nicht daran denken, aus diesen Versuchen die Dielektrizitätskonstante zu ermitteln. Diese Versuche könnten nur als eine — und zwar sehr umständliche — Methode zur Bestimmung der galvanischen Leitfähigkeit dienen. Man wird vielleicht zu dieser Methode — trotz ihrer Umständlichkeit — zweckmäßig greifen, wenn es sich um



die Ermittlung einer etwaigen Abhängigkeit der galvanischen Leitfähigkeit der Metalle von der Schnelligkeit der Stromwechsel handelt.

Die vorstehende Prophezeiung Drudes aus der ersten Auflage dieses Werkes ist durch die Versuche von Hagen und Rubens in anderer und viel einfacherer Weise in Erfüllung gegangen. Denn auf Grund der Formel (133) bildet die Messung des Reflexionsvermögens oder des Emissionsvermögens der Metalle in der Tat ein Verfahren zur Bestimmung ihrer Leitfähigkeit.

Die Weiterführung der Betrachtungen dieses letzten Kapitels auf das Gebiet der kurzen Wellenlängen braucht in diesem Buche nicht mehr behandelt zu werden. Auch die ponderomotorischen Wirkungen der Strahlung, die allerdings von Maxwell aus seiner Theorie heraus zuerst erschlossen worden sind, finden ihre praktische Bedeutung doch erst im Gebiet der Wärme- und Lichtstrahlen. Für alle diese Fragen kann hier auf die eingehende Darstellung verwiesen werden, die Drude selbst ihnen in seinem zweiten großen Lehrbuche, dem Lehrbuch der Optik (zweite Auflage, Leipzig, S. Hirzel, 1906) hat zu teil werden lassen.

# Namenregister.

## A.

Abraham 116, 353, 554.  
 Abraham-Föppl 139, 465.  
 Ampère 1, 233, 259, 263, 264, 286, 325,  
 328, 406.  
 Armagnat 471.  
 Arné 133.  
 Arons 121, 122, 123, 286, 614, 616.  
 d'Arsonval 286.

## B.

Baeyer 649.  
 Battelli 444, 445, 452.  
 Becker 617.  
 Becquerel, C. 196.  
 Berg 649.  
 v. Bezold 446.  
 Bidwell 211, 212.  
 Bjerknes 465, 466, 564, 607, 609, 610, 611,  
 612, 653.  
 Biot 1, 254, 255, 286, 540.  
 Birkeland 611.  
 Blondlot 606, 621.  
 du Bois 192, 263.  
 Boltzmann 117, 118, 122, 123, 128, 305,  
 307, 570, 576.  
 Bouty 122.  
 Boys 608.  
 Brandes 571.  
 Brannly 570.  
 Braun 480, 577.  
 Brewster 628.  
 Brillouin 552.  
 Briscoe 608.  
 Brugmans 161.  
 Bunsen 362.

## C.

Cavendish 47.  
 Cermak 576, 577, 611.  
 Classen 530.  
 Cochin 79.  
 Cohen 338.  
 Cohn 116, 121, 122, 123, 393, 590, 592,  
 593, 596, 597, 617, 620.  
 Cole 634, 650, 651.  
 Colley 471.  
 Corbino 134.  
 Coulomb 1, 13, 34, 40, 45, 47 ff., 146, 162,  
 304.

## D.

Daniell 362, 431.  
 Debye 524.  
 Décombe 604.  
 Deprez 286.  
 Dirichlet 92.  
 Danle 120.  
 Dorn 158.  
 Drude 1, 2, 3, 66, 162, 195, 204, 214, 381,  
 413, 414, 465, 466, 472, 475, 476, 479,  
 530, 533, 534, 570, 574, 591, 597, 602,  
 617, 619, 622, 628, 643, 645, 647, 651,  
 654, 657, 662.  
 Duane 594.  
 Duter (im Text irrtümlich Decker) 124.

## E.

Eaton 196.  
 Eckstein 234.  
 Eichenwald 416, 417, 649.  
 Einthoven 286.  
 Ellinger 633.  
 v. Ettingshausen 196.  
 Ewing 263.

## F.

Faraday 1, 2, 8, 62, 71, 108, 161, 163,  
 194, 287, 366.  
 Feldersen 444, 452, 484, 486, 493, 494,  
 495, 496, 497, 505, 506, 525.  
 Fischer, C. 15.  
 Fixzen 441, 466.  
 Fleischmann 289.  
 Fleming 286, 324, 542.  
 Fomm 124.  
 Föppl 116.  
 Foucault 325, 441, 519.  
 Fourier 503.  
 Franke 607.  
 Fresnel 574, 576, 630.

## G.

Galitzin 475.  
 Gauss, R. 53, 125, 128, 139, 209, 215.  
 Garlasco 564.  
 Gaup 32, 35, 147, 150, 158.  
 Gehar 210.  
 v. Geitler 475, 513, 607.  
 Gräetz 121, 124, 130, 133, 134.

Green 39.  
Gaulich 564.  
Gntton 594, 595.

## H.

Hack 553, 554.  
Hagen 654, 662.  
Hagenbach 290, 516.  
Hallock 158.  
Hallwachs 80.  
Hammer 559, 605.  
Hattendorf 390.  
Heaviside 35, 65, 421.  
Heerwagen 123, 590, 592, 593, 596, 597.  
v. Helmholtz 160, 215, 444, 467, 470.  
Hennig 192.  
Henrich 426.  
Henrichsen 196.  
Henry 328.  
Hertz 1, 324, 421, 442, 493, 517, 520 ff.,  
530, 534, 544, 557, 564, 565, 566, 579,  
588, 589, 607, 608, 614, 632.  
Heschus 79.  
Heß 470.  
Heydweiller 133, 362.  
Himstedt 363.  
Holborn 263.  
Honda 215.  
Hopkinson 122, 322.  
Huygens 4, 573, 574.

## I, J.

Jacques 196.  
Jamin 577.  
Jäger, G. 192, 194.  
Jäger, W. 564.  
v. Ignatowsky 114.  
Jones 279.  
Joubert 120, 362, 363, 371.  
Joule 83, 212, 325, 356, 375, 383.

## K.

Kalähne 617.  
Kelvin (Lord) siehe Sir William Thomson.  
Kempken 209.  
Kiebitz 577.  
Kießling 616.  
Kirchhoff 53, 54, 92, 130, 215, 236, 371,  
373, 374, 375, 402, 403, 448, 452, 500,  
509, 606, 643.  
Klemencic 445, 512, 567, 571, 576, 577,  
607, 611, 612, 613, 634.  
Knopp 571.  
Koch, E. 418.  
Kohlrausch, F. 140, 157, 160, 208, 257,  
362, 363.  
Koláček 215.  
König 34, 289, 446, 470, 569.  
Königsberger 125, 192, 194.  
Koepsel 160.  
Korteweg 215.

## L.

Lamb 569.  
Lampa 134, 375, 633, 650, 651.  
v. Lang 134, 617.  
Laplace 38.  
Lebedew 571, 575.  
Leecher 580, 581, 588, 590, 593, 620.  
Lee 550.  
Lenz 320, 324.  
Lindeck 263.  
Lindmann 559, 656.  
Lodge 121.  
Lohmann 234.  
Lorberg 215.  
Lorenz 444, 452.  
Love 552.

## M.

Mack 574.  
Mac Lean 560.  
Mugri 444, 445, 452.  
Marconi 479.  
Mascart 120, 362, 363, 371.  
Maxwell 1, 54, 92, 108, 109, 110, 111, 121,  
145, 162, 230, 232, 257, 259, 324, 328,  
330, 332, 333, 345, 362, 363, 393, 406,  
407, 414, 416, 417, 419, 425, 435, 652.  
Merczyng 634, 650.  
Meyer, P. 194.  
Meyer, St. 192, 194, 196.  
Mie 15, 590.  
Millikan 651.  
Mizuno 471.  
Mouton 445.  
v. d. Mühl 257.

## N.

Neef 519.  
Nernst 124, 122, 123, 651.  
Neumann 1, 257, 300, 485, 630.  
Newton 575, 576, 657.  
Nowick 122, 123.

## O.

Oberbeck 382, 471, 475.  
v. Oettingen 161, 443.  
Ohm 111, 356 ff., 376, 377, 516.  
Olshansen 289, 290.

## P.

Paulzow 443, 571, 581, 607, 649.  
Palaz 120.  
Pearson 550.  
Pérot 73, 123, 611, 621, 633.  
Picciati 394.  
Planck 545, 546.  
Plücker 189, 196.  
Pockels 130, 215.  
Poincaré 564.  
Poisson 38, 161.  
Poynting 426 ff., 437, 439, 454, 542.  
Pupin 286.

Q.

Quincke 107, 108, 123, 124, 130, 133, 189,  
192, 193, 573, 617.

R.

Ratz 128.  
Rayleigh, Lord 199, 393, 470, 471.  
v. Rees 157.  
Richardz 447.  
Riecke 157.  
Riemann 390.  
Righi 571, 574, 577, 634, 656.  
Ritter 568.  
Rive, de la 283, 530, 558, 561, 563, 564,  
572, 604, 657.  
Romich 122, 123.  
Röntgen 416, 417.  
Rosa 118, 123, 338.  
Rowland 196, 363, 416.  
Rubens 404, 568, 571, 581, 582, 592, 607,  
614, 616, 649, 654, 662.  
Ruhmkorff 321, 466, 518.  
Rnoß 157.

S.

Sacerdote 130.  
Salvioni 592, 608.  
Sarnsin 530, 558, 561, 563, 564, 572, 604,  
657.  
Savart 1, 254, 255, 286, 540.  
Savary 442.  
Schüller 445, 456, 470, 616.  
Schmidt, H. W. 622.  
Schmargister 196.  
v. Schweidler 133.  
Seckelson 194.  
Seddig, M. 15.  
Seiler 445, 453.  
Siemens 120, 134, 361, 440, 580.  
Silow 123.  
Smule 123.  
Snellius 74, 625, 632.  
Sommerfeld 394, 590.  
Stefan 385, 391, 393, 487.  
Stokes 20.  
Strindberg 604.  
Sundell 456.

T.

Tallqvist 445, 453, 456.  
Terada 215.

Tesla 476.  
Thompson, S. P. 418.  
Thomson, Elhu 397.  
Thomson, J. J. 132, 215, 216, 569, 590,  
608, 621.  
Thomson, W. (Sir) 54, 57, 98, 100, 162,  
216, 442, 448, 453, 516.  
Thwing 650, 651.  
Tomaszewski 123.  
Töpler 192, 572.  
Trouton 633.  
Trowbridge 594.

V.

Valentiner 290.  
Villari 212.  
Voege 571.  
Volta 352.

W.

Wachsmuth 121.  
Waitz 57, 616, 617.  
Waller 467, 471.  
Wangerin 150.  
Warburg 206.  
Wassmuth 216.  
Watson 608.  
Weber, M. 191.  
Weber, R. H. 617.  
Weber, W. 264, 325, 363.  
Webster 445.  
Whentstone 121, 403, 581.  
Whitehead 418.  
Wiedeburg 577.  
Wiedemann, G. 120, 130, 150, 196, 362,  
363.  
Wien, M. 124, 130, 382, 394, 404, 475,  
478, 480.  
Wien, W. 652.  
Wiener, O. 575.  
Wildermuth 649.  
Winkelmann 120, 121, 128.  
Witte 110.  
Wolf, M. 128.  
Wöllner 124, 130.

Y.

Yule 649.

Z.

Zamboni 570.  
Zeeman 649.  
Zehnder 570, 576.  
Zenneck 460, 465, 467, 483, 549, 571.  
Ziegler 447.

# Sachregister.

## A.

Absorption der elektrischen Wellen 635.  
 — Beziehung zur Leitfähigkeit 645.  
 — in Halbleitern 648.  
 — in Metallen 652.  
 — normale und anomale 650.  
 Absorptionskoeffizient 509, 637.  
 Abstoßungserscheinungen bei Wechselströmen 397.  
 Achse, magnetische 143, 154.  
 Äquipotentialflächen 18.  
 Äquivalente Pole 157.  
 Äther 4.  
 Aktive Funken 530.  
 Ampere 224, 355, 368.  
 Ampèresche Regel 233.  
 Ampèresches Elementargesetz 302.  
 Amplitudenverhältnis, relatives, bei der Reflexion 631, 641.  
 Aufpunkt 60.  
 Auftriebmethode zur Messung von  $\mu$  194.

## B.

Ballistische Methode zur Messung von  $\mu$  321.  
 Barretter 571.  
 Bäuche 507, 557.  
 Berührungselektrizität 78, 79.  
 Beugung elektrischer Wellen 568, 574.  
 Biot-Savartsches Gesetz 254, 280, 540.  
 Bolometer 571, 582.  
 Brechung der elektrischen Kraftlinien 71 ff., 124.  
 — der magnetischen Kraftlinien 168.  
 — der Stromlinien 371.  
 — der elektromagnetischen Wellen 568, 573, 575, 623.  
 Brechungsexponent der elektromagnetischen Wellen 435, 568, 573, 575.  
 Brechungsgesetz von Snellius 628, 643.  
 Brewstersches Gesetz 628.  
 Brücke im Lecherschen Drahtsystem 597 ff.  
 Brücke, Wheatstonesche 403.  
 — mit Wechselstrom 404.

## C.

Coulomb 355, 364, 368.  
 Coulombsches Gesetz 1, 34, 40, 46, 47 ff., 146, 162.  
 Curl eines Vektors 25.

## D.

Dämpfung eines Thomsonschen Kreises 453.  
 — zweier gekoppelter Kreise 475.  
 — einer fortschreitenden Drahtwelle 509, 513.  
 — durch Ausstrahlung 545.  
 — elektrischer Wellen 609.  
 — konservative, konsumtive 545.  
 — von Galvanometern durch Wirbelströme 325.  
 Dämpfungskonstante 453.  
 Dämpfungsverhältnis 453.  
 Dekrement, natürliches logarithmisches 454.  
 Diamagnetische Stoffe 163.  
 Diamagnetismus, Theorie von Weber 325.  
 Dichte, Flächendichte der Elektrizität 33.  
 — — des Magnetismus 149, 152.  
 — räumliche der Elektrizität 30.  
 — — des Magnetismus 152.  
 Dielektrika 62.  
 Dielektrischer Widerstand 111.  
 Dielektrizitätskonstante 62.  
 — experimentelle Ermittlung 120—124.  
 — desgl. mit Drahtwellen 613 ff.  
 — desgl. mit freien Wellen 632 ff.  
 — desgl. mit oscillatorischer Entladung 455 ff.  
 — und Brechungsexponent 435.  
 Differentialdefinition von  $\mu$  199.  
 Dimension der Elektrizitätsmenge 36.  
 — der elektrostatischen Größen 37.  
 — der Kapazität in elektrostatischem Maße 50.  
 — der magnetischen Größen 148.  
 — der Stromstärke 224.  
 — der elektromotorischen Kraft 312.  
 — der Induktionskoeffizienten 328.  
 — des Widerstandes 360.  
 — der spezifischen Leitfähigkeit 362.  
 — des Verhältnisses der beiden Maßsysteme 363.  
 — der Elektrizitätsmenge in elektromagnetischem Maße 364.  
 — der Kapazität in elektromagnetischem Maße 366.  
 — Zusammenstellung 367.  
 Dipol, elektrischer 60.  
 — magnetischer 151.  
 — schwingender elektrischer 539, 549 ff.  
 Dispersion elektrischer Wellen 650, 651.

Doppelbrechung elektrischer Wellen 571.  
 Doppellinse, magnetische 226 ff.  
 Doppelplatte, Maxwell'sche 27, 145.  
 Doppelschieben, elektrische 77 ff.  
 Drahtwellen 497 ff., 578 ff.  
 Drehspulengalvanometer 286.  
 Druck, elektrostatischer 56, 102.  
 — an dielektrischen Grenzflächen 103 ff.  
 — an Grenzflächen magnetisierbarer Körper 186 ff.  
 Druckkräfte im magnetischen Felde 278.  
 Durchlässigkeit für elektrische Wellen 569.  
 Dyne 35.

## E.

Einheit der Elektrizitätsmenge 34, 35.  
 — der Kapazität 51.  
 — der Polstärke oder Magnetismenmenge 147.  
 — der Stromstärke in elektromagnetischem Maße 224.  
 — der elektromotorischen Kraft 312.  
 — der Induktionskoeffizienten 328.  
 — der Stromstärke in elektrostatischem Maße 351, 355.  
 — des Widerstandes 361.  
 — Verhältnis der Einheiten 362 ff.  
 — Zusammenstellung 367, 368.  
 Einleitröhre 148.  
 Elektrischer Zustand 4.  
 Elektrizität, wahre, freie 83.  
 Elektrizitätsmenge 8.  
 Elektrodynamik 295.  
 Elektroinduktion 310 ff.  
 Elektrokinematik 351.  
 Elektromagnete 278.  
 Elektromagnetismus 217 ff.  
 Elektrometer, absolutes 57.  
 Elektromotorische Kraft 331.  
 — der Induktion 312.  
 — längs einer Kraftlinie 111.  
 — nach elektrostatischem Maße 365, 368.  
 Elektroskopmethode zum Nachweis elektrischer Schwingungen 570.  
 Elektroerfektion 124 ff.  
 — in Gasen 128.  
 — in festen Körpern 129.

Elementargesetz von Biot, Savart 254, 286.  
 — von Ampère 302.

Ellipsoid, dielektrisches, im homogenen elektrischen Felde 92, 93, 116, 117.  
 — magnetisierbares, im homogenen magnetischen Felde 177.

Energie des elektrostatischen Feldes 93 ff.  
 — elektrische, der Volumeneinheit 98.  
 — eines nicht statischen Feldes 98–100.  
 — einer Kraftlinie 111.

— des magnetischen Feldes 139, 179 ff.  
 — magnetische, der Volumeneinheit 183.  
 — einer Induktionsröhre 185.  
 — eines in einer Kraftlinie 111.

Energie, magnetische, körperlicher Ströme 270 ff.

einer Induktionsröhre 271 ff.

wechselseitige 270, 291.

Zusammenfassung der Formeln 307.

elektrische 312 ff., 355.

magnetische, bei Wechselströmen 384 ff.

elektrische und magnetische einer Welle 437.

bei ferromagnetischen Körpern 201.

der Strahlung 438, 512.

Energiedichte 98, 102, 183, 269.

Energiefluß 426.

Energieinhalt einer Kraftlinie 110.

Entelektrisierende Wirkung 81.

Erdmagnetisierende Wirkung 176.

Erdmagnetisierungsfaktor 178.

Erhaltung der Elektrizitätsmenge 9.

Erregung, elektrische 64.

magnetische 166.

Erreger von Hertz 518, 520.

Erregungsfluß 65.

Extrastrome 320.

## F.

Farad 366, 368.

Faradaysches Gefäß 8.

Feld 2.

vollständiges, unvollständiges 12.

elektrisches 12.

lamellares 19.

quellenfreies 30.

solenoidales 28.

homogene 33.

magnetisches 137.

magnetostatisches 137.

elektromagnetisches 418.

Feldstärke, elektrische 14.

magnetische 110.

— an einem Ende eines Solenoids 257 ff.

Feldwirkungen, Theorie der 2, 5.

Fernkräfte, Fernwirkungen 2, 5, 240.

Ferromagnetische Stoffe 161, 197 ff.

Flächendichte der Elektrizität 33.

des Magnetismus 152.

— fiktive, bei Stahlmagneten 119.

Flüßigkeiten mit ungleichförmigen Magnetfeldern 188 ff.

Fortpflanzungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen 435, 560.

von Drahtwellen 499, 510–512, 580.

584 ff., 592 ff., 605.

Freie Elektrizität 83, 81.

Freier Magnetismus 152.

Funken, aktive 530.

## G.

Gitterversuch von Hertz 569.

Gradient 19.

Grenzbedingungen des elektrischen Feldes

Grundgleichung des elektromagnetischen  
Feldes in Isolatoren 418.  
-- des elektromagnetischen Feldes in  
Leitern 423.  
-- des elektrostatischen Feldes 38.  
Grundschwingung eines Leitersystems 505.

## H.

Hantelstekt 392.  
Hertzsche Versuche 517, 557, 565 ff.  
Hochspannungsakkumulator 570.  
Hohlratame in Isolatoren 70.  
-- in magnetisierten Stoffen 167.  
Hohlspiegelversuche 566 ff., 572.  
Horizontalintensität des Erdmagnetismus  
159.  
Huygenssches Prinzip 573.  
Hydrostatische Methode zur Messung der  
Permeabilität 190 ff.  
Hysteresis 203.  
-- dielektrische 133.  
-- viskose 134.  
-- reine 134.  
Hysteresisschleife 204, 263.  
Hysteresiswärme 204 ff.

## I, J.

Impedanz 383.  
Induktion, elektrische 310 ff.  
-- magnetische 166.  
Induktionsapparat 321, 466, 518, 529.  
Induktionsfluß 174.  
Induktionskoeffizient 315 ff.  
Induzierter Magnetismus 170.  
Influenz 51.  
Influenzelektrizität der Isolatoren 81.  
Integraldefinition von  $\mu$  199.  
Interferenzen elektrischer Wellen 575 ff.  
Interferenzröhre 617.  
Isolatoren 7.  
Joulesche Wärme 356, 374, 380, 381.

## K.

Kapazität 49 ff.  
-- einer Kugel 51.  
-- eines Plattenkondensators 53.  
-- -- für elektrische Schwingungen 595.  
-- eines Drahtes 495.  
-- paralleler Drähte 490.  
-- im Wechselstromkreis 399.  
Kapazitätsvergleichung 120.  
-- mit der Brücke 404.  
Kirchhoffsche Sätze 286, 373 ff., 382.  
Knoten 507, 557.  
Koeffizient der gegenseitigen Induktion  
315, 338 ff.  
-- der Selbstinduktion 317, 320 ff.  
Koerzitivkraft 206.  
Kohärer 570.  
Kondensatoren 51.

Kontaktknoten 3.  
Konvektionsstrom 363, 417.  
Konzentration der Kraftlinien durch  
Brechung 74, 169.  
Koppelung, elektrische 482.  
-- magnetische 472.  
-- beim Glendoltschen Erreger 620.  
Koppelungsfaktor 346, 472, 479.  
Kraft, elektrische 11.  
-- magnetische 140.  
-- elektromotorische 111, 351.  
-- magnetomotorische 184, 291.  
-- thermoelektrische 353.  
-- ponderomotorische, von zwei Strömen  
aufeinander 297 ff.  
-- bei zwei parallelen Stromzylindern 337.  
-- des elektrischen Feldes 55 ff.  
-- im Dielektrikum 67.  
-- an dielektrischen Grenzflächen 103.  
-- auf dielektrische Körper 113 ff.  
-- eines Magnetfeldes auf einen Strom-  
kreis 284.  
-- auf ein Stromelement 284.  
-- eines Stromes auf sich selbst 296.  
Kraftfluß, elektrischer 27.  
-- magnetischer 145, 174.  
Kraftlinien, elektrische 15, 16, 35.  
-- magnetische 143, 148.  
-- eines elektrischen Stromes 241 ff.  
-- einer elektrischen Schwingung 519 ff.  
Kraftreihe 28, 111.  
Kreisgebiete eines Hertzschen Erregers  
533, 548.  
Kreisstrom, magnetisches Feld 255.  
Kugalkondensator 52.  
Kugel, leitende, im homogenen elektrischen  
Feld 57 ff.  
-- dielektrische, im homogenen elektrischen  
Feld 87 ff., 117, 118.  
-- magnetisierbare, im homogenen ma-  
gnetischen Feld 177.  
Kugelwellen 538.

## L.

Ladung, elektrische 8.  
-- scheinbare 80, 81.  
-- wahre 82.  
Ladungszeit 516.  
Lecherisches Drahtsystem 581.  
Leiter 7.  
Leitfähigkeit bei dielektrischen Körpern  
121.  
-- spezifische 357, 360.  
-- magnetische 162.  
-- Beziehung zur Absorption elektrischer  
Wellen 645.  
Lenzsche Regel 320, 324.  
Lichtäther siehe Äther 4.  
Linke-Hand-Regel 286.  
Löschfunken 481.

M.

- Magnetisierender Eisen
- Magnete, permanente 133
- Magnet, physikalisch, mathematisch 133, 134
- Magnetisches Feld eines stromdurchflossenen Hohlzylinders 244, 245
- eines Vollzylinders 244
- eines Hohlzylinders mit Eisenmantel 245
- Magnetisierung 131
- Magnetisierung des Harnsteins 131
- Magnetisierungskurve 131
- Methoden zur Messung des 133 ff., 264
- für Hertzscher Schwingungen 133
- Magnetisierungskurve 131, 264
- Magnetismenmenge 14
- Magnetometrische Methode 133, 264
- Magnetometrische Kraft 133, 264
- Magnetostriktion 260 ff.
- Maßsystem, absolutes, elektrostatisches 33
- magnetisches 147
- Mathematischer Magnet 133
- Maxwell'sche Gleichungen 23, 26 ff., 244, 245
- Mechanische Bilder der elektrischen Ströme 235
- Mikrofarad 54, 366, 367
- Moment eines Dipols 60, 131
- elektrisches, eines Doppeldipols 73
- der Rauminduktion
- magnetisches, eines Magneten 131, 134
- permanentes magnetisches der Raum-einheit 131
- Messung des Moments eines Magneten 158 ff.
- induziertes magnetisches, der Raum-einheit 172
- magnetisches, einer Doppelfläche 226

N.

- Nachwirkung, dielektrische 127, 128
- Nadel, elektrische 15
- Nahkräfte, Nahwirkungen 2
- Nahwirkungsgesetz 427
- Nahwirkungsgesetz der Elektrostatik zwischen Kraft für ruhende Körper 314
- für bewegte Körper 316
- Nichtleiter 7
- Niveauflächen 18
- Niveaugestalten der Flüssigkeiten in Magnetfeldern 188

O.

- Oberschwingungen eines Paralleldrahtsystems 506
- eines stabförmigen Erregers 554
- Ohm 364, 368
- Ohm'sches Gesetz 366 ff., 368, 376
- Oszillator 531
- Oszillationen, oszillatorische Kondensatorenladung 443 ff.

P.

- Parallelschaltung von Kondensatoren 54
- Paramagnetische Stoffe 163
- Permanente Magnete 207 ff.
- Permeabilität 163
- Einfluß auf die elektrodynamische Wirkung 264
- konstante Methode zur Messung 321
- von 16 ff., Einfluß auf die Schwingungen 290
- Pendelrelation zwischen Strom und Spannung bei Wechselstrom 383
- von primärem und sekundärem Strom am Transformator 395
- Reflexion, bei der Reflexion 641
- Physikalischer Magnet 155
- Plattenkondensator 52, 595
- Polarität eines Magneten 158
- Polarisation, elektrische 85
- magnetische 172
- elektrischer Wellen 569, 574
- Polarisationswinkel 628
- Pole, magnetische 156
- äquivalente 157
- Pollstärke 157
- eines Elektromagneten 261
- eines Solenoids 260
- nach absolutem Maß 147
- Potential der elektrischen Kraft 18
- Eigenschaften des 40 ff.
- in dielektrischen Mitteln 75 ff.
- der magnetischen Kraft 144
- eines Magneten 151
- eines magnetischen Doppelfläche 226 ff.
- eines geschlossenen linearen Stromes 226
- elektrodynamisches, nach Neumann 300
- Prezessionscher Vektor 428
- Primärstromen 526, 529
- Prüfzylinder, Prüfkugel 13
- Prüfpol 13

Q.

- Quasistationäres Verhalten bei Wechselstromen 401
- Quell eines Vektors 25

R.

- Rechte Hand Regel 324
- Reduzierte Länge eines Magneten 158
- Reflexion elektromagnetischer Wellen an Metallspiegeln 555
- elektrischer Wellen an Isolatoren 623 ff.
- an Leitern 639 ff.
- bei scharfem Einfall 655
- an einer sehr dünnen Metallschicht 657
- Reihenschaltung von Kondensatoren 54
- Relativität der Induktionswirkungen 915
- Relaxationszeit 378
- Resonanz 206



Resonanz 457, 459.  
 — bei Drahtwellen 590 ff.  
 — multiple 564 ff.  
 — — bei Drahtwellen 604.  
 Resonator von Hertz 526.  
 — bei Drahtwellen 603.  
 Righische Versuche 571.  
 Röntgenstrom 417.  
 Rotation eines Vektors 25.  
 Rotationen im elektrischen Felde 133.  
 Rotationsapparate, elektromagnetische 287.  
 Rückstand, elektrischer 121, 122.  
 Ruhmkorffscher Apparat 466, 518, 529.

## S.

Saitengalvanometer 286.  
 Saitenunterbrecher 286.  
 Sättigung der Magnetisierung 197.  
 Satz von Gauß 80.  
 — von Green 39.  
 — von Stokes 20.  
 Scheinbare Ladungen 80, 81.  
 Scherung einer Magnetisierungskurve 198.  
 Schirmwirkung, magnetische 165.  
 — für elektrische Wellen 569, 653.  
 Schlagweite eines Induktoriums 469.  
 Schlußlochmethode 322.  
 Schutzringkondensator 54.  
 Schwingungen, elektrische 440 ff.  
 — eines Dipols 539, 549 ff.  
 — eines stabförmigen Erregers 552.  
 Schwingungsdauer des Hertzischen Erregers 520 ff.  
 — eines Thomsonischen Kreises 451.  
 — zweier gekoppelter Kreise 475.  
 Schwingung, geradlinige, Theorie der 535.  
 Schwingungskreis, Thomsonischer 447.  
 Schwingungskreise, gekoppelte 472.  
 Sekundärfunken 526.  
 Selbstinduktion 317, 320.  
 Selbstinduktionskoeffizienten eines Solenoides 329.  
 — eines geraden Drahtes 521.  
 — eines Schwingungskreises 484.  
 — für schnelle Schwingungen 487.  
 — koaxialer Zylinder 336.  
 — paralleler Drähte 330 ff.  
 Selbstinduktionsvergleichung mit der Brücke 404.  
 — mit oszillatorischer Entladung 456.  
 Siemenssche Einheit 361.  
 Skalare 19.  
 Skineffekt 392.  
 Solenoid 136.  
 — Selbstinduktionskoeffizient eines 329.  
 — Feldstärke im Inneren 257 ff.  
 Spannungen im elektrischen Felde 108 ff.  
 Spannungsgesetz 352.  
 Spannungsreihe 7.  
 Stehende Wellen 487, 557 ff.  
 — — an Drähten 538.

Steighiemsmethode für Messung von  $\mu$  190 ff.  
 Stoßerregung 471.  
 Strahlen elektrischer Kraft 565.  
 Strahlung 174.  
 — der Energie 438, 542.  
 Strahlungsektor 439.  
 Strom, elektrischer 214, 316.  
 — magnetischer 345.  
 Stromarbeit 355.  
 Stromlehre 234.  
 Ströme, ungeschlossene 107.  
 — in Isolatoren 106.  
 Stromstärke 222, 333 ff., 367.  
 — in elektrostatischem Maße 355.  
 Suszeptibilität 173.

## T.

Tangentenbusch 257.  
 Telegraphengleichung 509.  
 Telegraphie ohne Draht 479.  
 Telefonwellen 544.  
 Temperaturänderung, umkehrbare durch Elektrisierung 130 ff.  
 — durch Magnetisierung 215.  
 Tesla-Transformator 178, 530.  
 Theorie des induzierten und permanenten Magnetismus von Ampère 263.  
 — des Diamagnetismus von Weber 2.  
 Thermoelektrische Kräfte 353.  
 Thermoelement 571.  
 Thomsonischer Schwingungskreis 447.  
 — Erregung durch periodische Kraft 457.  
 Totalreflexion elektrischer Wellen 573.  
 Tragkraft der Elektromagnete 278.  
 Transformator 340, 394 ff.  
 Transversalität der elektrischen Wellen 434, 625.

## U.

Umsetzungsverhältnis eines Transformators 398.  
 Undurchlässigkeit für elektrische Wellen 569.

## V.

Vakuum-Thermoelement 571.  
 Vektoren 19.  
 Vektorpotential 238 ff.  
 Verhältnis des elektrostatischen Maßsystems zum elektromagnetischen 362 ff.  
 Verschiebung, elektrische, magnetische 235, 415.  
 Verschiebungsströme, experimenteller Nachweis 415.  
 — bei Drahtwellen 491, 585.  
 — beim Hertzischen Erreger 521.  
 — in leitenden Medien 637.  
 Verschwindendes Feld 377.  
 Versuche von Hertz 517, 557, 565 ff.

Versuche von Righi 571.  
 Volt 312, 365, 368.  
 Voltasches Spannungsgesetz 353.  
 Volumkräfte 118, 119.

### W.

Wahre Elektrizität 83, 84.  
 Wahrer Magnetismus 152.  
 Wechselströme 381.  
 — in körperlichen Leitern 388 ff.  
 — quasistationäre 401.  
 Wechselwirkung von Strömen und Magneten 290.  
 Wellen an Drähten 497.  
 — ebene in Isolatoren 433.  
 Wheatstonesche Brücke 403.  
 Widerstand, dielektrischer 111.  
 — effektiver 392.  
 — Einheit des galvanischen 360, 367.

Widerstand, galvanischer 357.  
 — magnetischer 184, 276, 321.  
 — scheinbarer bei Wechselströmen 383.  
 — zwischen Erdplatten 371.  
 — zwischen Kugeln in  $\infty$  ausgedehntem Leiter 370.  
 Widerstandsoperator 382.  
 Widerstandsmessung mit der Brücke 403.  
 — im Elektrolyten 405.  
 — mit oszillatorischer Entladung 456.  
 Wirbel eines Vektors 25.  
 Wirbelräume des Magnetfeldes 219 ff.  
 Wirbelströme 323.

### Z.

Zehndersche Röhre 570.  
 Zeitkonstante eines Stromkreises 380.  
 Zugkräfte im magnetischen Felde 278.  
 Zugkraftmethode zur Messung von  $\mu$  193.  
 Zyklische Schwingungszahl 381.